САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2019–2020 гг.

ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020

ББК 22.25
Т78

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Т78 **Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2019–2020 гг.** — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2020. — 126 с.
ISSN 2218-7421

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, собранных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Издание адресовано исследователям, специализирующимся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ББК 22.25

Семинар проводится
Санкт-Петербургским государственным университетом
совместно с Петербургским государственным университетом путей сообщения

Спонсор издания — некоммерческая организация
«Фонд содействия математическому образованию
и поддержки исследований в области точных наук “УниШанс”»
при финансовой поддержке инвестиционно-строительной группы «МАВИС»

СОДЕРЖАНИЕ

НОВЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК В ЗАДАЧАХ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И БИОДИНАМИКИ

Б. А. Смольников, А. С. Смирнов

В статье рассматривается задача о нахождении самого разностороннего, т. е. наиболее асимметричного, треугольника. Обсуждаются вопросы формирования различных критериев качества, связанных с максимизацией разностей углов или сторон треугольника и характеризующих степень его асимметрии. Проводится подробный анализ как аддитивных, так и мультипликативных критериев, в ходе которого выявляются их достоинства и недостатки. Показано, что наиболее адекватным является критерий качества, основанный на максимизации произведения разностей сторон треугольника, и в результате его использования можно получить конкретную конфигурацию треугольника. Помимо этого, обсуждаются практические приложения наиболее асимметричного треугольника, связанные как с задачей о пассивной стабилизации искусственного спутника Земли на круговой орбите в ньютоновом силовом поле, так и с биодинамикой руки человека. Полученные результаты позволяют сделать вывод о целесообразности использования подобного мультипликативного критерия и в других задачах оптимизации в математике и механике.

1. Введение

Треугольник — геометрическая фигура, образованная тремя отрезками, которые соединяют три точки, не лежащие на одной прямой. Как известно, эти точки называются вершинами треугольника, а отрезки — его сторонами. История треугольника началась в глубокой древности: основные его свойства были известны еще с ранней античности, и постепенно образовалась целая ветвь геометрии — тригонометрия, без которой просто немыслимы решения множества практических задач математики и механики, физики, астрономии и др.

Существует две основные классификации треугольников, выделяющие его основные разновидности: по величине углов и по числу

Доклад на семинаре 5 ноября 2019 г.

равных сторон. Первая классификация разделяет треугольники:

1) на *остроугольные* (все три угла меньше 90°),
2) *тупоугольные* (один угол больше 90°),
3) *прямоугольные* (один угол равен 90°).

Вторая классификация разделяет треугольники:

1) на *разносторонние* (все три стороны различны),
2) *равнобедренные* (две стороны равны),
3) *равносторонние* (все три стороны равны).

Видно, что в этих классификациях симметрия треугольника играет важную роль. Ясно, что равносторонний (правильный) треугольник является самым симметричным среди всех треугольников. Возникает вопрос: можно ли выделить среди разносторонних треугольников самый асимметричный (т. е. самый неправильный) треугольник? Как будет показано в дальнейшем, существуют практические задачи, в которых асимметрия треугольника играет важную роль. Поэтому имеет смысл формально определить эту характеристику треугольника — степень его асимметрии — и выявить ее экстремальное значение. Именно этот вопрос и будет рассмотрен ниже в настоящей статье.

2. Формирование критерия оптимизации

Чтобы корректно поставить вопрос о нахождении наиболее асимметричного треугольника, необходимо сформировать адекватный критерий качества, от выбора которого и будет зависеть конечный результат. Для начала заметим, что величину асимметрии можно задавать либо разностями углов треугольника, либо разностями его сторон, либо разностями его высот, медиан, биссектрис и прочих геометрических характеристик. Будем рассматривать здесь лишь первые два случая как представляющие наибольший интерес. Математически это означает, что в первом случае в качестве критериев асимметрии будут выступать

$$J_1 = |\varphi_3 - \varphi_2| \to \max,\ J_2 = |\varphi_1 - \varphi_3| \to \max,\ J_3 = |\varphi_2 - \varphi_1| \to \max, \quad (1)$$

тогда как во втором случае эти критерии примут вид

$$J_1 = |A_3 - A_2| \to \max,\ J_2 = |A_1 - A_3| \to \max,\ J_3 = |A_2 - A_1| \to \max, \quad (2)$$

где φ_1, φ_2, φ_3 — углы треугольника, а A_1, A_2, A_3 — стороны этого треугольника, противолежащие данным углам (рис. 1). Эти совокупности величин связаны друг с другом посредством теоремы синусов $A_i = 2R\sin\varphi_i$, где R — радиус описанной окружности, играющий роль масштабного параметра.

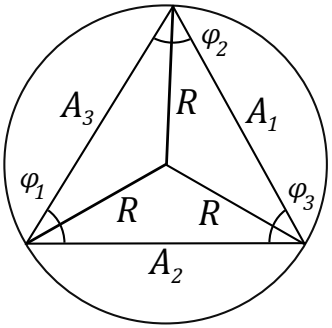


Рис. 1. Обозначения углов и сторон треугольника

Ясно, что в каждой ситуации (1) и (2) мы имеем три критерия качества J_1, J_2, J_3, тогда как варьируемых параметров будет всего лишь два — в их качестве проще всего принять углы φ_1 и φ_2 (третий угол $\varphi_3 = \pi - \varphi_1 - \varphi_2$ и связан с φ_1 и φ_2). Поэтому вполне естественно проводить максимизацию этих критериев совместно, с учетом их взаимного влияния, т. е. путем объединения этих критериев в некоторую «композицию» (термин Вольтерра, [1]), отражающую их функциональное поведение. Такие композиции могут иметь различный вид. Важно подчеркнуть, что для решения полученной многокритериальной задачи в принципе не существует строго обоснованной процедуры. Однако поскольку в процессе анализа того или иного построенного критерия качества мы получаем в конечном счете вполне определенное решение, то представляется необходимым оценить его и сопоставить с решениями, полученными при использовании других критериев [2].

Переходя теперь к обсуждению критериев качества, отметим, что простейшими классами алгебраических композиций частных критериев J_i являются *аддитивные композиции* $J = \sum \lambda_i J_1$ (представляющие линейную свертку критериев J_i с некоторыми ве-

совыми коэффициентами λ_i) и *мультипликативные композиции* $J = \prod J_i$ (представляющие произведение частных критериев J_i) [3]. Класс аддитивных критериев нашел довольно широкое применение в теории автоматического управления, несмотря на свой существенный недостаток — необходимость подбора весовых коэффициентов, причем перебрать все возможные варианты невозможно в силу их бесконечного количества [4]. Выбор этих коэффициентов еще более затруднен в том случае, когда частные критерии J_i в силу своей различной физической природы будут иметь различную размерность, и в таком случае необходимо предварительно некоторым образом их нормировать, т. е. обезразмеривать. Обычно поиск весовых коэффициентов сводится либо к использованию формальных процедур, либо к применению экспертных оценок [5]. Отметим, что в рассматриваемой задаче все критерии J_i как в случае (1), так и в случае (2) имеют одну размерность и являются равноправными, а потому все весовые коэффициенты могут быть приняты равными единице, что вполне логично. К сожалению, во многих других задачах оптимизации этого сделать нельзя, поэтому адекватное конструирование аддитивных критериев является весьма затруднительным. Именно этого недостатка, связанного с определением весовых коэффициентов, лишены мультипликативные критерии, позволяющие более просто получить результирующий критерий, который никоим образом не будет зависеть от этих коэффициентов [6]. Следует подчеркнуть, что подобные критерии используются при расчете коэффициентов полезного действия различных подвижных объектов, а также они нашли применение в задачах динамического программирования и определения вероятности безотказной работы сложных изделий [7, 8]. Кроме того, в последнее время в качестве таких критериев выступают энерго-временные критерии в различных задачах как земной, так и небесной механики [9, 10]. Все это говорит о целесообразности построения мультипликативных критериев качества для широкого круга задач математики и механики.

Далее будут рассмотрены как аддитивные, так и мультипликативные критерии в каждом из двух случаев (1) и (2). На первый взгляд, эти совокупности должны приводить к одному и тому же конечному результату, поскольку, казалось бы, чем больше различаются углы треугольника, тем сильнее различаются и его стороны.

Однако, как мы увидим, это будет не так, и данное обстоятельство напрямую связано с конструированием многофакторного критерия.

3. Критерии, основанные на разностях углов

Обратимся сначала к анализу критериев (1), основанных на максимизации разностей углов треугольника, и построим для них сначала аддитивный, а затем и мультипликативный критерий.

1) *Аддитивный критерий.* Исходя из сказанного выше, сформируем аддитивный критерий качества в форме

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = |\varphi_3 - \varphi_2| + |\varphi_1 - \varphi_3| + |\varphi_2 - \varphi_1| = \max \qquad (3)$$

и исключим из него $\varphi_3 = \pi - \varphi_1 - \varphi_2$. В результате получим

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = |\pi - \varphi_1 - 2\varphi_2| + |\pi - 2\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_2 - \varphi_1| = \max. \quad (4)$$

Отметим, что областью определения критерия (4) являются неравенства $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2 \geq 0$, $\varphi_1 + \varphi_2 \leq \pi$, определяющие на плоскости переменных $\varphi_1\varphi_2$ область в виде прямоугольного треугольника. График функции двух переменных $J(\varphi_1, \varphi_2)$ в виде линий уровня в данной области представлен на рис. 2. Из графика видно, что функция J имеет максимум в том случае, когда два угла треугольника равны $0°$, а третий — $180°$, т. е. в случае его вырождения в отрезок. Поэтому можно сделать вывод, что критерий (3) является непригодным, ибо он не приводит к конкретному невырожденному результату.

Отметим, что если фиксировать угол φ_3, например принимая $\varphi_3 = \pi/2$ и переходя к частной задаче о поиске наиболее асимметричного прямоугольного треугольника, то после исключения $\varphi_2 = \pi/2 - \varphi_1$ мы придем к функции одной переменной

$$J(\varphi_1) = |\varphi_1| + \left|\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right| + \left|\frac{\pi}{2} - 2\varphi_1\right| = \frac{\pi}{2} + \left|\frac{\pi}{2} - 2\varphi_1\right| = \max, \quad (5)$$

где учтено, что угол φ_1 теперь является острым. Однако полученная функция (5) также имеет максимум на границе, когда один из углов треугольника равен $0°$, а два других — $90°$.

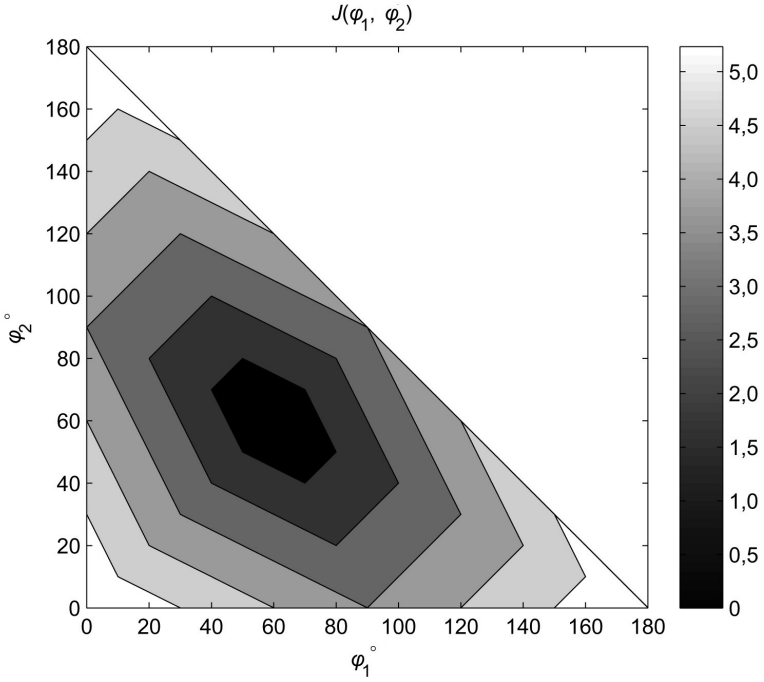


Рис. 2. Аддитивный критерий (разности углов)

Следует подчеркнуть, что иногда вместо критерия (3) строят аддитивный квадратичный критерий, возводя все парциальные критерии в квадрат и избавляясь тем самым от модульных функций:

$$J = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + (\varphi_1 - \varphi_3)^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 = \max. \quad (6)$$

Эта процедура особенно удобна в том случае, когда требуется аналитическое исследование критерия качества, которое влечет за собой вычисление его производных и их последующий анализ. В рассматриваемой задаче такой критерий примет вид

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = (\pi - \varphi_1 - 2\varphi_2)^2 + (\pi - 2\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 = \max. \quad (7)$$

Однако применительно к нему мы получим все те же самые результаты, что видно из рис. 3, который качественно отличается от

рис. 2 лишь тем, что теперь линии уровня становятся гладкими. Таким образом, критерий (6) также следует признать непригодным.

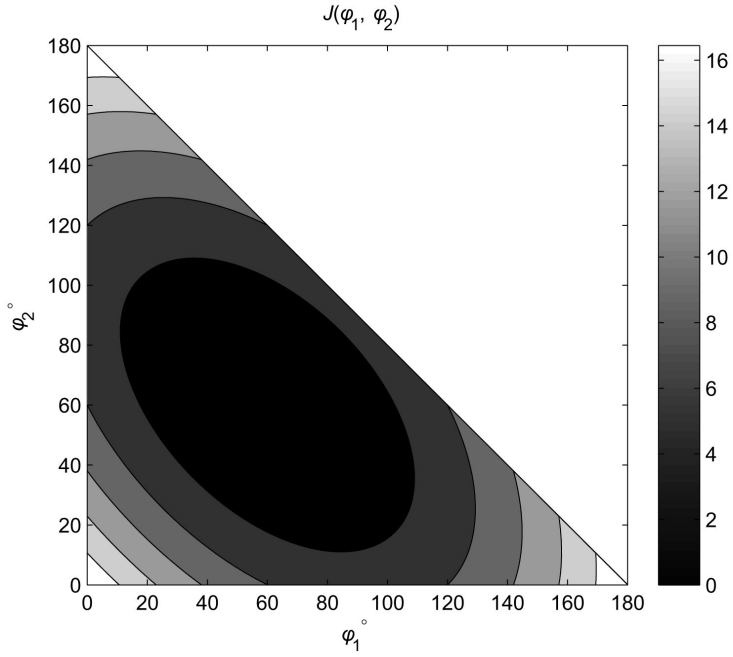


Рис. 3. Аддитивный квадратичный критерий (разности углов)

2) *Мультипликативный критерий.* Обратимся теперь к конструированию мультипликативного критерия качества в форме

$$J = J_1 J_2 J_3 = |(\varphi_3 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_3)(\varphi_2 - \varphi_1)| = \max. \qquad (8)$$

Исключая отсюда $\varphi_3 = \pi - \varphi_1 - \varphi_2$, приведем его к виду

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = |(\pi - \varphi_1 - 2\varphi_2)(\pi - \varphi_2 - 2\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1)| = \max. \qquad (9)$$

Ясно, что данный критерий обращается в нуль на биссектрисе $\varphi_1 = \varphi_2$, а также на двух прямых $\varphi_2 + 2\varphi_1 = \pi$, $\varphi_1 + 2\varphi_2 = \pi$. По

рис. 4 можно заключить, что критерий (9) принимает максимальное значение в том случае, когда один из углов равен 142°, другой — 38°, а третий — 0°, т. е. опять-таки в вырожденном случае.

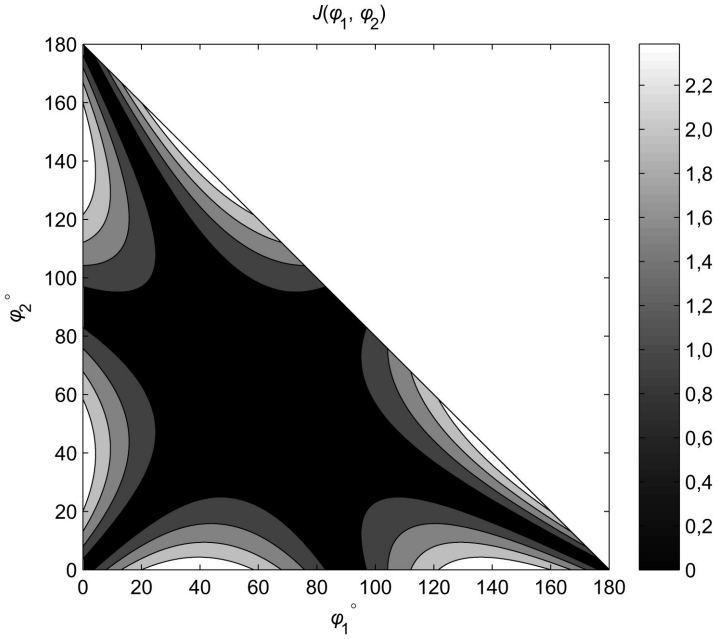


Рис. 4. Мультипликативный критерий (разности углов)

Однако, в отличие от аддитивного критерия, здесь при фиксации одного из углов треугольника может существовать внутренний экстремум. Чтобы показать это, рассмотрим задачу о поиске наиболее асимметричного прямоугольного треугольника, полагая $\varphi_3 = \pi/2$. Выражая далее $\varphi_2 = \pi/2 - \varphi_1$, приведем критерий (9) к виду

$$J = \left|\varphi_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) \left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi_1\right)\right| = \left|2\varphi_1^3 - \frac{3}{2}\pi\varphi_1^2 + \frac{\pi^2}{4}\varphi_1\right| = \max. \quad (10)$$

В силу симметрии полученной функции относительно точки $\varphi_1 = \pi/4$ для ее качественного исследования можно ограничиться

лишь рассмотрением диапазона $0 \le \varphi_1 \le \pi/4$ и снять знак модуля. Определяя точки экстремума полученной функции, находим

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi_1} = 0 \Rightarrow 6\varphi_1^2 - 3\pi\varphi_1 + \frac{\pi^2}{4} = 0 \Rightarrow \varphi_{1*} = \pi\frac{3 \pm \sqrt{3}}{12}. \qquad (11)$$

Нетрудно понять, что меньшее из этих решений попадает в рассматриваемый диапазон, тогда как второе симметрично ему относительно $45°$, как этого и следовало ожидать. Таким образом, в максимально асимметричном по критерию (8) прямоугольном треугольнике острые углы равны $\varphi_{1*} = 19°$ и $\varphi_{2*} = 71°$. Стороны этого треугольника, очевидно, будут равны

$$A_{1*} = 2R\sin\varphi_{1*} = 0,651R,\ A_{2*} = 2R\sin\varphi_{2*} = 1,891R,\ A_{3*} = 2R, \quad (12)$$

где, разумеется,

$$A_1^2 + A_2^2 = 4R^2 = A_3^2. \qquad (13)$$

Таким образом, анализ критериев (1) и конструирование как аддитивного, так и мультипликативного критериев в общем случае не приводит ни к каким конкретным результатам. Тем не менее, в отличие от аддитивного критерия, мультипликативный критерий позволяет определить наиболее асимметричный прямоугольный треугольник.

Подчеркнем, что при использовании мультипликативного критерия также можно избавиться от модульных функций, возводя все частные критерии в квадрат, а затем перемножая их. Однако совершенно очевидно, что, в отличие от аддитивного критерия, это приведет к тому же самому результату не только качественно, но и количественно, ибо если $J = \max$, то и $J^2 = \max$. Это также является несомненным достоинством мультипликативного критерия.

4. Критерии, основанные на разностях сторон

Обратимся теперь к критериям асимметрии (2), основанным на максимизации разностей сторон треугольника.

1) *Аддитивный критерий.* В этом случае аддитивный критерий примет форму

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = |A_3 - A_2| + |A_1 - A_3| + |A_2 - A_1| = \max. \quad (14)$$

Перейдем теперь к переменным φ_1 и φ_2, выражая стороны треугольника через его углы посредством теоремы синусов, а также исключая $\varphi_3 = \pi - \varphi_1 - \varphi_2$ и отбрасывая несущественный постоянный множитель $2R$, не влияющий, очевидно, на результат оптимизации. В результате получим

$$J = |\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin\varphi_1| + |\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin\varphi_2| + \\ + |\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1| = \max \tag{15}$$

Из рис. 5 отчетливо видно, что данный критерий принимает максимальное значение, когда два угла треугольника равны 90°, а третий угол равен 0°, т. е. опять же в случае его вырождения в отрезок.

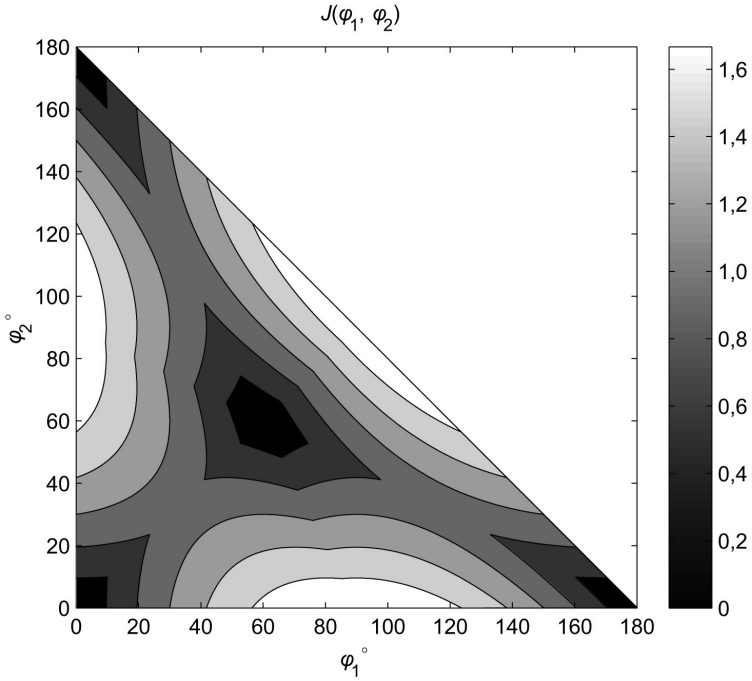


Рис. 5. Аддитивный критерий (разности сторон)

Если же принять $\varphi_3 = \pi/2$ и перейти к поиску наиболее асимметричного прямоугольного треугольника по критерию (14), то после исключения $\varphi_2 = \pi/2 - \varphi_1$ получим

$$\begin{gathered} J = |1 - \sin\varphi_1| + |1 - \cos\varphi_1| + |\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1| = \\ = 2 - \sin\varphi_1 - \cos\varphi_1 + |\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1| = \max. \end{gathered} \tag{16}$$

Нетрудно показать, что этот критерий примет максимальное значение в том случае, когда один из углов треугольника равен $0°$, а два других — $90°$. Это означает, что аддитивный критерий и в отношении максимизации разностей сторон треугольника непригоден как в общем случае, так и в частном варианте прямоугольного треугольника.

Как и в предыдущем разделе, можно построить аддитивный квадратичный критерий качества, основанный на квадратах разностей сторон треугольника:

$$J = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = (A_3 - A_2)^2 + (A_1 - A_3)^2 + (A_2 - A_1)^2 = \max, \tag{17}$$

который нетрудно привести к виду

$$\begin{gathered} J = [\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin\varphi_1]^2 + [\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin\varphi_2]^2 + \\ + [\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1]^2 = \max. \end{gathered} \tag{18}$$

Однако его характер и здесь качественно будет повторять поведение обычного аддитивного критерия (15), так что его использование также нецелесообразно (рис. 6).

2) *Мультипликативный критерий.* Перейдем к анализу мультипликативного критерия в форме

$$J = J_1 J_2 J_3 = |(A_3 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_1)| = \max, \tag{19}$$

или, после перехода к углам φ_1 и φ_2,

$$\begin{gathered} J = \big|\big[\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin\varphi_1\big]\big[\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin\varphi_2\big] \times \\ \times (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)\big| = \max. \end{gathered} \tag{20}$$

Как и критерий (9), критерий (20) обращается в нуль на биссектрисе $\varphi_1 = \varphi_2$ и на прямых $\varphi_2 + 2\varphi_1 = \pi$, $\varphi_1 + 2\varphi_2 = \pi$. Однако теперь

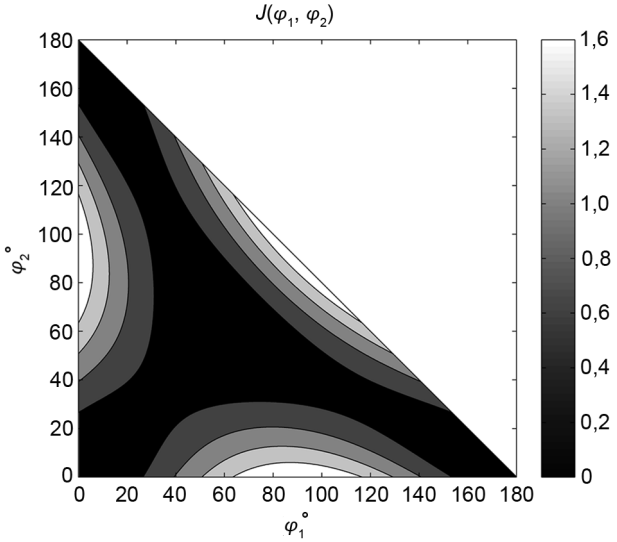


Рис. 6. Аддитивный квадратичный критерий (разности сторон)

критерий также обращается в нуль и на осях $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, а также на прямой $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$. Последние три прямые являются границами области допустимых значений, тогда как первые три прямые делят эту область на шесть треугольных подобластей, на границах которых $J = 0$. Поэтому в каждой из этих областей должен быть внутренний максимум, который, конечно, будет характеризовать одну и ту же конфигурацию искомого треугольника.

По рис. 7 можно определить углы наиболее асимметричного треугольника $\varphi_{1*} = 15,7°$, $\varphi_{2*} = 52,3°$, $\varphi_{3*} = 112°$. Что же касается соотношений между его сторонами, то

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\sin\varphi_{2*}}{\sin\varphi_{1*}} = 2,92, \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{\sin\varphi_{3*}}{\sin\varphi_{1*}} = 3,42, \qquad \frac{A_3}{A_2} = \frac{\sin\varphi_{3*}}{\sin\varphi_{2*}} = 1,17. \tag{21}$$

Таким образом, именно использование мультипликативного критерия позволяет получить конкретные параметры наиболее асиммет-

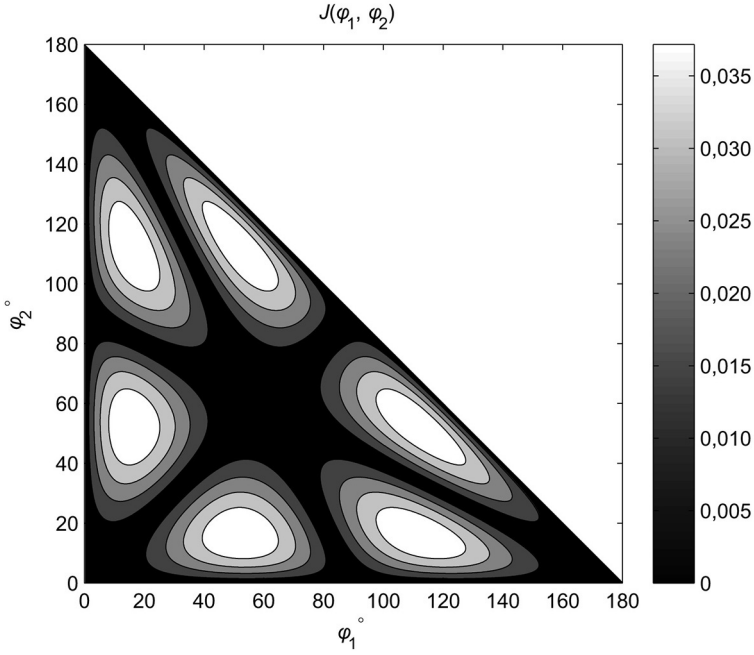


Рис. 7. Мультипликативный критерий (разности сторон)

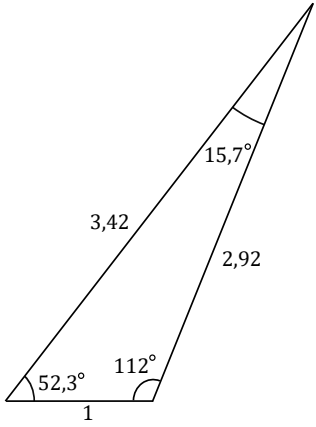


Рис. 8. Наиболее асимметричный треугольник

ричного треугольника, который наглядно изображен на рис. 8.

Наконец, определим по критерию (19) наиболее асимметричный прямоугольный треугольник. Полагая вновь $\varphi_3 = \pi/2$ и исключая из выражения (20) $\varphi_2 = \pi/2 - \varphi_1$, получим

$$J = |(1 - \sin\varphi_1)(1 - \cos\varphi_1)(\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1)|. \tag{22}$$

Снимая знак модуля в силу симметрии получившегося выражения относительно $\varphi_1 = \pi/4$, т. е. рассматривая диапазон $0 \le \varphi_1 \le \pi/4$, вычислим производную получившегося выражения по φ_1 и приравняем ее к нулю. В результате получим уравнение

$$\begin{gathered}(\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1)^2(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 - 1) = \\ = (1 - \sin\varphi_1)(1 - \cos\varphi_1)(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1).\end{gathered} \tag{23}$$

Для его решения перейдем к половинному углу, сделав следующую замену переменной:

$$x = \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (23), приходим к кубическому уравнению, которое распадается на множители

$$(1 - x^2)(7x^2 - 6x + 1) = 0 \tag{25}$$

и сводится к квадратному уравнению

$$7x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x_* = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{7} \Rightarrow \varphi_{1*} = 2\operatorname{arctg}\frac{3 \pm \sqrt{2}}{7}. \tag{26}$$

Ясно, что в рассматриваемый диапазон попадает меньшее из этих решений, а второе симметрично ему относительно 45°. Таким образом, острые углы наиболее асимметричного прямоугольного треугольника по критерию (19) будут равны $\varphi_{1*} = 25,5°$, $\varphi_{2*} = 64,5°$. Стороны этого треугольника, очевидно, будут равны

$$A_1 = 2R\sin\varphi_1 = 0,861R, \;\; A_2 = 2R\sin\varphi_2 = 1,805R, \;\; A_3 = 2R. \tag{27}$$

Интересно отметить, что эти значения не сильно расходятся с углами, полученными по мультипликативному критерию, основанному

на максимизации разностей углов. Эта разница объясняется тем, что функциональные мультипликативные композиции (9) и (20) по своей формульной структуре являются различными, хотя обе они характеризуют асимметрию треугольника.

5. Приложения к классической механике

В качестве одного из практических приложений полученного наиболее асимметричного треугольника можно привести задачу о пассивной стабилизации искусственного спутника Земли (ИСЗ) на круговой орбите в ньютоновом силовом поле. Данная задача имеет важное прикладное значение (рис. 9).

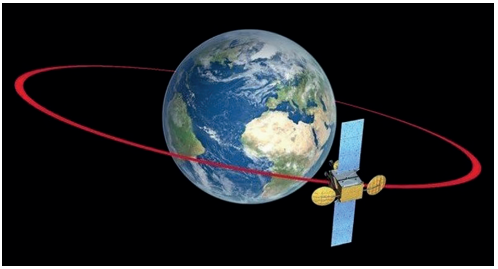


Рис. 9. Спутник на круговой орбите

Как известно, гравитационные стабилизирующие моменты определяются по формулам

$$\begin{aligned} m_1 &= 3\Omega^2(A_3 - A_2)\beta_2\beta_3, \\ m_2 &= 3\Omega^2(A_1 - A_3)\beta_1\beta_3, \\ m_3 &= 3\Omega^2(A_2 - A_1)\beta_1\beta_2, \end{aligned} \tag{28}$$

где A_1, A_2, A_3 — главные центральные моменты инерции ИСЗ, β_1, β_2, β_3 — направляющие косинусы местной вертикали центральной силы тяготения, $\Omega^2 = g/R$ — угловая скорость обращения ИСЗ вокруг этого центра по круговой орбите радиуса R [9]. Отсюда видно, что пассивная стабилизация ИСЗ достигается за счет разностей центральных моментов инерции. Очевидно, что возвращающие моменты достигают наибольшей величины при условии, что тензор

инерции тела наиболее асимметричен. Поскольку моменты инерции A_1, A_2, A_3 удовлетворяют неравенству треугольника [11], то задача сводится к поиску наиболее асимметричного треугольника со сторонами A_1, A_2, A_3, т. е. к критериям (2).

6. Приложения к биодинамике

Обратимся теперь к биодинамическим приложениям полученного треугольника. С этой целью рассмотрим строение руки человека и проанализируем соотношение между длинами ее составных частей (рис. 10).

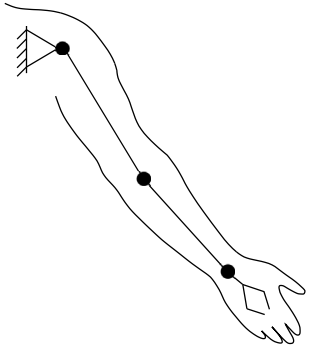


Рис. 10. Строение руки человека

Известно, что длины плеча, предплечья и кисти руки человека приблизительно относятся как 5:4:3 [12]. В то же время длина пальцевого отдела кисти составляет $\frac{1}{2}$ общей длины кисти, поэтому длины плеча A_1, предплечья A_2 и сжатой в кулак кисти A_3 руки человека будут относиться как $A_1{:}A_2{:}A_3 = 5{:}4{:}1{,}5$, или в целочисленных соотношениях $A_1{:}A_2{:}A_3 = 10{:}8{:}3$. Отсюда вытекает, что $A_1{:}A_2 = 1{,}25$, тогда как для полученного путем расчетов наиболее асимметричного треугольника, согласно (21), имеем $A_1{:}A_2 = 3{,}42{:}2{,}92 = 1{,}17$. Кроме того, для руки человека $A_1{:}A_3 = 10{:}3{=}3{,}33$, а для полученного треугольника $A_1{:}A_3 = 3{,}42$. Видно, что эти результаты очень близки друг к другу, даже несмотря на довольно грубую оценку пропорций частей руки. Это наводит

на мысли, что человеческая рука также оптимизирована природой по критерию наибольшей асимметрии ее составных частей, а если прижать кулак к плечу, то рука составит тот самый треугольник.

7. Заключение

Резюмируя результаты проведенного исследования, следует заключить, что именно полифакторный мультипликативный критерий качества дает невырожденный и вполне определенный результат, который может найти практическое применение.

Литература

1. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 488 с.
3. *Саркисян С. А., Ахундов В. М., Минаев Э. С.* Большие технические системы: Анализ и прогноз развития. М.: Наука, 1977. 350 с.
4. *Ногин В. Д.* Принятие решений при многих критериях. СПб.: ЮТАС, 2007. 104 с.
5. *Корячко В. П., Курейчик В. М., Норенков И. П.* Теоретические основы САПР. М.: Энергоатомиздат, 1987. 400 с.
6. *Бельков В. Н., Ланшаков В. Л.* Автоматизированное проектирование технических систем. М.: Изд. дом Академии естествознания, 2009. 144 с.
7. *Вентцель Е. С.* Элементы динамического программирования. М.: Наука, 1964. 176 с.
8. *Леликов О. П.* Основы расчета и проектирования деталей и узлов машин. Конспект по курсу лекций «Детали машин». М.: Машиностроение, 2007. 464 с.
9. *Меркин Д. Р., Смольников Б. А.* Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 534 с.
10. *Смольников Б. А., Смирнов А. С.* Новый критерий оптимизации в задаче Гомана // XII Съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4 т. Т. 1. Общая и прикладная механика. 2019. С. 266–268.
11. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. М.; Ижевск: РХД, 2007. 592 с.
12. *Механик Н. С.* Основы пластической анатомии. М.: Искусство, 1958. 350 с.

ЭФФЕКТЫ РАЗРУШЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ЦЕПОЧЕК ЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

А. А. Смирнов, Н. А. Казаринов

Работа посвящена решению задачи о динамическом разрушении систем с пространственной дискретностью. Данная задача представляет интерес как для фундаментальных исследований, так и для инженерных приложений. Исследования в области динамики разрушения проводятся в основном для континуальных сред, задачи о разрушении дискретных систем зачастую остаются неизученными. При этом, с одной стороны, дискретные системы обладают рядом особенностей разрушения при динамическом воздействии, а с другой — позволяют исследовать ряд эффектов динамического разрушения, используя относительно простые модели. В представленной работе изучается разрушение гармонического осциллятора при кратковременных силовых воздействиях. Получены эффекты задержки разрушения, а также зависимости длины разрушающего импульса от времени разрушения. Также было получено аналитическое решение для задачи о колебаниях цепочки из произвольного числа одинаковых осцилляторов при действии произвольной силы, приложенной к свободному концу цепочки. Данное решение позволило продемонстрировать эффект разрушения, свойственный дискретным системам и не наблюдаемый в континуальных аналогах.

1. Исследование поведения одного осциллятора при импульсном нагружении

Рассматривается задача колебания груза массой m на пружине жесткости c (рис. 1). Пружина обладает статической прочностью, и при достижении некоторого критического значения перемещения x_c происходит ее разрушение. Дифференциальное уравнение колебаний и начальные условия записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + cx = f(t), \\ x_{t=0} = 0, \\ \dot{x}_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-31-60037
Доклад на семинаре 12 ноября 2019 г.

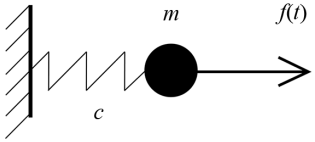


Рис. 1. Груз с массой m на пружине с жесткостью c под действием импульсного растяжения $f(t)$

где $f(t) = A\,(H(t) - H(t-\tau))$ — импульсное растяжение, A — амплитуда имульса, τ — длительность действия импульса, H — функция Хевисайда. Поделим левую и правую часть уравнения (1) на m:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{f(t)}{m}, \\ x_{t=0} = 0, \\ \dot{x}_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — собственная частота колебаний осциллятора. Общее решение при $t \leq \tau$ примет вид

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + C_3, \tag{3}$$

а при $t > \tau$ решение таково:

$$x(t) = C_4 \sin(\omega t) + C_5 \cos(\omega t). \tag{4}$$

После нахождения констант решение системы (2) запишется в виде

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{c}(1 - \cos(\omega t)),\ t \leq \tau, \\ \frac{A}{c}(\cos(\omega(t-\tau)) - \cos(\omega t)),\ t > \tau. \end{cases} \tag{5}$$

Исследуем зависимость $\tau(t^*)$, где t^* — время, соответствующее моменту разрушения осциллятора. Для этого приравняем выражение (5) к x_c, которое будем считать равным 1 м. Рассмотрим отдельно уравнение при $t^* \leq \tau$. Путем нескольких элементарных преобразований выразим t^*:

$$t^* = \frac{\arccos(\frac{A-c}{A})}{\omega}. \tag{6}$$

В случае $t^* > \tau$ после нескольких преобразований равенства (5) получим следующее выражение для τ:

$$\tau = \frac{\omega t^* - \arccos(\cos(\omega t^*) + \frac{c}{A})}{\omega}. \tag{7}$$

На рис. 2 и 3 представлены графики зависимостей $\tau(t^*)$ для разных значений жесткости пружины и массы при амплитуде $A = 1$ Н. Линия $t^* = \tau$ соответствует пороговому разрушению, т. е. разрушению, происходящему точно в момент снятия нагрузки. Если $t^* > \tau$, то можно говорить об эффекте задержки разрушения. Достаточно длинным импульсам соответствует одинаковое время разрушения.

Теперь исследуем, как зависит амплитуда импульса от длительности его действия в момент разрушения при условиях: $c = 1$ Н/м, $m = 1$ кг. Выразим $A(\tau)$ из уравнения (5) при критическом значении перемещения $x_c = 1$ м:

$$A(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \cos(t^*)}, t^* \leq \tau, \\ \dfrac{1}{\cos(t^* - \tau) - \cos(t^*)}, t^* > \tau. \end{cases} \tag{8}$$

Анализируя (8), получаем, что при $t^* \leq \tau$ амплитуда импульса будет постоянной, так как длительность действия импульса не может быть больше времени разрушения. Более того, амплитуда будет минимальной, потому что разрушение происходит без задержки. Очевидно, что минимальная амплитуда будет равна $\frac{1}{2}$ Н и достигается она при $t^* = \pi$ сек. Стоит также заметить, что полученное значение меньше статической критической силы, разрушающей осциллятор, которая равна 1 Н при данных условиях задачи. При этом максимальное значение амплитуды не ограничено. На рис. 4 приведен график зависимости $A(\tau)$ для разных значений t^*.

Из полученных результатов видно, что на примере одного линейного осциллятора уже наблюдаются эффекты динамического разрушения, например задержка разрушения. Подобный эффект наблюдался в работе [1]. Образцы в эксперименте также находились под действием импульсного нагружения, а рост трещины происходил на фазе снижения напряжений вблизи вершины трещины.

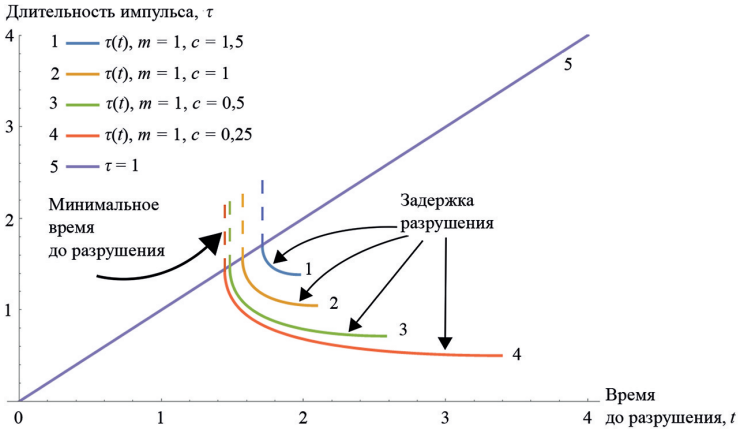


Рис. 2. График зависимости $\tau(t^*)$ для разных значений жесткости пружины

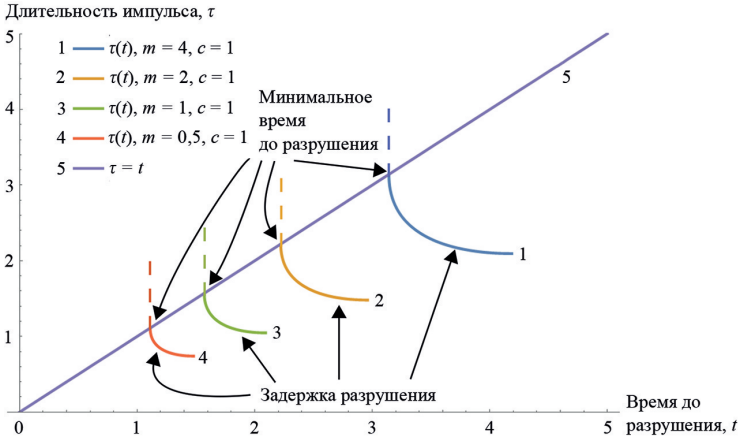


Рис. 3. График зависимости $\tau(t^*)$ для разных значений массы

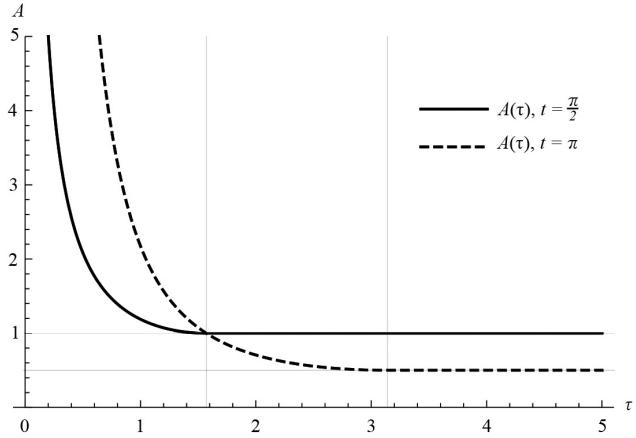


Рис. 4. График зависимости $A(\tau)$ для двух разных значений моментов разрушения

2. Анализ цепочки осцилляторов

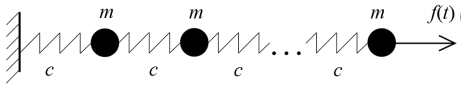


Рис. 5. N последовательно соединенных осцилляторов. К крайнему правому прикладывается сила $f(t)$

Перейдем к решению аналогичной задачи для цепочки осцилляторов. Массы грузов равны 1 кг, жесткости пружин считаем равными 1 Н/м. Система дифференциальных уравнений деформаций цепочки, в которой N звеньев, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + q_1 - q_2 = 0, \\ \ddot{q}_2 - q_1 + 2q_2 - q_3 = 0, \\ \dots \\ \ddot{q}_j - q_{j-1} + 2q_j - q_{j+1} = 0, \\ \dots \\ \ddot{q}_N - q_{N-1} + 2q_N = f(t), \\ q_j(0) = 0, \forall j = 1 \dots N, \\ \dot{q}_j(0) = 0, \forall j = 1 \dots N, \end{cases} \tag{9}$$

где $f(t) = A\left(H(t) - H(t-\tau)\right)$ — импульсное растяжение, $q_1 = x_1$, $q_j = x_j - x_{j-1} \forall j = 2 \ldots N$ — деформации, выраженные через перемещения узлов.

Задача о разрушении цепочки осцилляторов рассматривалась в статье [5]. Здесь решается аналогичная задача, но с нулевыми начальными условиями и под воздействием импульсного нагружения.

Для решения системы (9) будет использован метод Дюамеля. Для этого сначала нужно сделать две замены:

1) перенести неоднородность $f(t)$ в последнее начальное условие, т. е. $\dot{s}(\theta) = f(\theta)$;

2) заменить t на $\hat{t} = t - \theta$.

В результате получим однородную систему с одним ненулевым начальным условием. Общее решение представляется в виде сумм синусов и косинусов с некоторыми постоянными. Но так как в начальный момент времени все деформации равны нулю, то решение запишется в виде рядов только из синусов:

$$\hat{s}(\hat{t}) = \sum_{j=1}^{N} C_j R_j \sin(\omega_j \hat{t}), \tag{10}$$

где ω_j — собственные частоты колебаний, для которых справедливо: $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$, λ_j — собственные числа матрицы жесткости; R_j — собственные вектора матрицы жесткости; C_j — константы, которые можно найти из начальных условий.

Сначала найдем собственные числа матрицы жесткости. Для этого необходимо решить следующее уравнение:

$$det(A - \lambda E) = det \begin{pmatrix} \alpha - 1 & -1 & & & & \\ -1 & \alpha & -1 & & & \\ & -1 & \alpha & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -1 & \alpha & -1 \\ & & & & -1 & \alpha \end{pmatrix} = 0, \tag{11}$$

где $\alpha = 2 - \lambda$. Обозначим определитель этой матрицы как D_N. Для D_N справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$D_N = \alpha D_{N-1} - D_{N-2}. \tag{12}$$

Заметим, что в двумерном случае при разложении определителя по полученному соотношению определители $D_1 = \alpha - 1, D_0 = 1$. Выполним следующую замену: $\alpha = 2\cos(\theta)$. Решение уравнения (12) получится следующим:

$$D_N = c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{-i\theta}. \tag{13}$$

Для нахождения констант воспользуемся выражениями для найденных ранее D_1 и D_0. После нахождения констант, подстановки их в решение (13) и нескольких преобразований, а также приравнивания определителя нулю получаем следующее:

$$2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right) = 0. \tag{14}$$

Это уравнение имеет два вида корней: $\theta_1 = 2\pi k, \theta_2 = \frac{(2k+1)\pi}{2N+1}$. Первый корень нам не подходит, так как матрица жесткости невырожденная. Второй корень после перехода к первоначальной переменной дает следующее выражение для собственных чисел:

$$\omega_k = \sqrt{\lambda_k} = 2\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4N+2}\right). \tag{15}$$

Для определения компонент собственных векторов преобразуем выражение $AR^{(j)} = \lambda_j R^{(j)}, \forall j = 1 \ldots N$ и запишем в виде системы

$$\begin{cases} (1-\lambda_j)r_1^{(j)} - r_2^{(j)} = 0, \\ -r_1^{(j)} + (2-\lambda_j)r_2^{(j)} - r_3^{(j)} = 0, \\ \ldots \\ -r_{N-2}^{(j)} + (2-\lambda_j)r_{N-1}^{(j)} - r_N^{(j)} = 0, \\ -r_{N-1}^{(j)} + (2-\lambda_j)r_N^{(j)} = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Положим значение $r_1^{(j)} = 1, \forall j = 1 \ldots N$. Если дополнительно ввести элемент $r_0^{(j)} = 1$, то для компонент собственных векторов справедливо рекуррентное соотношение

$$r_i^{(j)} = (2-\lambda_j)r_{i-1}^{(j)} - r_{i-2}^{(j)}, \forall j = 1 \ldots N,\ i = 2 \ldots N. \tag{17}$$

Если сделать замену: $x_j = \frac{2-\lambda_j}{2}$, то полученная формула будет совпадать с рекуррентным соотношением для многочленов Чебышева:

$$P_i(y) = 2yP_{i-1}(y) - P_{i-2}(y). \tag{18}$$

Для того чтобы все компоненты собственных векторов определялись точно, будем использовать многочлены Чебышева второго рода. Нетрудно заметить, что для компонент собственных частот будет справедливо следующее соотношение:

$$r_i^{(j)}(x_j) = P_{i-1}(x_j) - P_{i-2}(x_j), \forall i, j = 1 \ldots N. \tag{19}$$

Подставляя в формулу (19) тригонометрическую форму записи многочлена Чебышева второго рода и проводя обратную замену, получим окончательную формулу для компонент собственных векторов:

$$r_i^{(j)} = \frac{\cos(\frac{\pi(2i-1)(2j-1)}{4N+2})}{\cos(\frac{\pi(2j-1)}{4N+2})}. \tag{20}$$

Теперь найдем константы C_j из начальных условий. Учитывая полученное соотношение для собственных векторов (19), начальное условие для $\hat{s}(\hat{t})$ и формулу (10), получим в матричном виде следующую систему:

$$\begin{pmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) & \cdots & P_0(x_N) \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) - P_0(x_2) & & P_1(x_N) - P_0(x_N) \\ \vdots & \ddots & & \\ P_{N-1}(x_1) - P_{N-2}(x_1) & & & P_{N-1}(x_N) - P_{N-2}(x_N) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \\ \vdots \\ \hat{C}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix},$$

где $\hat{C}_j = C_j\omega_j$. Для упрощения данной записи последовательно прибавим к каждой строке, начиная со второй, предыдущую. Затем выпишем многочлены явно и произведем еще несколько элементарных

преобразований, в результате получим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \\ \hat{C}_3 \\ \vdots \\ \hat{C}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(t)}{2^{N-1}} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Левая матрица полученной системы является матрицей Вандермонда, для которой известно выражение для определителя:

$$det(V) = \prod_{1 \le j < i \le N} (x_i - x_j).$$

Константы будем искать по формуле Крамера: $\hat{C}_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, где Δ — определитель Вандермонда левой матрицы из системы (21), Δ_j — определитель матрицы, в котором столбец с номером j заменен на правую часть системы (21). В результате преобразований получим окончательную формулу для констант:

$$\hat{C}_j = \frac{f(t)}{2^{N-1}(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_N)}. \tag{22}$$

Далее введем следующее обозначение: $M_N(x) = 2^N \prod_{k=1}^{N}(x - x_k)$. Формула (22) приобретет следующий вид:

$$\hat{C}_j = \frac{2f(t)}{M'_N(x_j)}. \tag{23}$$

Теперь рассмотрим следующую функцию:

$$g(x) = \frac{\cos(\frac{2N+1}{2}\arccos(x))}{\cos(\frac{\arccos(x)}{2})}.$$

Введенные ранее x_j являются корнями новой функции, при этом знаменатель в нуль обращаться не будет. Легко убедиться, что $g(x)$

будет выражаться через многочлены Чебышева:

$$g(x) = \frac{\cos(\frac{2N+1}{2}\arccos(x))\sin(\frac{\arccos(x)}{2})}{\cos(\frac{\arccos(x)}{2})\sin(\frac{\arccos(x)}{2}} =$$
$$= \frac{\sin((N+1)\arccos(x)) - \sin(N\arccos(x))}{\sin(\arccos(x))} = P_N(x) - P_{N-1}(x).$$

Старший коэффициент у разницы этих многочленов равен 2^N, как и у $M_N(x)$. Поэтому можно утверждать, что $M_N(x) = g(x)$. Также можно вычислить производную от $M_N(x)$:

$$M'_N(x_j) = \frac{(-1)^{j+1}(2N+1)}{2\sin(\frac{\pi(2j-1)}{2N+1})\cos(\frac{\pi(2j-1)}{4N+2})}. \tag{24}$$

Подставив полученное выражение в формулу (23) и разделив на ω_j, получим формулу для констант:

$$C_j = \frac{(-1)^{j+1}4\cos^2(\frac{\pi(2j-1)}{4N+2})f(t)}{2N+1}. \tag{25}$$

Для получения полного решения нам осталось перейти к первоначальным переменным. Чтобы это сделать, необходимо проинтегрировать (10). Отдельно рассмотрим временной интервал $t \leq \tau$:

$$q(t) = A\sum_{j=1}^{N} C_j R_j \int_0^t \sin(\omega_j(t-s))ds \; = \; A\sum_{j=1}^{N} \frac{C_j R_j}{\omega_j}(1-\cos(\omega_j t)), \tag{26}$$

и $t > \tau$:

$$q(t) \; = \; A\sum_{j=1}^{N} C_j R_j \int_0^\tau \sin(\omega_j(t-s))ds =$$
$$A\sum_{j=1}^{N} \frac{C_j R_j}{\omega_j}(\cos(\omega_j(t-\tau)) - \cos(\omega_j t)). \tag{27}$$

Уравнения (26) и (27) описывают полное решение системы (9).

3. Решение задачи с континуальной моделью и сравнение результатов с дискретной моделью

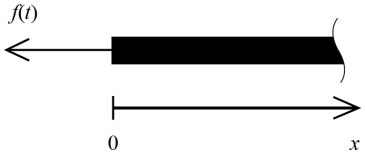


Рис. 6. Полубесконечный стержень с приложенной к нему слева силой $f(t)$

Для сравнения с ранее рассмотренной дискретной задачей с конечным числом узлов необходимо решить континуальную задачу о продольных колебаниях стержня под действием импульсного растяжения $f(t)$. На данном этапе будет рассмотрено только прямое прохождение волны через стержень и цепочку осцилляторов (без отражений от закрепленного конца). Для данных условий корректно решать задачу методом Даламбера.

Система уравнения и начально-краевых условий в деформациях задается следующим образом:

$$\begin{cases} \epsilon_{tt}(x,t) - a^2\epsilon_{xx}(x,t) = 0, \\ \epsilon(t=0) = 0, \\ \epsilon_t(t=0) = 0, \\ \epsilon(x=0) = \frac{A}{SE}(H(t) - H(t-\tau)). \end{cases} \tag{28}$$

Решение для такой системы будет представляться в виде краевого условия, сдвинутого на $\frac{x}{a}$:

$$\epsilon(x,t) = \frac{A}{SE}\left(H\left(t - \frac{x}{a}\right) - H\left(t - \left(\tau + \frac{x}{a}\right)\right)\right). \tag{29}$$

Имея готовые решения для дискретной и континуальной моделей, сравним полученные деформации в точках приложения силы у обеих моделей. Для правильного сравнения необходимо рассматривать модельный материал с $E = 1$ Па и $S = 1$ м^2. Дискретную модель возьмем с количеством узлов $N = 100$. Импульсное нагружение на

обе модели одинаковое: амплитуда равна 1 Н, длительность действия — 10 сек. График зависимостей деформаций двух моделей от времени представлен на рис. 7.

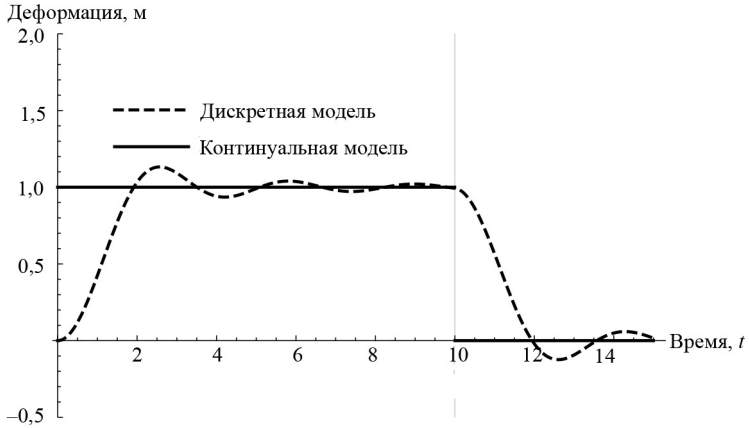


Рис. 7. График зависимостей деформации от времени для дискретной и континуальной моделей

Как видно из графика, в дискретной модели наблюдается искажение импульса, приложенного к концу цепочки, в то время как в континуальном стержне волна не искажается. Данные искажения сигнала, наблюдаемые в дискретной системе, могут приводить к разрушению за счет превышения деформаций в звеньях. В континуальной модели сигнал не искажается, и разрушение невозможно.

4. Заключение

К проблеме описания материала с дискретной точки зрения уже обращались ранее в [2–5], но в большинстве случаев рассматривалась модель цепочки с бесконечным числом звеньев. При этом при рассмотрении конечных цепочек в [4] вопросы разрушения не затрагивались.

Было получено решение задачи колебания одного осциллятора под действием импульсного растяжения. На основании этого решения были получены и исследованы зависимости длительности им-

пульса от времени до разрушения и амплитуды импульса от длительности его действия. Главным результатом анализа стало получение эффекта задержки разрушения, который наблюдался и в экспериментах при импульсном нагружении.

Один из основных результатов работы — решение задачи о колебаниях цепочки с произвольным количеством звеньев. Сначала были найдены собственные числа матрицы жесткости через полученное рекуррентное соотношение для определителя матрицы. Потом была получена формула для собственных векторов матрицы жесткости с использованием многочленов Чебышева второго рода. Далее, используя начальные условия и полученное рекуррентное соотношение для собственных векторов, мы нашли константы, после чего, имея все необходимые данные, получили полное решение системы с помощью метода Дюамеля.

Завершающим этапом стало сравнение поведения цепочки осцилляторов под действием импульсного растяжения с его континуальным аналогом — стержнем. Результатом сравнения стало выявление искажения сигнала у дискретной модели — эффекта, который не наблюдается в континуальной модели.

Авторы благодарят РФФИ за поддержку (грант 19-31-60037).

Литература

1. *Kalthoff J. F., Shockey D. A.* Instability of cracks under impulse loads // J. Appl. Phys. 1977. Vol. 48, no. 3. P. 986–993.
2. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
3. *Слепян Л. И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 296 с.
4. *Трубецков Д. И., Рожнёв А. Г.* Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. 465 с.
5. *Петров Ю. В., Груздков А. А., Казаринов Н. А.* Особенности динамического разрушения одномерных линейных цепочек // ДАН. 2008. Т. 423. № 1. С. 51–55.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЦЕПНОЙ ЛИНИИ

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

В статье обсуждаются основные геометрические и механические свойства одной из самых известных в механике линий — цепной линии, которая уже на протяжении тысячелетий реализуется в быту и технике в виде нитей, веревок, тросов, канатов и т. д. Появление новых материалов позволило существенно повысить прочность этих гибких силовых элементов, благодаря чему они все чаще используются в самых различных областях техники, технологии и строительства. Естественно возникает вопрос о наилучшем использовании длинномерных гибких силовых элементов в практических конструкциях. Именно решению этого вопроса и посвящена настоящая работа, в которой ставится и решается ряд задач о наилучшем подвешивании тяжелой гибкой нити (имитирующей кабель линии электропередач — ЛЭП). Большое внимание при этом уделяется построению и выбору критерия качества такого подвешивания. Полученные в работе результаты могут представлять практический интерес для разработчиков и строителей ЛЭП, а также и для студентов технических вузов и университетов.

1. Введение

История цепной линии насчитывает более трех столетий (постановка задачи о форме цепной линии в пустоте была дана Я. Бернулли в 1690 г., а ее решение получено в следующем году Лейбницем, Гюйгенсом и И. Бернулли), и со временем она стала одной из самых знаменитых кривых математики и механики [1, 2]. Это связано с ее наглядностью, простотой математического описания и множеством возможностей для практического применения [3, 4]. Широко используется теория цепной линии и в учебном процессе как пример кривой, обладающей наинизшим положением ее центра тяжести из всех кривых равной длины, соединяющих две заданные точки [5–7]. Однако наиболее обширные сферы практического использования цепной линии открылись лишь в XX в., когда она стала основным элементом многочисленных линий электропередач (ЛЭП, рис. 1), тросовых мостовых конструкций, а также

Доклад на семинаре 11 февраля 2020 г.

Рис. 1. Линия электропередач

подъемно-транспортной техники [8]. Чрезвычайно важную роль играет цепная линия как основной несущий элемент в конструкциях канатных дорог в горной местности и на курортах [9]. Здесь возникают и вопросы оптимизации, связанные с ограничением угла ее наклона к горизонту, с возможностями использования спаренных линий для повышения их надежности и с применением распределенных демпферов для гашения ветровых колебаний. Начало XXI в. откроет еще более грандиозные области применения цепной линии как элемента конструкций самых разнообразных орбитальных и космических комплексов и сооружений [10]. Только тросовые гибкие элементы позволят строить и эксплуатировать на околоземных орбитах сверхкрупные стартовые и производственные комплексы, обладающие минимальной массой при километровых габаритах [11, 12]. Для развертывания и монтажа таких комплексов необходимо будет использовать своеобразные сетчатые конструкции, работающие в условиях микрогравитации и высоких температурных перегрузок [13]. Все это также поставит широкий круг задач по статике и динамике цепных линий и их оптимизации по самым различным критериям, важных для практических приложений [14, 15].

2. Постановка задачи

В качестве примера рационального использования цепной линии рассмотрим задачу оптимизации натяжения гибкой нити (имитирующей провод ЛЭП) между двумя точками A и B (рис. 2), представ-

ляющими собой опоры пролета ЛЭП [16]. Известно, что в тех случаях, когда длина пролета достигает нескольких километров (это имеет место при переходе ЛЭП через большие реки Сибири), сила натяжения несущего троса нередко приближается к предельно допустимой, и проблемы ее минимизации приобретают важный практический смысл. Ясно, что, изменяя длину l троса AB, можно изменять стрелку его провисания f в середине пролета, а тем самым изменять и силу натяжения $T_{A,B}$ вблизи опорных точек A и B (где она принимает, как нетрудно показать, свое наибольшее значение) [17]. Очевидно, что при увеличении f растет общая длина, а значит, и вес нити AB, и это вызывает соответствующий рост силы T_A. При уменьшении f ниже некоторого предела также будет наблюдаться неограниченный рост T_A, т. к. только так «почти горизонтальная» сила T_A может компенсировать вертикальную силу веса троса AB. Из этих рассуждений можно заключить, что существует некоторое оптимальное значение стрелки f_*, обеспечивающее наименьшее значение силы T_*.

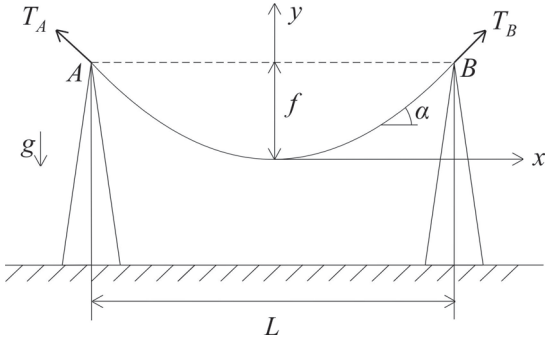


Рис. 2. Цепная линия

Цель настоящей работы состоит в выявлении некоторых оптимизационных свойств цепной линии, связанных с ее практическим использованием как несущего элемента в строительной механике.

3. Построение и анализ математической модели

Помещая начало координат неподвижного базиса Oxy в вершину цепной линии и отсчитывая от нее длину дуги s, запишем векторное уравнение равновесия тяжелой гибкой нити под действием распределенной статической нагрузки в виде [18]:

$$\frac{d\underline{T}}{ds} + \underline{P} = 0. \tag{1}$$

Проектируя его на неподвижные оси x и y, найдем отсюда

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + P_x = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + P_y = 0, \tag{2}$$

где учитывается, что угол наклона оси нити к горизонтальной оси Ox есть α, причем

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}. \tag{3}$$

Заменяя в уравнениях (2) производные по s производными по x, придем к системе

$$\frac{d}{dx}\frac{T}{\sqrt{1+y'^2}} + P_x\sqrt{1+y'^2} = 0, \quad \frac{d}{dx}\frac{Ty'}{\sqrt{1+y'^2}} + P_y\sqrt{1+y'^2} = 0. \tag{4}$$

Чтобы получить классическую цепную линию, следует положить в системе (4)

$$P_x = 0, \quad P_y = -g\gamma\delta = -q, \tag{5}$$

где δ — площадь сечения нити, а γ — плотность ее материала. Тогда из первого уравнения (4) получаем интеграл:

$$\frac{T}{\sqrt{1+y'^2}} = H = \text{const}, \tag{6}$$

где H — горизонтальная составляющая силы T (совпадающая со значением T в вершине цепной линии). Второе уравнение (4) тогда преобразуется к виду

$$Hy'' = q\sqrt{1+y'^2}, \tag{7}$$

откуда после интегрирования находим

$$y + C_2 = d \operatorname{ch} \frac{x + C_1}{d}, \quad d = \frac{H}{q}, \tag{8}$$

где константы интегрирования C_1 и C_2 ищутся из граничных условий. Полагая, что $y = 0$ и $y' = 0$ при $x = 0$, найдем $C_1 = 0$, $C_2 = d$, после чего искомое уравнение цепной линии примет свой стандартный вид [19, 20]:

$$y = d \left(\operatorname{ch} \frac{x}{d} - 1 \right). \tag{9}$$

Входящий сюда параметр d определяет стрелу провисания нити f. Так, для равновысоких опор, расположенных на расстоянии L друг от друга, очевидно, имеем (полагая, что $y = f$ при $x = \pm L/2$)

$$f = d \left(\operatorname{ch} \frac{L}{2d} - 1 \right) = \frac{H}{q} \left(\operatorname{ch} \frac{qL}{2H} - 1 \right) = \frac{L}{2z} (\operatorname{ch} z - 1), \quad z = \frac{qL}{2H}, \tag{10}$$

где z — безразмерная величина, которую удобно рассматривать как параметр семейства цепных линий различной длины, соединяющих точки A и B.

Как уже говорилось выше, при изменении f от 0 до ∞ (т. е. при изменении z от 0 до ∞) сила натяжения T_A меняется немонотонно, достигая своего наименьшего значения при некотором f_*. Чтобы найти этот оптимум, выразим, согласно (3) и (6),

$$T = \frac{H}{\cos \alpha}. \tag{11}$$

Из очевидных соотношений

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \operatorname{sh} \frac{x}{d}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{d}} \tag{12}$$

находим силу натяжения на опоре [21]:

$$T_A = H \operatorname{ch} \frac{L}{2d} = H \operatorname{ch} \frac{qL}{2H} = \frac{qL}{2z} \operatorname{ch} z. \tag{13}$$

Записывая производную

$$\frac{dT_A}{dz} = \frac{qL}{2} \frac{z \operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z}{z^2} = 0, \tag{14}$$

приходим к трансцендентному уравнению относительно оптимального значения z_*:

$$\operatorname{cth} z_* = z_*. \tag{15}$$

Единственный вещественный корень этого уравнения есть $z_* \approx 1,2$, и он определяет согласно (10) оптимальное значение стрелки провисания цепной линии:

$$\frac{f_*}{L} = \frac{1}{2z_*}(\operatorname{ch} z_* - 1) \approx 0,344. \tag{16}$$

Видно, что стрелка f оказывается довольно большой, что, естественно, приводит к заметному превышению длины нити AB над длиной пролета L [22]:

$$l = \int\limits_A^B ds = \int\limits_{-L/2}^{L/2} \sqrt{1+y'^2}dx = 2d \operatorname{sh}\frac{L}{2d} = \frac{2H}{q}\operatorname{sh}\frac{qL}{2H} = L\frac{\operatorname{sh} z_*}{z_*} \approx 1,26L. \tag{17}$$

Минимальное натяжение T_* при этом оказывается равным

$$T_* = \frac{qL}{2}\frac{\operatorname{ch} z_*}{z_*} \approx 1,51\frac{qL}{2}. \tag{18}$$

Естественно, что уход от оптимального значения f_* целесообразно делать в сторону уменьшения стрелки f.

4. Двухфакторный критерий оптимизации

Следует отметить, что помимо натяжения T_A важным показателем также является и длина линии l (или, что то же самое, вес троса $P = ql$), которую также желательно минимизировать. Ясно, что увеличение первого показателя в определенных пределах приводит к уменьшению второго показателя, поскольку оба эти критерия являются функциями одной и той же переменной z. Поэтому вполне естественно проводить их минимизацию совместно, с учетом их взаимного влияния друг на друга, т. е. путем объединения в некоторую «композицию» [23], отражающую их функциональное

поведение. Конкретная структура такой композиции может иметь различный вид.

Важно подчеркнуть, что простейшими классами алгебраических композиций частных критериев J_i являются аддитивные композиции (представляющие линейную свертку критериев $J = \sum \lambda_i J_i$ с некоторыми весовыми коэффициентами λ_i) и мультипликативные композиции (которые можно представить в виде произведения $J = \prod J_i$) [24]. Класс аддитивных критериев нашел довольно широкое применение в теории автоматического управления, несмотря на свой существенный недостаток — необходимость подбора весовых коэффициентов, который особенно затруднен в том случае, когда частные критерии J_i имеют различную размерность (как это имеет место в рассматриваемой задаче). Этого недостатка лишены мультипликативные критерии, позволяющие более просто получить результирующий критерий. Следует отметить, что подобные критерии используются при расчете коэффициентов полезного действия различных подвижных объектов, а также они нашли применение в задачах динамического программирования [25]. Кроме того, в последнее время в качестве таких критериев выступают энерго-временные критерии в различных задачах как земной, так и небесной механики [26].

Все вышесказанное говорит о целесообразности построения мультипликативного двухфакторного критерия качества вида

$$J = T_A l = \frac{qL^2}{2} \frac{\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z}{z^2}. \tag{19}$$

Из (19) видно, что как при $z \to 0$, так и при $z \to \infty$ имеем $J \to \infty$. Следовательно, J имеет точку минимума в диапазоне $0 < z < \infty$. Для ее определения следует продифференцировать J по z и приравнять производную к нулю, в результате чего получим уравнение

$$\operatorname{th} 2z_{**} = z_{**}, \tag{20}$$

единственный вещественный корень которого есть $z_{**} \approx 0,96$. Нетрудно определить для этого значения и все прочие параметры. Так, относительная стрелка прогиба в этом случае будет

$$\frac{f_{**}}{L} = \frac{1}{2z_{**}}(\operatorname{ch} z_{**} - 1) \approx 0,258, \tag{21}$$

и, разумеется, она заметно меньше, чем значение (16). Длина троса при этом будет

$$l_{**} = L\frac{\operatorname{sh} z_{**}}{z_{**}} \approx 1,16L, \tag{22}$$

и это значение также меньше, чем (17). Однако натяжение оказывается несколько больше, чем (18)

$$T_{**} = \frac{qL}{2}\frac{\operatorname{ch} z_{**}}{z_{**}} \approx 1,56\frac{qL}{2}. \tag{23}$$

Таким образом, посредством использования двухфакторного критерия можно снизить длину троса на $7,9\,\%$, при этом увеличив максимальное натяжение всего на $3,3\,\%$. Стрелка прогиба при этом уменьшается на $25\,\%$, что очень важно для проектировщиков ЛЭП.

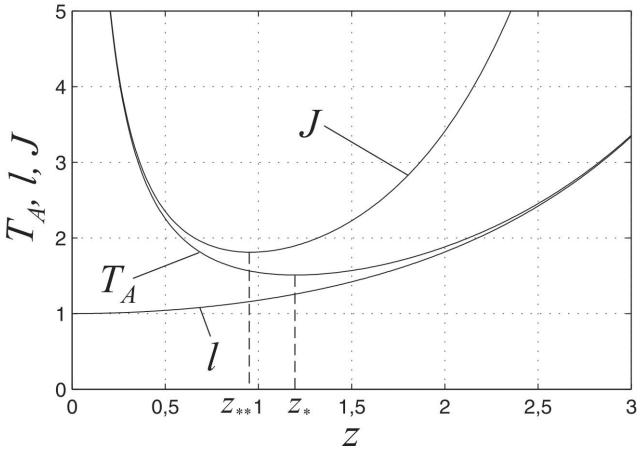


Рис. 3. Двухфакторный критерий

На рис. 3 представлены графики зависимости величин T_A, l и J от параметра z, где отчетливо видно расположение точек z_* и z_{**}.

5. Разновысотная цепная линия

Нетрудно обобщить рассмотренную задачу и на случай разновысотного расположения точек A и B. Помещая начало координат, как и ранее, в вершину цепной линии (полагая, что она располагается внутри пролета), имеем (рис. 4):

$$a + b = L, \quad b > a. \tag{24}$$

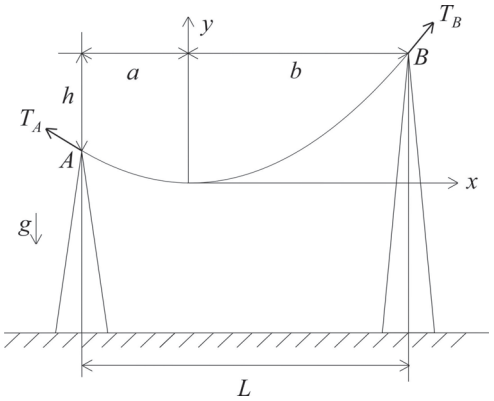


Рис. 4. Разновысотная цепная линия

Тогда сила натяжения T_B вблизи высокой опоры (где она является наибольшей) согласно (13) будет

$$T_B = H \operatorname{ch} \frac{qb}{H}, \tag{25}$$

а разность высот точек B и A согласно (9) запишется следующим образом:

$$\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qb}{H} - \operatorname{ch}\frac{qa}{H}\right) = h. \tag{26}$$

Исключая отсюда a посредством (24) и затем заменяя разность гиперболических функций произведением, преобразуем (26) к виду

$$\operatorname{sh}\frac{qL}{2H}\operatorname{sh}\left(\frac{qb}{H} - \frac{qL}{2H}\right) = \frac{qh}{2H}. \tag{27}$$

Далее, выражая из (25)

$$\operatorname{ch}\frac{qb}{H}=\frac{T_B}{H},\quad \operatorname{sh}\frac{qb}{H}=\frac{\sqrt{T_B^2-H^2}}{H} \tag{28}$$

и подставляя эти соотношения в (27), получим

$$\sqrt{T_B^2-H^2}=T_B\operatorname{th}z+\frac{qh}{2\operatorname{sh}z\operatorname{ch}z}, \tag{29}$$

где для z сохраняется прежнее обозначение (10). Отсюда приходим к квадратному уравнению для определения $T_B(z)$

$$T_B^2-qhT_B-\frac{q^2}{4}\left(\frac{h^2}{\operatorname{sh}^2 z}+\frac{L^2\operatorname{ch}^2 z}{z^2}\right)=0, \tag{30}$$

положительный корень которого есть

$$T_B=\frac{qL}{2}\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2\operatorname{cth}^2 z+\frac{\operatorname{ch}^2 z}{z^2}}\right),\quad \lambda=\frac{h}{L}. \tag{31}$$

Видно, что при $\lambda\to 0$ он переходит в ранее полученное выражение (13). Остается, как и прежде, найти минимум этой величины по аргументу z. С этой целью, дифференцируя по z выражение, стоящее под радикалом, придем к уравнению

$$\lambda=\sqrt{(z\operatorname{sh}z-\operatorname{ch}z)\left(\frac{\operatorname{sh}z}{z}\right)^3}=\sqrt{1-\frac{\operatorname{cth}z}{z}}\frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}. \tag{32}$$

Естественно, что при $\lambda\to 0$ оно переходит в уравнение (15). В настоящем же виде оно устанавливает зависимость искомого корня z_* от безразмерной разности высот λ. Эта зависимость представлена на рис. 5.

Остается убедиться в том, что вершина цепной линии при данном расположении точки оптимума действительно оказывается внутри пролета, как это предполагалось, а не слева от него. В самом деле, для пограничного случая, когда вершина линии оказывается в левой опоре, будет $y=h$ при $x=L$, поэтому согласно (9) получим

$$h=\frac{H}{q}\left(\operatorname{ch}\frac{qL}{H}-1\right), \tag{33}$$

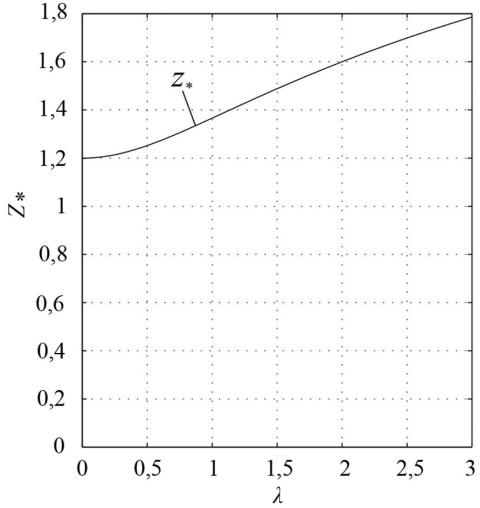


Рис. 5. Зависимость $z_*(\lambda)$

или, используя обозначения для z и λ

$$\lambda_0 = \frac{\operatorname{ch} 2z - 1}{2z} = \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}, \tag{34}$$

причем, разумеется, при $\lambda_0 \to 0$ имеем $z \to 0$. Сопоставляя соотношения (32) и (34), нетрудно убедиться, что $\lambda < \lambda_0$, что подтверждает высказанное предположение.

6. Равнопрочная цепная линия

Возвращаясь к ранее полученному результату (22), можно заметить, что даже при оптимальной стрелке провисания натяжение T_* превышает H на 81 % ($\operatorname{ch} z_* = 1,81$). Ясно, что бóльшая часть нити остается недогруженной, и возникает возможность сделать еще один шаг в сторону оптимизации, поставив требование равнопрочности подвешенной нити. Разумеется, равнопрочная цепная линия должна иметь переменное сечение, вследствие чего и геометрия ее

будет отлична от геометрии однородной линии. Тем не менее именно такая нить выявляет предельные возможности используемого материала и поэтому может представлять определенный теоретический, равно как и практический, интерес. Впервые задача о равнопрочной цепной линии была поставлена и решена Кориолисом (см. [2]).

Для получения уравнения равновесия равнопрочной цепной линии следует потребовать, чтобы растягивающие напряжения σ во всех ее сечениях были одинаковы, т. е.

$$\sigma = \frac{T}{\delta} = \text{const}. \tag{35}$$

Тогда весовая погонная нагрузка на нить будет равна

$$q = g\gamma\delta = \frac{g\gamma}{\sigma}T, \tag{36}$$

и второе уравнение (4) примет вид

$$\left(\frac{Ty'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)' = -\frac{g\gamma}{\sigma}T\sqrt{1+y'^2}. \tag{37}$$

Исключая отсюда T посредством интеграла (6), приходим к уравнению

$$y'' = -\beta\left(1+y'^2\right), \quad \beta = \frac{g\gamma}{\sigma}, \tag{38}$$

первый интеграл которого есть

$$\operatorname{arctg} y' = \beta(C_1 - x). \tag{39}$$

Помещая, как и ранее, начало отсчета в вершину искомой кривой, где $y' = 0$, найдем, что $C_1 = 0$. Тогда, интегрируя повторно уравнение (39), приходим к уравнению искомой кривой [18]:

$$y = -\frac{1}{\beta}\ln\cos\beta x. \tag{40}$$

Сила натяжения T (а вместе с ней и площадь δ поперечного сечения нити) будут изменяться, согласно (6) и (35), по закону

$$T = \frac{H}{\cos\beta x}, \quad \delta = \frac{H}{\sigma\cos\beta x} = \frac{\delta_0}{\cos\beta x}, \tag{41}$$

где $\delta_0 = H/\sigma$ — сечение нити в ее вершине. Что касается безразмерной стрелки провисания, тоЮ согласно (40), она будет равна

$$\frac{f_\sigma}{L} = -\frac{1}{\lambda} \ln \cos \frac{\lambda}{2}, \tag{42}$$

где введен безразмерный параметр $\lambda = \beta L$. Видно, что стрелка изменяется монотонно с изменением λ. При этом если задана длина пролета L, то $\beta < \pi/L$, т. е. $\sigma > g\gamma L/\pi$. Таким образом, минимально допустимое значение σ определяется величиной пролета, причем при $f \to 0$ имеем $\beta \to 0$ (т. е. $\sigma \to \infty$). Интересно выяснить, как при этом изменяется общий вес нити, равный

$$P_\sigma = \int\limits_{-L/2}^{L/2} \gamma \sqrt{1 + y'^2} dx = 2H \operatorname{tg} \frac{\beta L}{2} = 2\delta_0 \sigma \operatorname{tg} \frac{g\gamma L}{2\sigma}. \tag{43}$$

Видно, что при $\sigma \to \infty$ вес нити стремится к естественному пределу

$$P_\infty = g\gamma L \delta_0. \tag{44}$$

Полученные соотношения показывают, что у равнопрочной нити (40) нет внутренних экстремумов по каким-либо параметрам. Поэтому экономичной по весу оказывается стрелка f, отвечающая максимально допустимому напряжению σ.

Представляет интерес сравнить вес равнопрочной нити Кориолиса с весом оптимальной цепной линии, сечение которой совпадает с δ_0, а максимальное напряжение равно σ. В этом случае будем иметь

$$z_* = \frac{qL}{2H_*} = \frac{g\gamma\delta_0 L}{2H_*}, \quad H_* = \frac{T_*}{\operatorname{ch} z_*} = \frac{\sigma\delta_0}{\operatorname{ch} z_*}, \quad \frac{g\gamma L}{2\sigma} = \frac{z_*}{\operatorname{ch} z_*}, \tag{45}$$

поэтому вес равнопрочной нити P_σ и вес оптимальной цепной линии P_* определятся равенствами

$$P_\sigma = 2\delta_0 \sigma \operatorname{tg} \frac{g\gamma L}{2\sigma} = 2\delta_0 \sigma \operatorname{tg} \frac{z_*}{\operatorname{ch} z_*}, \quad P_* = 2T_* \operatorname{th} z_* = 2\delta_0 \sigma \operatorname{th} z_*. \tag{46}$$

Беря отношение этих величин, получим

$$\kappa = \frac{P_*}{P_\sigma} = \frac{\operatorname{th} z_*}{\operatorname{tg}\left(\frac{z_*}{\operatorname{ch} z_*}\right)} \approx 1,068. \tag{47}$$

Видно, что вес цепной линии превышает вес аналогичной (по параметрам δ_0 и σ) равнопрочной нити всего на 6,8 %. Аналогичное сопоставление стрелок провисания дает, согласно (16) и (42),

$$k = \frac{f_*}{f_\sigma} = \frac{1 - \operatorname{ch} z_*}{\operatorname{ch} z_* \ln \cos\left(\frac{z_*}{\operatorname{ch} z_*}\right)} \approx 1,88. \tag{48}$$

Видно, что различие в величине стрелки оказывается гораздо более значительным.

Резюмируя проведенное сопоставление, видим, что равнопрочную нить целесообразно использовать в тех ситуациях, где желательно снизить стрелку провисания, практически не изменяя при этом общего веса всей нити. Однако на этом пути возникает серьезное практическое возражение, связанное с тем, что изготовление длинномерного троса переменного сечения оказывается весьма сложной технологической проблемой. Ввиду этого целесообразно аппроксимировать геометрию равнопрочной нити некоторой кусочно-постоянной нитью, средняя часть которой будет наиболее тонкой, а боковые части — более толстыми. И здесь также возникает оптимизационная задача, связанная с нахождением длин и сечений.

7. Заключение

Проведенное исследование показывает существующие возможности оптимизации цепной линии в наиболее часто встречающихся условиях ее использования. Разумеется, в других условиях как критерии оптимизации, так и ее результаты могут оказаться заметно другими (например, при разработке и сооружении канатных дорог), однако сама идеология поиска и конструирования критериев качества, учитывающих совокупность основных факторов задачи, заслуживает серьезного внимания и скрупулезного анализа. Особенно широкие возможности в этом отношении открываются при оптимизации сетчатых и гибридных канатно-оболочечных конструкций, эксплуатируемых в водной среде, в воздушных потоках или в условиях космического пространства. Именно в этих условиях вантовые системы и конструкции могут оказаться наиболее эффективными, легкими и эстетичными.

Литература

1. *Розенбергер Ф.* История физики. М., Л.: ГТТИ, 1934. 1270 с.
2. *Смольников Б. А.* Механика в истории науки и общества. М., Ижевск: РХД, 2014. 608 с.
3. Справочник проектировщика / под ред. А. А. Уманского. М.: Госстройиздат, 1960. 1040 с.
4. *Дукельский А. И.* Подвесные канатные дороги и кабельные краны: учебник для машиностроительных втузов. М.: Машгиз, 1951. 397 с.
5. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1977. 872 с.
6. *Старжинский В. М.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1980. 464 с.
7. *Потишко А. В., Крушевская Д. П.* Справочник по инженерной графике. Киев: Будивэльник, 1983. 264 с.
8. *Идельчик В. И.* Электрические системы и сети: учебник для вузов. М.: Энергоатомиздат, 1989. 592 с.
9. *Голозов Н. В.* Цепная линия в строительных конструкциях // Техника и технологии строительства. 2015. № 1. С. 13–19.
10. *Белецкий В. В., Левин Е. М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 329 с.
11. *Волошенюк О. Л., Пироженко А. В., Храмов Д. А.* Космические тросовые системы — перспективное направление космической техники и технологии // Космическая наука и технология. 2011. Т. 17. № 2. С. 32–44.
12. *Даниленко А. В., Ёлкин К. С., Лягушина С. Ц.* Проект программы развития в России перспективной космической технологии — космических тросовых систем // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент. 2016. Т. 21. № 1 (42). С. 90–95.
13. *Смольников Б. А., Леонтьев В. А.* Элементы строительной механики орбитальных тросовых конструкций // Современное машиностроение: Наука и образование. 2013. № 3. С. 1020–1031.
14. *Щербаков В. П.* Прикладная механика нити. М.: Изд-во МГТУ, 2007. 301 с.
15. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
16. *Качурин В. К.* Гибкие нити с малыми стрелками. М.: ГИТТЛ, 1956. 224 с.
17. Прочность, устойчивость, колебания: в 3 т. Т. 1 / под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
18. *Меркин Д. Р.* Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, ГРФМЛ, 1980. 240 с.

19. *Пономарев К. К.* Составление дифференциальных уравнений. Минск: Вышэйшая школа, 1973. 560 с.

20. *Бермант А. Ф., Араманович И. Г.* Краткий курс математического анализа. СПб.: Лань, 2005. 736 с.

21. *Аппель П.* Теоретическая механика: в 2 т. Т. 1. Статика. М.: Физматгиз, 1960. 515 с.

22. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: в 2 ч. Ч. 1. М.: Физматлит, 2005. 648 с.

23. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.

24. *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Энерго-временной критерий оптимизации в задаче Гомана // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2018–2019. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2019. С. 6–20.

25. *Вентцель Е. С.* Элементы динамического программирования. М.: Наука, 1964. 176 с.

26. *Меркин Д. Р., Смольников Б. А.* Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 534 с.

ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА ЗЕМЛИ ПОСЛЕ ФИКСИРОВАНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ЕГО УСКОРЕНИЯ В АПОГЕЕ

В. В. Додонов

Данная работа посвящена рассмотрению примера реальной нелинейной неголономной связи второго порядка (фиксирование величины ускорения), наложенной на движение искусственного спутника Земли в апогее его орбиты. Такая связь понимается как программа движения, выполнение которой будет обеспечиваться обобщенной управляющей силой. В работе рассматриваются два возможных решения поставленной задачи, базирующиеся на двух теориях движения неголономных систем со связями высокого порядка, разработанных С. А. Зегждой и М. П. Юшковым.

1. Введение

При движении спутника по орбите его ускорение меняется. Рассматривается дальнейшее движение спутника в случае, если с момента нахождения спутника в апогее начинает выполняться неизменность величины его ускорения. Это требование эквивалентно наложению на движение спутника нелинейной неголономной связи второго порядка, которую можно рассматривать как программу движения.

В работе рассматриваются два возможных решения поставленной задачи управления, базирующиеся на двух теориях движения неголономных систем со связями высокого порядка, разработанных С. А. Зегждой и М. П. Юшковым [1–3]. По первой теории строится совместная система дифференциальных уравнений относительно неизвестных обобщенных координат и множителей Лагранжа. Вторая теория базируется на применении обобщенного принципа Гаусса.

Обе теории используются для нахождения траекторий движения спутника Земли системы «Космос» (который движется по почти круговой орбите) и спутников систем «Молния» и «Тундра»

Доклад на семинаре 10 марта 2020 г.

(которые движутся по высокоэллиптическим орбитам) при фиксации величины ускорения в апогее.

2. Постановка задачи

Положение спутника на орбите будем задавать полярными координатами r, φ, начало координат поместим в центре Земли.

При движении спутника его ускорение $\vec{w}$ будет меняться, причем радиальная и трансверсальная составляющие этого вращения вычисляются по формулам

$$pr_{\vec{e}_r}\,\vec{w} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$
$$pr_{\vec{e}_\varphi}\,\vec{w} = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}.$$

Поэтому если мы хотим рассматривать движение спутника с фиксированной величиной ускорения w_0, то это будет эквивалентно наложению с момента времени $t_0 = 0$ нелинейной неголономной стационарной связи второго порядка:

$$\begin{gathered} f_2(q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 - w_0^2 = 0, \\ w_0 = w(t_0). \end{gathered} \tag{1}$$

Можно сказать, что тем самым ставится некая задача управления, в которой программа движения задается в виде дифференциального уравнения (1). Применяя для решения этой задачи управления методы неголономной механики [4–6], естественно рассматривать выражение (1) как нелинейную идеальную неголономную связь второго порядка, которую можно назвать программной связью. Реакция этой связи будет искомой управляющей силой, обеспечивающей выполнение программы движения (1).

Обе теории применяются для линейных неголономных связей, поэтому нелинейную неголономную связь второго порядка (1) перепишем в виде линейной неголономной связи третьего порядка:

$$\begin{aligned} f_3(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dddot{q}) \equiv \dot{f}_2(q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\dddot{r} + r(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\dddot{\varphi} + \\ + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})(3\dot{r}\ddot{\varphi} + 2\ddot{r}\dot{\varphi}) - (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)(\dot{r}\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

3. Применение первой теории

Запишем векторное уравнение движения спутника Земли при наложении идеальной неголономной связи третьего порядка (2):

$$\begin{gathered} m\vec{w} = \vec{F} + \Lambda\vec{\nabla}'''f_3 \equiv \vec{F} + \Lambda\left(\frac{\partial f_3}{\partial\dddot{r}}\vec{e}^{\,r} + \frac{\partial f_3}{\partial\dddot{\varphi}}\vec{e}^{\,\varphi}\right), \\ \vec{F} = -\frac{m\mu}{r^2}\vec{e}^{\,r}, \qquad \vec{w} = w_r\vec{e}^{\,r} + w_\varphi\vec{e}^{\,\varphi}. \end{gathered} \tag{3}$$

Умножая (3) на векторы основного базиса $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$, получим

$$\Lambda_*(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \frac{\mu}{r^2}, \qquad \Lambda_*(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0, \qquad \Lambda_* = \frac{\Lambda}{m} - 1. \tag{4}$$

Выражая $\ddot{r}$ и $\ddot{\varphi}$ из системы (4), имеем

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 + \frac{\mu}{\Lambda_* r^2}, \tag{5}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r}. \tag{6}$$

Для того чтобы получить дополнительное дифференциальное уравнение относительно Λ_*, продифференцируем по времени первое и второе уравнения системы (4):

$$\begin{gathered} \dot{\Lambda}_*(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \Lambda_*(\dddot{r} - \dot{r}\dot{\varphi}^2 - 2r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + 2\frac{\mu}{r^3}\dot{r} = 0, \\ \dot{\Lambda}_*(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) + \Lambda_*(3\dot{r}\ddot{\varphi} + r\dddot{\varphi} + 2\ddot{r}\dot{\varphi}) = 0. \end{gathered}$$

Чтобы уничтожить третьи производные и выделить связи f_2 и f_3, домножим первое и второе полученные уравнения на коэффициенты при $\dddot{r}$ и $\dddot{\varphi}$ из (2) соответственно и сложим результаты:

$$\dot{\Lambda}_* = \frac{2\mu\dot{r}\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right)}{r^3((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2)}.$$

Используя связь (1) и первое уравнение системы (4), получим

$$\dot{\Lambda}_* = -\frac{2\mu^2}{w_0^2}\frac{\dot{r}}{\Lambda_* r^5}. \tag{7}$$

Дифференциальные уравнения (5), (6) и (7) задают систему дифференциальных уравнений, интегрирование которой дает решение поставленной задачи.

Для получения начальных данных для системы дифференциальных уравнений воспользуемся известными формулами (см. [7], e — эксцентриситет орбиты, p — фокальный параметр):

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{p\mu}}{r^2}, \qquad \dot{r} = \frac{pe\dot{\varphi}\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2},$$
$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r}, \qquad \ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{\mu}{r^2}.$$

Рассмотрим движение одного из советских спутников системы «Космос» с высотами над поверхностью Земли в перигее $H_\pi = 183$ км и в апогее $H_\alpha = 244$ км. Считаем, что радиус Земли $R_З = 6371$ км и ускорение силы тяжести на Земле $\mathrm{g}_0 = 9.82 \cdot 10^{-3}$ км/с^2. Во всех примерах в дальнейшем фиксация величины ускорения происходит в апогее, когда спутник находится на отрицательной полуоси Ox. Тогда

$$r_\pi = 6554\,\text{км}, \quad r_\alpha = 6615\,\text{км}, \qquad \mu = \mathrm{g}_0 R_З^2 = 398\,590\,\text{км}^3/\text{с}^2,$$
$$e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = 0,004632, \qquad p = r_\pi(1 + e) = 6584,36\,\text{км},$$

и начальные данные

$$r(0) = 6615,$$
$$\varphi(0) = \pi,$$
$$\dot{r}(0) = 0,$$
$$\dot{\varphi}(0) = 0,00117074,$$
$$\ddot{r}(0) = -0,0000429824,$$
$$\ddot{\varphi}(0) = 0,$$
$$\Lambda(0) = 0,$$
$$\Lambda_*(0) = -1.$$

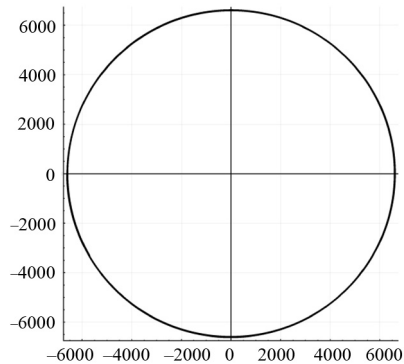


Рис. 1. Движение спутника «Космос»

На рис. 1 представлена траектория движения спутника «Космос» с постоянной величиной ускорения. На рис. 2 сверху изображен график $-\frac{\Lambda}{m}$ и снизу годограф $-\frac{\Lambda}{m}$ (сплошной кривой при первом обороте, штрихованной при втором и пунктирной в начале третьего).

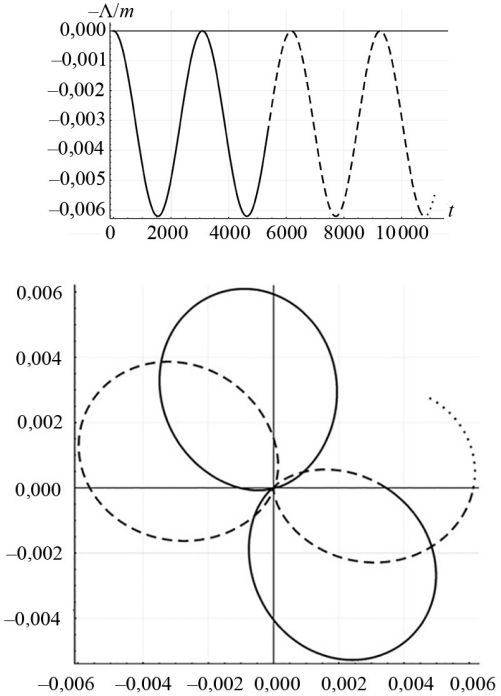


Рис. 2. График и годограф управляющей силы $-\frac{\Lambda}{m}$ для спутника «Космос»

По теории спутник на рис. 1 движется между двумя окружностями. Для наглядности на рис. 3 представлены некоторые участки движения спутника в первом квадранте (сплошной кривой обозначена траектория спутника).

Еще нагляднее будет рассмотрение движения спутников с большими эксцентриситетами орбит. Далее представлено решение для двух таких спутников — «Молния» и «Тундра».

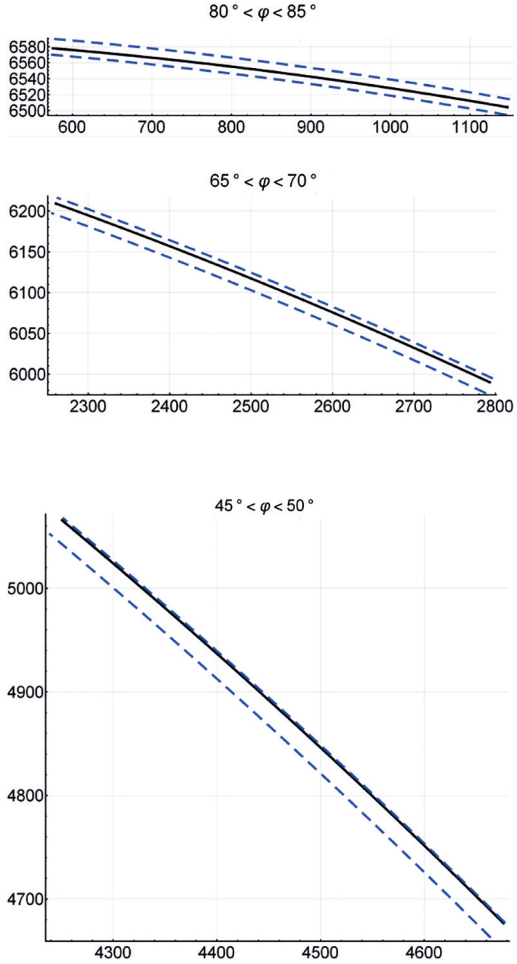


Рис. 3. Участки движения спутника «Космос» с постоянной величиной ускорения

Для спутника системы «Молния» имеем

$$r_\pi = 6871\,\text{км}, \quad r_\alpha = 46\,371\,\text{км}, \qquad \mu = \mathrm{g}_0 R_3^2 = 398\,590\,\text{км}^3/\text{с}^2,$$

$$e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = 0,741895, \qquad p = r_\pi(1+e) = 11968,6\,\text{км},$$

$$\begin{aligned}
&r(0) = 46371,\\
&\varphi(0) = \pi,\\
&\dot r(0) = 0,\\
&\dot\varphi(0) = 0,0032121,\\
&\ddot r(0) = -0,0001375,\\
&\ddot\varphi(0) = 0,\\
&\Lambda(0) = 0,\\
&\Lambda_*(0) = -1.
\end{aligned}$$

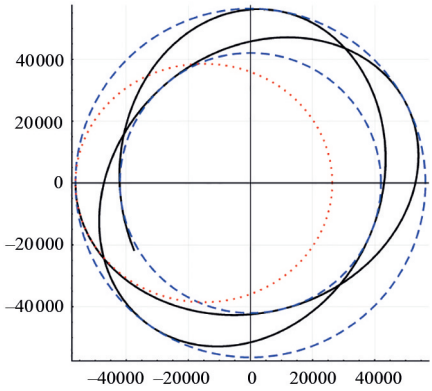
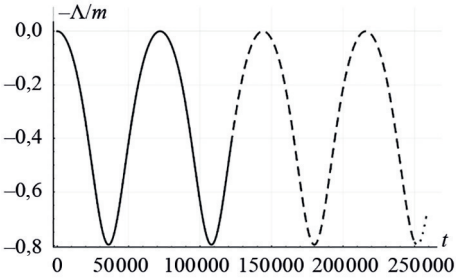


Рис. 4. Движение спутника «Молния»

На рис. 4 представлена траектория движения спутника «Молния» с постоянной величиной ускорения (пунктиром изображена траектория движения спутника до наложения связи).



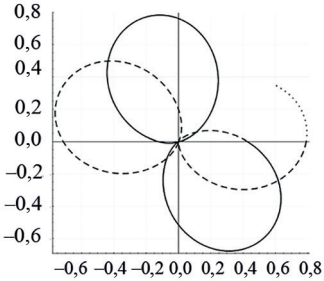


Рис. 5. График и годограф управляющей силы $-\frac{\Lambda}{m}$ для спутника «Молния»

На рис. 5 слева изображен график $-\frac{\Lambda}{m}$ и справа годограф $-\frac{\Lambda}{m}$ (сплошной кривой при первом обороте, штрихованной при втором и пунктирной в начале третьего).

Для спутника системы «Тундра»:

$$r_\pi = 26\,371\,\text{км}, \quad r_\alpha = 56\,371\,\text{км}, \quad \mu = g_0 R_3^2 = 398\,590\,\text{км}^3/\text{с}^2,$$
$$e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = 0,362573, \qquad p = r_\pi(1+e) = 35932,4\,\text{км},$$

На рис. 6 и 7 представлены полученные результаты для движения спутника «Тундра» с постоянной величиной ускорения (обозначения те же).

$$r(0) = 56\,371,$$
$$\varphi(0) = \pi,$$
$$\dot{r}(0) = 0,$$
$$\dot{\varphi}(0) = 0,00003766,$$
$$\ddot{r}(0) = -0,00004548,$$
$$\ddot{\varphi}(0) = 0,$$
$$\Lambda(0) = 0,$$
$$\Lambda_*(0) = -1.$$

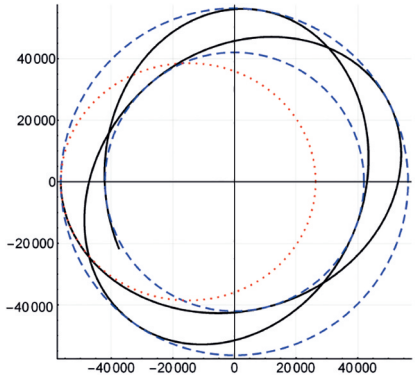


Рис. 6. Движение спутника «Тундра»

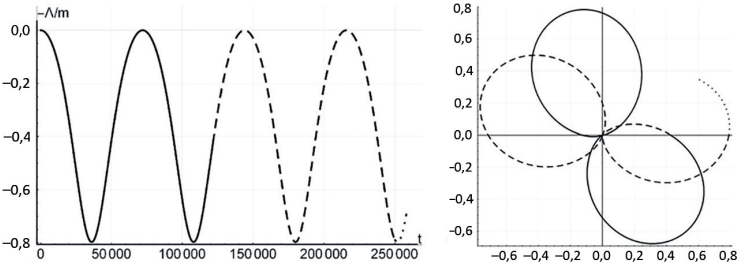


Рис. 7. График и годограф управляющей силы $-\frac{\Lambda}{m}$ для спутника «Тундра»

4. Применение второй теории

Запишем обобщенный принцип Гаусса для спутника Земли при наложении линейной неголономной связи третьего порядка (2):

$$\left(m\dot{\vec{w}} - \dot{\vec{F}}\right) \cdot \delta'''\dot{\vec{w}} = 0. \tag{8}$$

Здесь обозначение δ''' указывает, что варьируются лишь третьи производные по времени от обобщенных координат.

Перепишем принцип (8) в виде

$$\begin{aligned} (mU_\rho - P_\rho)\,\delta'''U^\rho = 0, \qquad & \rho = 1, 2, \\ \vec{U} = \dot{\vec{w}}, \qquad & \vec{P} = \dot{\vec{F}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Воспользуемся известными формулами (см. [1, 2]) для $\vec{U}$ и $\vec{P}$:

$$\begin{aligned} U_\rho &= \dot{w}_\rho - \Gamma^\tau_{\rho\sigma} w_\tau \dot{q}^\sigma, \\ P_\rho &= \dot{F}_\rho - \Gamma^\tau_{\rho\sigma} F_\tau \dot{q}^\sigma, \end{aligned} \qquad \rho, \sigma, \tau = 1, 2, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, & F_1 &= -\frac{m\mu}{r^2}, \\ w_2 &= w_\varphi = r(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}), & F_2 &= 0. \end{aligned}$$

Контравариантные компоненты $\delta'''U^1$ и $\delta'''U^2$ в нашей задаче выражаются следующим образом:

$$\delta'''U^1 = \delta'''\dddot{r}, \qquad \delta'''U^2 = \delta'''\dddot{\varphi}.$$

Согласно связи (2), вариации $\delta'''\ddot{r}$ и $\delta'''\ddot{\varphi}$ связаны соотношением

$$\delta'''\dddot{\varphi} = -\frac{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2}{r(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})}\delta'''\dddot{r}.$$

Теперь принцип (9) примет вид

$$\left(mU_1 - P_1 - \frac{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2}{r(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})}(mU_2 - P_2)\right)\delta'''\dddot{r} = 0. \tag{11}$$

Так как ненулевыми символами Кристоффеля будут только

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^1_{22} = -r,$$

то формулы (10) можно представить в виде

$$\begin{aligned} U_1 &= \dddot{r} - 3\dot{r}\dot{\varphi}^2 - 3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi}, & P_1 &= \frac{2\mu m\dot{r}}{r^3}, \\ U_2 &= 3r\ddot{r}\dot{\varphi} + 3r\dot{r}\ddot{\varphi} + r^2\dddot{\varphi} - r^2\dot{\varphi}^3, & P_2 &= -\frac{\mu m\dot{\varphi}}{r}. \end{aligned}$$

Теперь (4) можно переписать следующим образом:

$$\dddot{r} - \frac{2\mu\dot{r}}{r^3} - 3\dot{r}\dot{\varphi}^2 - 3r\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - \\ - \frac{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\left(3r\ddot{r}\dot{\varphi} + 3r\dot{r}\ddot{\varphi} + \frac{\mu\dot{\varphi}}{r} + r^2\dddot{\varphi} - r^2\dot{\varphi}^3\right)}{r\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)} = 0. \qquad (12)$$

Решая систему из уравнений (2) и (12) относительно $\dddot{r}$ и $\dddot{\varphi}$, имеем

$$\dddot{r} = \frac{\dot{r}\left(2\mu + 3r^3\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\mu\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right)\left(2\dot{r}\left(2r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right) + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\right)}{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + 4\dot{r}^2\dot{\varphi}^2 + 4r\dot{r}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}^2}}{r^3} + 3r^4\dot{\varphi}\ddot{\varphi}, \qquad (13)$$

$$\dddot{\varphi} = \frac{r^3\dot{\varphi}\left(r\dot{\varphi}^2 - 3\ddot{r}\right) - 3r^3\dot{r}\ddot{\varphi} - \frac{\mu\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right)\left(\dot{\varphi}\left(r\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right) - 4\dot{r}^2\right) - 2r\dot{r}\ddot{\varphi}\right)}{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + 4\dot{r}^2\dot{\varphi}^2 + 4r\dot{r}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}^2}}{r^4}. \qquad (14)$$

Интегрирование полученной системы дифференциальных уравнений дает решение поставленной задачи.

На рис. 8 представлены траектории движения спутников систем «Космос», «Молния» и «Тундра», вычисленные с помощью дифференциальных уравнений, полученных по второй теории. Видим, что спутник начинает оборот вокруг Земли и после некоторого изгиба траектории выходит на движение вдоль прямой.

Обсудим это явление. После закрепления величины ускорения в апогее спутник начинает двигаться в сторону притягивающего центра, и при вхождении в зону активного притяжения этого центра у него наблюдается упоминавшийся выше изгиб траектории.

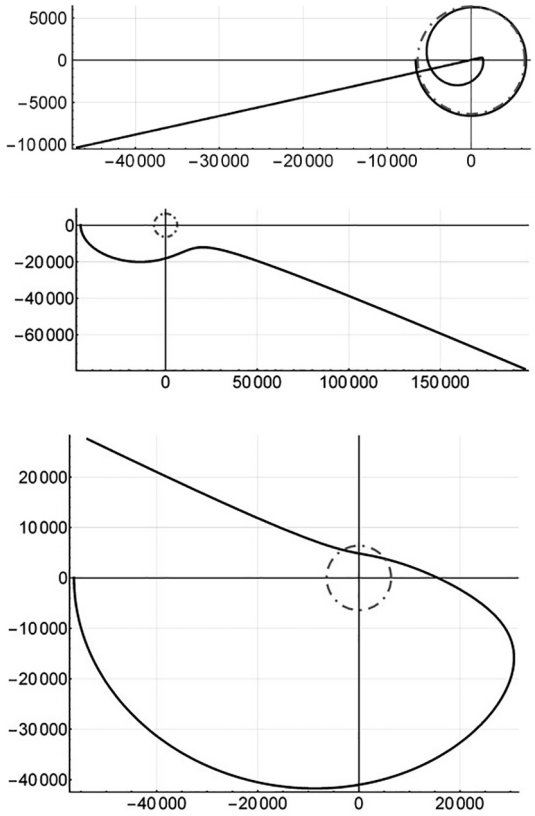


Рис. 8. Траектории движения спутников «Космос», «Молния», «Тундра»

В дальнейшем по мере удаления от притягивающего центра спутник быстро выходит на движение по прямой.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Представленные рассуждения относятся к точечному центру притяжения. Если такую же силу создает модель Земли в виде однородного шара с радиусом $R_З = 6371$ км (штрихпунктирная линия на рис. 8), то спутники «Космос» и «Тундра», согласно рисунку, встретятся с поверхностью Земли.

5. Заключение

Сравнивая траектории спутников при закреплении их ускорения в апогее, полученные по двум теориям движения неголономных систем со связями высокого порядка, видим их принципиальное различие.

С точки зрения механики неголономных систем различие полученных решений можно пояснить следующим образом. Первая теория строится на преобразованиях векторного уравнения Ньютона в случае приложения идеальных линейных неголономных связей высокого порядка. Таким уравнениям движения соответствует принцип Манжерона — Делеану, обеспечивающий минимальность модуля силы реакции связей. Во второй же теории используется обобщенный принцип Гаусса, дающий минимальность модуля соответствующей производной от вектора реакции наложенных связей высокого порядка.

Полученные результаты интересно дополнить следующими рассуждениями. Движение точки с постоянным ускорением происходит либо при равномерном вращении по окружности, либо в случае прямолинейного равноускоренного движения. Элементы первого такого движения при вращении спутника между двумя концентрическими окружностями получены с помощью первой теории, а асимптотическое стремление спутника к равноускоренному движению по прямой было получено в случае применения второй теории. Таким образом, видим, что две различные теории движения неголономных систем со связями высокого порядка в нашем примере удачно дополняют друг друга и совместно дают полное решение.

Случай фиксирования ускорения искусственного спутника Земли в перигее был рассмотрен в статье [8].

Литература

1. *Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., Zegzhda S. A.* Mechanics of nonholonomic systems. A new class of control systems. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 329 p.

2. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Физматлит, 2005. 272 с.

3. *Зегжда С. А., Юшков М. П., Солтаханов Ш. Х., Шатров Е. А.* Неголономная механика и теория управления. М.: Физматлит, 2018. 234 с.

4. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Доклады Академии наук СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1328–1330.

5. *Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Применение обобщенного принципа Гаусса для составления уравнений движения систем с неголономными связями третьего порядка // Вестник Ленинградского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 1990. Вып. 3, № 15. С. 77–83.

6. *Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения одной неголономной системы при наличии связи второго порядка // Вестник Ленинградского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 1991. Вып. 4, № 22. С. 26–29.

7. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. М.: Юрайт, 2015. 592 с.

8. *Dodonov V. V., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* The motion of an Earth satellite after imposition of a non-holonomic third-order constraint // AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959 (1). P. 030006-1–030006-6. http://doi/10.1063/1.5034586.

ОЦЕНКА ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ, СОПРЯЖЕННОЙ С ПЛАСТИНОЙ

Дзебисашвили Г. Т.

Рассматриваются колебания цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением, один край которой закреплен, а другой сопряжен с пластиной. Методом конечных элементов исследуется связь частот колебаний оболочки данного типа с частотами оболочки без пластины. Анализируется влияние толщины пластины на частоты колебаний.

1. Введение

Ранее в работах [1–4] было получено решение задачи о колебаниях для цилиндрической оболочки квадратного и прямоугольного поперечного сечения при граничных условиях, равносильных сопряжению с пластиной, толщина которой значительно отличается от толщины оболочки. В работе [1] для прямоугольного сечения было получено решение в виде асимптотических разложений. В работе [2] для квадратного сечения используется приближенное аналитическое решение уравнения Лагранжа — Жермен. В [3] описано получение приближенных вариационных формул для частоты оболочки с прямоугольным сечением. Для шарнирно опертой оболочки квадратного сечения имеется явная формула для частот [4].

Для оболочки, сопряженной с пластиной той же толщины, что и оболочка, целесообразным является нахождение частот колебаний методом конечных элементов. По результатам численных экспериментов получены геометрические критерии нахождения частоты оболочки, сопряженной с пластиной равной толщины, в диапазоне частот, соответствующих граничным условиям без сопряжения с

Доклад на семинаре 5 мая 2020 г.

пластиной. Выявлена связь частот колебаний оболочки с пластиной различной толщины с частотами оболочки без пластины.

2. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку с прямоугольным поперечным сечением, нижний край которой заделан, а верхний сопряжен с пластиной толщиной t_c. Размеры сечения равны a и b, длина оболочки равна c (рис. 1).

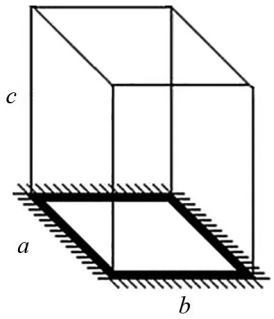


Рис. 1. Оболочка, сопряженная с пластиной

Первую частоту колебаний такой оболочки можно найти методом конечных элементов.

Далее параметр $f = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho t}{D}}$, где ω — собственная частота оболочки, ρ — плотность, t — толщина, $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ — изгибная жесткость, будем называть частотой.

3. Сопряжение с пластиной равной толщины

Пусть пластина имеет ту же толщину, что и оболочка. Частоты при разных размерах приведены в табл. 1.

В большинстве случаев имеет место частотное неравенство

$$f_{simple} < f_{cover} < f_{fixed}, \tag{1}$$

где f_{simple} — частота оболочки в случае «заделка — шарнир», f_{cover} — частота оболочки с пластиной, f_{fixed} — частота оболочки в случае «заделка — заделка». Однако это неверно для размеров, соответствующих частотам, выделенным жирным в таблице. Для них $f_{simple} > f_{cover}$, т. е. частотное неравенство (1) не выполняется. Выясним, при каких соотношениях размеров оболочки возникает такое явление. Дополнительно проанализируем связь частоты оболочки, сопряженной с пластиной, с частотой оболочки, шарнирно опертой на обоих краях («шарнир — шарнир»), и частотой шарнирно опертой оболочки с пластиной («шарнир — пластина»).

Таблица 1. **Частоты для случая «заделка — пластина» при разных размерах, полученные по методу конечных элементов**

$c = 2$				
$a \backslash b$	1	2	3	4
2	1,129	1,037	**0,722**	**0,617**
3	0,877	**0,722**	**0,482**	**0,382**
4	0,795	**0,617**	**0,382**	**0,280**
$c = 3$				
$a \backslash b$	1	2	3	4
2	0,787	0,666	0,492	0,402
3	0,517	0,492	0,461	**0,351**
4	0,426	0,402	**0,351**	**0,268**
$c = 4$				
$a \backslash b$	1	2	3	4
2	0,679	0,534	0,368	0,282
3	0,397	0,368	0,333	0,274
4	0,298	0,282	0,274	0,260

Выяснение условий смены знака частотного неравенства будем проводить при разных граничных условиях и размерах оболочки с помощью численного эксперимента, цель которого — выявление связи между размерами оболочки и распределением частот при разных граничных условиях. Сущность эксперимента состоит в классификации всех возможных размеров оболочки по совокупности признаков (так называемые размерные конфигурации) и построении картины поведения частот для разных граничных условий при переходах между размерными конфигурациями.

Все возможные сочетания размеров оболочки можно классифицировать по комбинации следующих признаков:

1. Сечение является либо квадратным, либо прямоугольным.
2. Либо имеется одна пара квадратных лежащих друг напротив друга стенок, либо все стенки прямоугольные.
3. Либо $ab < M$, либо $ab = M$, либо $ab > M$.

Здесь и далее M — максимум из площадей стенок ac и bc.

Возможные размерные конфигурации S_i приведены в табл. 2.

Таблица 2. **Возможные размерные конфигурации оболочки**

S_i	Сечение	Наличие пары противолежащих квадратных стенок	Знак между ab и M
S_1	Прямоугольное	Нет	$<$
S_2		Нет	$>$
S_3		Да	$=$
S_4		Да	$<$
S_5	Квадратное	Нет	$<$
S_6		Нет	$>$
S_7		Да	$=$

Проанализируем поведение основной частоты при переходах от S_i к S_j при различных сочетаниях i и j, обозначим их как $S_{i,j}$. Будем изменять поочередно по одному из размеров оболочки, выбирая достаточно малый шаг изменения и обеспечивая переход от одной конфигурации к другой без пересечения остальных. Этому условию удовлетворяют 9 переходов, которые мы будем называть простыми: $S_{1,3}$, $S_{1,4}$, $S_{2,3}$, $S_{2,6}$, $S_{3,4}$, $S_{3,7}$, $S_{4,5}$, $S_{5,7}$, $S_{6,7}$. Связь между конфигурациями удобно представить в виде графа (рис. 2). Для рассмотрения всех простых переходов будем обходить граф по эйлеровому циклу $7-6-2-3-1-4-3-7-5-4-7$, начиная с S_7.

При расчетах было выявлено, что существенную роль играет близость формы сечения к квадратной, а также наличие двух противолежащих стенок оболочки, форма которых близка к квадратной. В качестве пробных размеров, отвечающих различным размерным конфигурациям, были выбраны размеры из табл. 3, шаг

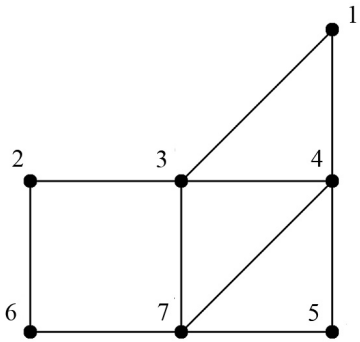


Рис. 2. Граф размерных конфигураций

изменения стороны был взят равным 0,2. При увеличении сторон с сохранением конфигурации порядковые отношения в частотном неравенстве (1) не изменялись.

Таблица 3. **Пробные размеры для различных размерных конфигураций**

S_i	Размеры
S_1	$a = 4, b = 2, c = 3$
S_2	$a = 4, b = 3, c = 2$
S_3	$a = 3, b = 2, c = 2$ ($S_{3,7}$), $a = 4, b = 3, c = 3$ ($S_{3,1}$)
S_4	$a = 3, b = 2, c = 3$
S_5	$a = 2, b = 2, c = 3$
S_6	$a = 3, b = 3, c = 2$
S_7	$a = 3, b = 3, c = 3$ ($S_{7,6}$), $a = 2, b = 2, c = 2$ ($S_{3,7}$)

На рис. 3 представлены частоты при последовательном выполнении простых переходов. По горизонтальной оси отложены номера размерных конфигураций. По вертикальной оси отложены частоты оболочки. Каждой точке соответствует частота на текущем шаге изменения размеров при переходе между размерными конфигурациями. График темно-синего цвета соответствует частотам при граничных условиях «шарнир — шарнир», красного — «шарнир — пластина», фиолетового — «заделка — пластина», зеленого — «заделка — шарнир», светло-синего — «заделка — заделка». Распре-

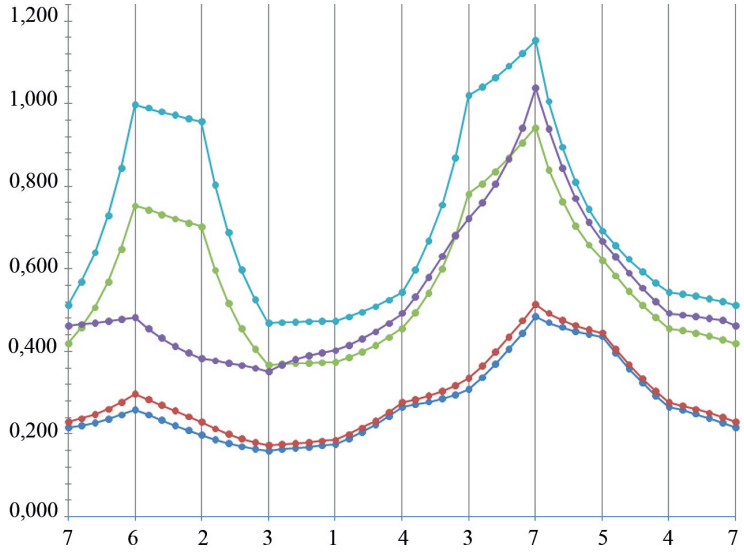


Рис. 3. Частоты при последовательном выполнении простых переходов $S_{i,j}$

деления частот при продолжении графиков вправо аналогичны представленным, так как граф обходится по циклу.

При переходе $S_{7,6}$ неравенство (1) выполняется при $\frac{ab}{M} \sim 1$ и нарушается при выраженности прямоугольной формы стенок. Для $S_{1,3}$ неравенство перестает выполняться при вырождении пары противолежащих прямоугольных стенок в квадратные. В окрестности S_3 неравенство нарушается как при значительном отклонении формы сечения от квадратной (при $S_{3,7}$), так и при $\frac{ab}{M} \sim 1$ (при $S_{3,4}$).

Последовательность переходов $\{S_i\}$, при которых обеспечивается одинаковое порядковое отношение f_{simple} и f_{cover}, будем называть промежутком знакопостоянства. Исходя из полученных результатов и учитывая выявленные свойства локальности, можно утверждать, что цикл простых переходов можно разбить на чередующиеся по знаку промежутки знакопостоянства, границами которых являются конфигурации с $ab = M$ (рис. 4). При этом в малой окрестности границ промежутков знак частотного неравенства может меняться. Для $S_{3,7}$ знакопостоянство не является выражен-

ным, что обусловлено выбором пробных размеров. Для уточнения окрестности, в которой меняется знак, были проведены дополнительные вычисления при $a = 4, b = 2, c = 2$ (S_3) и $a = 2, b = 2, c = 2$ (S_7). Установлено, что смена знака частотного неравенства происходит при близости конфигурации оболочки к S_7 (рис. 5).

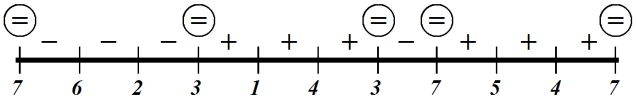


Рис. 4. Промежутки знакопостоянства размерных конфигураций. В промежутках со знаком «+» частотное неравенство выполняется, со знаком «–» — не выполняется. Знак «=» над номером размерной конфигурации обозначает выполнение в ней условия $ab = M$

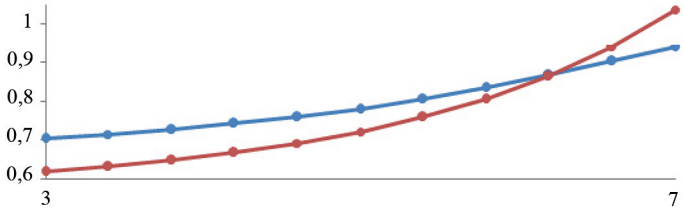


Рис. 5. Изменение частот при переходе $S_{3,7}$ (дополнительный эксперимент). Красный график соответствует частотам при граничных условиях «заделка — пластина», синий — «заделка — шарнир»

Таким образом, частотное неравенство локально не выполняется при следующих размерных конфигурациях:

1. Оболочка имеет прямоугольное сечение и одну пару противолежащих квадратных стенок, $ab = M$ (S_2).
2. Оболочка имеет прямоугольное сечение, все стенки прямоугольные и $ab > M$ (S_3).
3. Оболочка имеет квадратное сечение, все стенки прямоугольные и $ab > M$ (S_6).

Анализируя качественную картину поведения частот, можно заметить, что переходы $S_{6,7}$, $S_{2,3}$, $S_{5,7}$, $S_{3,4}$, затрагивающие только длину оболочки c, сообщают более быстрое изменение основной частоте при граничных условиях «заделка — заделка» и «заделка —

шарнир». Наименее интенсивный рост основная частота имеет при $S_{3,1}$ для всех вариантов граничных условий, кроме «заделка — пластина». Частоты при граничных условиях «шарнир — шарнир» и «шарнир — пластина» обладают минимальной разностью, при этом их порядковое отношение не зависит от размерной конфигурации оболочки.

4. Анализ частот при изменении толщины пластины

Пример расчета для размеров $a = 2, b = 3, c = 3$ представлен в табл. 4.

Таблица 4. **Частоты оболочки, сопряженной с пластиной толщиной t_c**

t_c	5t	2t	t	0,5t	0,3t	0,2t
f_1	0,542	0,531	0,492	0,444	0,315	0,213
f_2	0,572	0,565	0,536	0,500	0,460	0,330
f_3	0,789	0,784	0,766	0,526	0,491	0,456
f_c	5,548	2,219	1,110	0,555	0,333	0,222
f_{fixed}	0,543					
f_{simple}	0,455					

Здесь f_1, f_2, f_3 — первые частоты колебаний оболочки, сопряженной с пластиной, f_{fixed} — частота оболочки с заделанными краями, f_{simple} — частота оболочки с заделанным и шарнирным краями, f_c — частота пластины с заделанными краями, вычисляемая методом Рэлея по формуле (2), учитывающей разницу толщин стенок оболочки и пластины:

$$f_c = f\frac{t_c}{t} = \frac{2\pi}{3a^2b^2}\frac{t_c}{t}\sqrt{3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2}. \qquad (2)$$

При $t_c = 5t$ (толстая пластина) частота f_1 близка к частоте $f_{fixed} = 0{,}543$ колебаний оболочки с заделанным верхним краем. При $t_c = 0{,}2t$ частота f_1 мало отличается от частоты $f_c = 0{,}222$. Отметим также близость частот f_2 при $t_c = 0{,}3t$ и f_3 при $t_c = 0{,}2t$ к частоте $f_{simple} = 0{,}455$ колебаний оболочки с заделанным и шарнирным краями.

Аналогичные особенности поведения частот имеются и при других размерах оболочки. Это позволяет в случае сопряжения оболочки с толстой или тонкой пластиной находить приближенное значение первой частоты f_1 по приближенным вариационным формулам, полученным в [3], а для пластины вычислять f_c по формуле (2).

5. Заключение

Проведено сравнение частот и форм колебаний оболочки без пластины и оболочки, сопряженной с пластиной. Для оболочки, сопряженной с пластиной той же толщины, что и оболочка, целесообразным является нахождение частот колебаний методом конечных элементов. По результатам численных экспериментов получены геометрические критерии нахождения частоты оболочки, сопряженной с пластиной равной толщины, в диапазоне частот, соответствующих граничным условиям без сопряжения с пластиной. Выявлена связь между частотами колебаний оболочки с пластиной различной толщины и частотами оболочки без пластины. В частности, установлено, что для оболочки, имеющей на одном крае сопряжение с пластиной, толщина которой значительно отличается от стенок оболочки, частота может быть найдена по приближенным вариационным формулам.

Литература

1. *Амосов А. С.* Колебания тонкой цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. 2004. Вып. 1 (1). С. 67–72.

2. *Дзебисашвили Г. Т.* Колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2017–2018 гг. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2019. С. 13–29.

3. *Dzebisashvili G. T., Filippov S. B.* Vibrations of cylindrical shells with rectangular cross section. // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1479. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1479/1/012129/pdf (дата обращения: 21.08.2020).

4. *Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L.* Free vibrations of square elastic tubes with a free end // Mechanics Research Communications. 2000. Vol. 27, iss. 4. P. 457–464.

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННЫМ СЕЧЕНИЕМ

Н. В. Карачева, С. Б. Филиппов

В статье исследуются свободные колебания шарнирно опертых балок с переменным и ступенчатым поперечными сечениями. Для балки с переменным поперечным сечением сравниваются первые частоты, полученные с помощью асимптотического метода, и частоты, найденные методом прогонки. Для балки со ступенчатым сечением в явном виде получено уравнение для определения частот. Целью работы является, в частности, определение закона изменения поперечного сечения, для которого при условии сохранения массы балки первая частота имеет наибольшее значение.

1. Введение

В статье рассматриваются свободные колебания шарнирно опертых балок с поперечным переменным и ступенчатым сечениями, для которых выполняется условие сохранения объема. Целью работы является определение закона изменения поперечного сечения, для которого первая частота имеет наибольшее значение. Большое количество работ посвящено исследованиям свободных колебаний стержней и балок, для нахождения частот применяют широкий спектр численных методов, асимптотические методы [1, 2] и метод конечных элементов. В работе [3] подробно рассмотрены исследования колебаний балок, имеющих разные граничные условия, с помощью асимптотических методов. Поперечные и продольные колебания балки с прямоугольным сечением были рассмотрены в работе [4], в частности было исследовано влияние геометрических и упругих характеристик балки на частоты и формы собственных колебаний. В работе [5] вычисляется частота стержня переменного поперечного сечения с помощью метода Рэлея — Ритца. В [6] применяется асимптотический метод для исследования свободных колебаний балки с переменным поперечным прямоугольным сечением, геометрические и физические параметры балки зависят от

Доклад на семинаре 12 мая 2020 г.

продольной координаты. Особенность данной статьи состоит в исследовании балки с круглым переменным поперечным сечением, для которой взяты тригонометрическая и квадратичная функции возмущений.

2. Исследование балки с переменным сечением

Уравнение для частот и форм колебаний балки с переменным поперечным сечением (рис. 1) имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2}(EJ(x)\frac{d^2w}{dx^2}) = \rho S(x)\omega^2 w, \tag{1}$$

где $J(x) = \frac{(\pi r^4)}{4}$ — момент инерции поперечного сечения, $S(x) = \pi r^2$ — площадь поперечного сечения, E — модуль Юнга, ω — частота, $EJ(x)$ — жесткость на изгиб, ρ — плотность, E и ρ — постоянные.

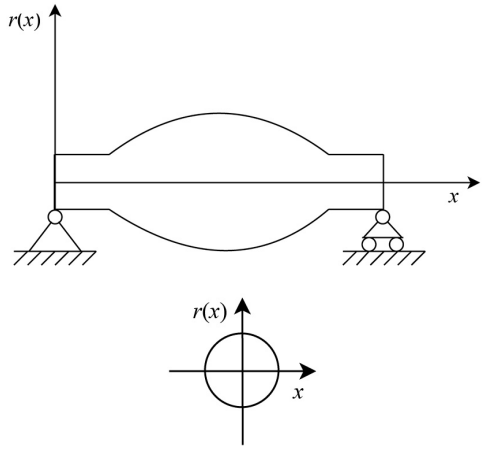


Рис. 1. Балка с переменным поперечным сечением

Граничные условия:

$$w(0) = w''(0) = 0, \quad w(l) = w''(l) = 0. \tag{2}$$

Предполагаем, что радиус изменяется по закону $r(x) = r_0(1 + \varepsilon f(x))$, где $\varepsilon \ll 1$. Тогда момент инерции и площадь поперечного сечения выражаются как

$$J(x) = \frac{\pi}{4} r_0^4 (1 + \varepsilon f)^4 = J_0 (1 + \varepsilon f)^4, \tag{3}$$

$$S(x) = \pi r_0^2 (1 + \varepsilon f)^2 = S_0 (1 + \varepsilon f)^2. \tag{4}$$

Подставляем выражения (3) и (4) в уравнение (1), отбрасываем слагаемые порядка ε^2 и выше и делим на EJ_0, тогда оно принимает вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\varepsilon \frac{d^2}{dx^2}(f \frac{d^2 w}{dx^2}) = \alpha^4 (1 + 2\varepsilon) w, \quad \alpha^4 = \frac{\rho S_0 \omega^2}{EJ_0} = \frac{4\rho\omega^2}{E r_0^2}. \tag{5}$$

В работе мы будем искать параметр α, так как частота $\omega = \frac{\sqrt{EJ_0}}{\sqrt{\rho S_0}} \alpha^2$.

3. Вычисление с помощью асимптотического метода

Ищем решения в виде

$$w = w_0 + \varepsilon w_1, \quad \alpha = \alpha_0 + \varepsilon. \tag{6}$$

Тогда в нулевом приближении при $\varepsilon = 0$ имеем краевую задачу:

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} - \alpha_0^4 w_0 = 0, \tag{7}$$

$$w_0(0) = w_0''(0) = 0, \quad w_0(l) = w_0''(l) = 0. \tag{8}$$

Решения (7), (8) имеют вид

$$w_0 = \sin(\alpha_0 x), \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{l}. \tag{9}$$

После подстановки решения (6) в (5) и отбрасывания малых слагаемых получаем

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + \varepsilon \frac{d^2}{dx^2}(f \frac{d^4 w_1}{dx^4}) + \frac{d^2}{dx^2}(f \frac{d^2 w_0}{dx^2}) = (1 + 2\varepsilon f)(\alpha_0^4 + 4\varepsilon \alpha_1 \alpha_0^3)(w_0 + \varepsilon w_1).$$

Уравнение для определения первого приближения имеет вид

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} + 4\frac{d^2}{dx^2}(f\frac{d^2 w_0}{dx^2}) = \alpha_0^4 w_1 + 4\alpha_1\alpha_0^3 w_0 + 2f\alpha_0^4 w_0. \qquad (10)$$

Умножим выражение (10) на w_0 и проинтегрируем по x от 0 до l, получаем

$$4\alpha_1\alpha_0^3 \int\limits_0^l w_0^2 dx = 4\int\limits_0^l \frac{d^2}{dx^2}(f\frac{d^2 w_0}{dx^2})w_0 dx - 2\alpha_0^4 \int\limits_0^l f w_0^2 dx. \qquad (11)$$

Теперь выбираем такое f, чтобы выполнялось условие сохранения массы, а значит, и объема:

$$m_0 = \rho S_0 l,$$

$$m = \rho l \int\limits_0^l S(x)dx = \rho S_0 l + 2\varepsilon\rho S_0 l \int\limits_0^l f(x)dx,$$

$$m_0 = m,$$

следовательно, условие сохранения объема имеет вид

$$\int\limits_0^l f(x)dx = 0.$$

Сначала вычислим выражение (11) при
$f(x) = -\cos(2\alpha_0 x) = -\cos(\frac{2\pi}{l}x)$. Для нее получаем

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0}{4}, \quad \alpha = \alpha_0(1 + \frac{\varepsilon}{4}). \qquad (12)$$

Выберем $f(x) = 2(-\frac{6x^2}{l^2} + \frac{6x}{l} - 1)$. Эта функция удовлетворяет условию сохранения объема. Кроме того, $f(0) = f(l)$ и $f(l/2) = 1$ для удобства сравнения результатов со случаем $f(x) = -\cos(2\alpha_0 x)$. Вычисляя выражение (11) при таком полиноме, получаем

$$\alpha_1 = \frac{3\alpha_0}{\pi^2}, \quad \alpha = \alpha_0(1 + \frac{3\varepsilon}{\pi^2}). \qquad (13)$$

Поправка $\frac{3\alpha_0}{\pi^2}$ больше, чем $\frac{\alpha_0}{4}$, поэтому закон изменения сечения в виде рассматриваемой квадратичной функции дает нам большее увеличение первой частоты, чем тригонометрический закон.

4. Численное моделирование

Вычислим α с помощью численного моделирования, которое было проведено в математическом пакете Maple. Будем применять метод Рунге — Кутта. В уравнении (5) пренебрежем слагаемыми порядка ε^3 и выше. Тогда оно принимает вид

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{\alpha^4 w}{(1+\varepsilon f)^2} - \frac{8\varepsilon f' w'''}{(1+\varepsilon f)} - \frac{4\varepsilon f'' w''}{(1+\varepsilon f)} - \frac{12\varepsilon^2 (f')^2 w''}{(1+\varepsilon f)^2}. \tag{14}$$

Сначала сведем наше уравнение к системе уравнений

$$y_1 = w, \quad y_2 = w', \quad y_3 = w'', \quad y_4 = w''', \tag{15}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = \dfrac{\alpha^4}{(1+\varepsilon f)^2} y_1 - \dfrac{8\varepsilon f'}{(1+\varepsilon f)} y_4 - (\frac{4\varepsilon f''}{(1+\varepsilon f)} + \dfrac{12\varepsilon^2 (f')^2}{(1+\varepsilon f)^2}) y_3. \end{cases} \tag{16}$$

Граничные условия (2) в новых переменных имеют вид

$$\begin{cases} y_1(0) = y_3(0) = 0, \\ y_1(l) = y_3(l) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Выбираем два решения $\overline{y_1} = (0\ 1\ 0\ 0)^T, \overline{y_2} = (0\ 0\ 0\ 1)^T$, которые удовлетворяют граничному условию $y_1(0) = y_3(0) = 0$. Решение ищем в виде $\overline{y} = C_1\overline{y_1} + C_2\overline{y_2}$.

С помощью численного решения задачи Коши находим

$$\begin{cases} y_1(l) = C_1\overline{y_{11}}(l) + C_2\overline{y_{21}}(l) = 0 \\ y_3(l) = C_1\overline{y_{13}}(l) + C_2\overline{y_{23}}(l) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Параметр α является корнем уравнения

$$D(\alpha) = y_{11}(l)y_{23}(l) - y_{13}(l)y_{21}(l) = 0. \tag{19}$$

Будем искать наименьший положительный корень этого уравнения.

Проведем сравнительный анализ α, полученных разными способами, возьмем длину балки $l = 4$. Результаты для функций $f(x) = -\cos(2\alpha_0 x)$ и $f(x) = 2(-\frac{6x^2}{l^2} + \frac{6x}{l} - 1)$ приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

Таблица 1. **Сравнение результатов для балки с переменным поперечным сечением для функции** $f(x) = -\cos(2\alpha_0 x)$

ε	α	
	Асимптотический метод	Численное моделирование
0	0,785	0,785
0,05	0,795	0,793
0,1	0,805	0,800
0,15	0,814	0,803
0,2	0,824	0,804
0,35	0,854	0,788

Таблица 2. **Сравнение результатов для балки с переменным поперечным сечением для функции** $f(x) = 2(-\frac{6x^2}{l^2} + \frac{6x}{l} - 1)$

ε	α	
	Асимптотический метод	Численное моделирование
0	0,785	0,785
0,05	0,797	0,796
0,1	0,809	0,804
0,15	0,821	0,810
0,2	0,833	0,812
0,35	0,868	0,788

Из приведенных выше таблиц можно сделать вывод, что при увеличении ε точность приближенных результатов уменьшается: при $\varepsilon = 0{,}35$ она составляет $8,38\,\%$ для тригонометрической функции и $10{,}15\,\%$ для полинома.

5. Исследование балки со ступенчатым сечением

Теперь проведем исследование для шарнирно опертой балки со ступенчатым сечением (рис. 2).

В силу симметрии можно рассмотреть левую половину балки. Тогда для симметричной формы колебаний, соответствующей первой частоте, при $x = l_1 + l_2$ выполняются следующие условия:

$$w' = w''' = 0.$$

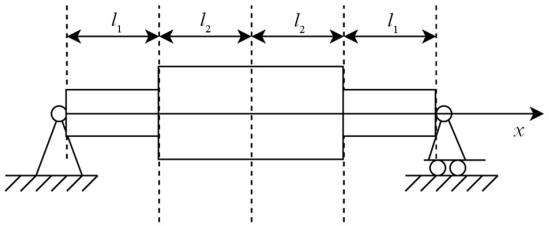


Рис. 2. Балка со ступенчатым поперечным сечением

Пусть прогиб $w = w_1$ при $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $w = w_2$ при $l_1 \leqslant x \leqslant l_2$. Уравнения для определения частот и форм ступенчатой балки имеют вид

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} - \alpha_1^4 w_1 = 0, 0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad \frac{d^4 w_2}{dx^4} - \alpha_2^4 w_2 = 0, l_1 \leqslant x \leqslant l_2, \quad (20)$$

где

$$\alpha_k^4 = \frac{\rho S_k}{E J_k}\omega^2, \quad J_k = \frac{\pi r_k^4}{4}, \quad S_k = \pi r_k^2, \quad k = 1, 2, \qquad (21)$$

r_1 и r_2 радиусы сечения балки при $0 \leqslant x \leqslant l_1$ и $l_1 \leqslant x \leqslant l_2$.

Введем на интервале $[l_1, l_2]$ новую переменную $x' = x - l_1$. Уравнение для определения w_2 при этом не изменится. Решения уравнений (20) удовлетворяют граничным условиям

$$w_1 = w_1'' = 0, \quad x = 0, \quad w_2' = w_2''' = 0, \quad x' = l_2 \qquad (22)$$

и условиям непрерывности перемещений, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил:

$$w_1(l_1) = w_2(0), \quad w_1'(l_1) = w_2'(0), \qquad (23)$$

$$EJ_1 w_1''(l_1) = EJ_2 w_2''(0), \quad EJ_1(l_1) w_1''' = EJ_2 w_2'''(0). \tag{24}$$

Решения уравнений (20) представим в виде линейной комбинации балочных функций:

$$w_k = A_k S(\alpha_k x) + B_k T(\alpha_k x) + C_k U(\alpha_k x) + D_k V(\alpha_k x), \quad k = 1, 2,$$

где

$$S(z) = (\operatorname{ch} z + \cos z)/2, \quad T(z) = (\operatorname{sh} z + \sin z)/2,$$
$$U(z) = (\operatorname{ch} z - \cos z)/2, \quad V(z) = (\operatorname{sh} z - \sin z)/2.$$

Введем обозначения:

$$S_k = S(z_k), \quad T_k = T(z_k), \quad U_k = U(z_k), \quad V_k = V(z_k),$$

$$z_k = \alpha_k l_k, \quad k = 1, 2.$$

Удовлетворив граничным условиям на левом конце, получаем

$$w_1 = B_1 T_1 + D_1 V_1, \quad A_1 = C_1 = 0.$$

Пусть $\gamma = \frac{J_1}{J_2} = \frac{r_1^4}{r_2^4}$. Из условий (23), (24) следует:

$$A_2 = B_1 T_1 + D_1 V_1,$$

$$B_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(B_1 S_1 + D_1 U_1),$$

$$C_2 = \gamma \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}(B_1 V_1 + D_1 T_1),$$

$$D_2 = \gamma \frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^3}(B_1 U_1 + D_1 S_1).$$

Удовлетворяем граничным условиям на правом конце:

$$w_2'(l_2) = A_2 V_2 + B_2 S_2 + C_2 T_2 + D_2 U_2 = 0,$$

$$w_2'''(l_2) = A_2 T_2 + B_2 U_2 + C_2 V_2 + D_2 S_2 = 0.$$

Подставляя A_2, B_2, C_2, D_2, выраженные через коэффициенты первого уравнения, получаем систему уравнений:

$$(T_1V_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}S_2S_1 + \gamma\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}(V_1T_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}U_1U_2))B_1 +$$

$$+ (V_1V_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}U_1S_2 + \gamma\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}(T_1T_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}U_2S_1))D_1 = 0, \qquad (25)$$

$$(T_1T_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}U_2S_1 + \gamma\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}(V_1V_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}S_2U_1))B_1 +$$

$$+ (V_1T_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}U_2U_1 + \gamma\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}(T_1V_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}S_2S_1))D_1 = 0. \qquad (26)$$

Предположим, что $l_1 = l_2 = l/4$, $r_1 = r_0(1-\varepsilon)$, $r_2 = r_0(1+\varepsilon)$.

В этом случае постановка задачи получается такой же, как в разделе 2, причем функция

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant x \leqslant l/4, \\ 1, & l/4 \leqslant x \leqslant 3l/4, \\ -1, & 3l/4 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

удовлетворяет условию сохранения объема с точностью до величин порядка ε^2. В рассматриваемом случае

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}, \quad z_2 = \frac{l_2}{l_1}\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}z_1.$$

Подставляя эти выражения в систему уравнений (25), (26) и приравнивая нулю ее определитель, получаем уравнение для определения z_1.

При $r_1 = r_0(1-\varepsilon)$, $r_2 = r_0(1+\varepsilon)$ условие сохранения объема выполняется приближенно. Если взять

$$r_1 = r_0(\sqrt{(1-\varepsilon^2)} - \varepsilon), \quad r_2 = r_0(\sqrt{(1-\varepsilon^2)} + \varepsilon),$$

то условие сохранения $r_1^2 + r_2^2 = 2r_0^2$ объема будет выполнено точно.

6. Полученные результаты

Теперь проведем сравнительный анализ значений α_1 при точном и при приближенном сохранении объема при $l_1 = l_2 = 1$. Получившиеся результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3. **Сравнение полученных α_1 для балки со ступенчатым поперечным сечением при $l_1 = l_2 = l/4$**

ε	α_1	
	При ТСО	При ПСО
0	$\pi/4$	$\pi/4$
0,05	0,815	0,815
0,1	0,840	0,839
0,15	0,858	0,857
0,2	0,867	0,866

Из табл. 3 видно, что результаты для точного и приближенного сохранений объема практически одинаковые. Причем чем меньше ε, тем выше точность приближенных значений. При $\varepsilon = 0{,}2$ точность достигает 0,12 %. Значит, и при точном сохранении объема балки переменного сечения результаты будут мало отличаться от результатов при приближенном сохранении объема.

Чтобы сравнить результаты для ступенчатой балки и балок поперечного сечения, выразим α_1 в α по формуле $\alpha = \alpha_1\sqrt{r_1}$. Полученные результаты приведены в табл. 4.

Таблица 4. **Сравнение полученных α для разных балок**

ε	α					
	Переменное сечение				Ступенчатое сечение	
	$-\cos(2\alpha_0 x)$		$2(-\frac{6x^2}{l^2}+\frac{6x}{l}-1)$			
	Асим.	Числ.	Асим.	Числ.	Точное	Прибл.
0	0,785	0,785	0,785	0,785	0,785	0,785
0,05	0,795	0,793	0,797	0,796	0,793	0,794
0,1	0,805	0,800	0,809	0,804	0,794	0,796
0,15	0,814	0,803	0,821	0,810	0,858	0,857

Из табл. 4 можно сделать вывод, что частоты балок с переменным сечением с приведенными выше функциями будут больше, чем

частота балки со ступенчатым сечением. Для полинома получилась самое большое увеличение частоты в сравнении с балкой постоянного сечения.

7. Заключение

В проделанной работе исследованы свободные колебания шарнирно опертых балок с переменным и ступенчатым сечениями, для которых выполняется условие сохранения объема. Для балки со ступенчатом сечением в явном виде получено уравнение для определения частот. Найден закон изменения поперечного сечения балки, при котором достигается наибольшее значение первой частоты, им оказался полином второй степени.

Литература

1. *Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Товстик П. Е., Филиппов С. Б.* Асимптотические методы в механике твердого тела. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2007. 357 с.
2. *Товстик П. Е., Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б.* Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1995. 182 с.
3. *Андрианов И. В., Данишевский В. В., Иванков А. О.* Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск: Приднепр. гос. акад. строительства и архитектуры, 2010. 216 с.
4. *Kostin G. V., Saurin V. V.* An asymptotic approach to the problem of the free oscillations of a beam // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2006. Vol. 71 (4). P. 611–621.
5. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1967. С. 420–426.
6. *Помыткина Е. С., Смирнов А. Л.* Свободные поперечные колебания балки с переменными параметрами // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. С. 103–114.

ДЕФОРМАЦИЯ ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

С. М. Бауэр, А. С. Крылова

В работе изучается деформация пологого сферического сегмента под действием внутреннего давления. Такая задача может рассматриваться как модель, описывающая поведение решетчатой пластинки диска зрительного нерва. Материал такой оболочки является трансверсально-изотропным или ортотропным. Модуль упругости материала в направлении толщины оболочки существенно меньше его тангенциальных модулей упругости. В связи с этим рассматривается деформация ортотропных неоднородных по меридиональной координате пологих сферических сегментов в рамках нелинейной теории Амбарцумяна. Исследуется влияние степени неоднородности, анизотропии и величины радиуса кривизны на величину прогиба. Проводится сравнение полученных результатов с результатами классической теории.

1. Введение

Известно, что большие деформации решетчатой пластинки диска зрительного нерва могут приводить к атрофии зрительного нерва, а также при больших прогибах могут возникать отеки в окрестности края этой пластины [1]. Это явление может быть вызвано потерей устойчивости симметричной формы равновесия такой оболочки. Известно также, что докритическое состояние оболочки иногда может оказывать сильное влияние на величину критической нагрузки, если форма нагруженной конструкции в докритическом состоянии отличается от формы ненагруженной конструкции [2]. Важность такого определения докритического состояния проявилась при решении задачи о неосесимметричных формах равновесия круглых пластин, нагружаемых нормальным давлением. Впервые вопрос о существовании несимметричных решений у симмет-

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00832
Доклад на семинаре 21 мая 2020 г.

рично загруженной круглой пластины был рассмотрен в 1948 г. Д. Ю. Пановым и В. И. Феодосьевым [3]. Методом Галеркина для больших прогибов пластины, загруженной постоянным давлением, авторы получили некоторое решение, соответствующее несимметричным формам равновесия. В работе [4] для круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения определены значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной. Величина критической нагрузки, полученная в [4], почти в три раза больше нагрузки, определенной Пановым и Феодосьевым. Формы потери устойчивости также различаются. Сравнивая свои решения с результатами, полученными в работе [3], авторы пришли к выводу, что докритическое состояние, определенное в [3] и характеризующееся функцией, зависящей от одного параметра, описывается недостаточно точно.

К задаче о потере устойчивости осесимметричных форм равновесия круглых пластин и пологих сферических сегментов под действием внутреннего давления обращались С. Д. Коман с соавторами (см., например, [5, 6]). При этом во всех работах исследователей рассматривались однородные изотропные оболочки, а докритическое состояние определялось по классической теории оболочек. Задачи об устойчивости неоднородных по радиусу ортотропных круглых пластин и пологих сферических сегментов под действием внутреннего давления рассматривались в работах [5–7]. Но для определения докритического состояния также использовалась классическая теория оболочек. Задачи, рассмотренные в [5–7], связаны с моделью деформирования решетчатой пластинки диска зрительного нерва (части склеры), большая деформация которой приводит к развитию глаукомы. Надо отметить, что в случае склеры материал пластины является или трансверсально-изотропным, или ортотропным. Модуль упругости в направлении толщины такой пластины или оболочки на порядок меньше тангенциальных модулей упругости. Известно, что в этом случае более точно докритическое состояние такой оболочки или пластины описывает теория анизотропных пластин и оболочек Амбарцумяна [10, 11].

В данной работе обсуждается деформация трансверсально-изотропных и ортотропных пластин и пологих оболочек в рамках

теории Амбарцумяна. Исследуется влияние степени анизотропии, пологости и неоднородности оболочек на величину прогиба. Полученные результаты сравниваются с результатами, полученными по классической теории.

2. Постановка задачи

Рассмотрим пологий сферический сегмент постоянной толщины h, находящийся под действием равномерно распределенного нормального внутреннего давления (рис. 1). Уравнение срединной поверхности оболочки имеет вид $z = H(1 - r^2/a^2)$, где a — радиус основания оболочки, H — высота срединной поверхности в центре. Оболочка является тонкой и пологой, это означает, что $h/R \ll 1$, где $R = a^2/(2H)$ — радиус кривизны, а $H \ll R$.

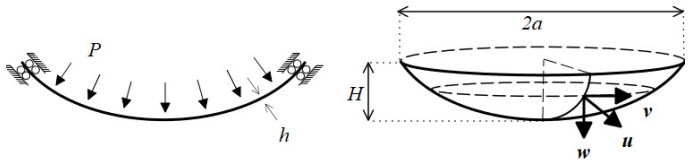


Рис. 1. Геометрия пологого сферического сегмента

Внешний край оболочки защемлен, но его точки могут свободно перемещаться по меридиану без поворотов.

В случае решетчатой пластинки можно считать, что пологая оболочка близка к трансверсально-изотропной или ортотропной пластине. Получим систему уравнений для определения прогиба такой пластины.

Будем использовать цилиндрическую систему координат (r, θ, z). Материал пластины положим ортотропным. Обобщенный закон Гука для цилиндрически ортотропного тела имеет вид [10]:

$$
\begin{aligned}
e_r &= \frac{1}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\nu_{rz}}{E_z}\sigma_z, & e_{\theta z} &= \frac{1}{G_{\theta z}}\tau_{\theta z},\\
e_\theta &= -\frac{\nu_{\theta r}}{E_r}\sigma_r + \frac{1}{E_\theta}\sigma_\theta - \frac{\nu_{\theta z}}{E_z}\sigma_z, & e_{rz} &= \frac{1}{G_{rz}}\tau_{rz},\\
e_z &= -\frac{\nu_{zr}}{E_r}\sigma_r - \frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta}\sigma_\theta + \frac{1}{E_z}\sigma_z, & e_{r\theta} &= \frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь E_r, E_θ, E_z — модули Юнга для направлений в трех взаимно перпендикулярных плоскостях упругой симметрии пластины; $\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta r}, \nu_{rz}, \nu_{zr}, \nu_{\theta z}, \nu_{z\theta}$ — коэффициенты Пуассона (первый индекс указывает направление растяжения или сжатия, второй — направление приложенной силы); $G_{\theta z}$, G_{rz}, $G_{r\theta}$ — модули сдвига, характеризующие изменение угла между направлениями θ и z, r и z, r и θ. Если в соотношениях (1) положить равными модули E_r и E_θ, $G_{\theta z}$ и G_{rz} соответственно, то можно получить закон Гука для трансверсально-изотропного тела.

Обозначим $\nu_{r\theta} = \nu_\theta,\ \nu_{\theta r} = \nu_r$. В силу симметрии соотношений (1) справедливы равенства

$$E_r\nu_\theta = E_\theta\nu_r, \quad E_r\nu_{rz} = E_z\nu_{zr}, \quad E_\theta\nu_{\theta z} = E_z\nu_{z\theta}. \tag{2}$$

В нашей задаче модуль упругости в направлении толщины пластины существенно меньше тангенциальных модулей упругости, а модули сдвига в плоскости, перпендикулярной срединной поверхности, много меньше модуля сдвига в срединной поверхности оболочки. Вводя обозначение $G_{rz} = G'$, запишем $E_z \ll E_r$, $E_z \ll E_\theta$, $G' \ll G_{r\theta}$, $G_{\theta z} \ll G_{r\theta}$. Наконец, упругие коэффициенты должны удовлетворять условию положительной определенности квадратичной формы

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_r e_r + \sigma_\theta e_\theta + \sigma_z e_z) + \tau_{r\theta}e_{r\theta} + \tau_{rz}e_{rz} + \tau_{\theta z}e_{\theta z},$$

где W — удельная потенциальная энергия деформации. Из критерия Сильвестра получены следующие ограничения для коэффициентов Пуассона [10]:

$$\begin{aligned}
&1 - \nu_r\nu_\theta > 0, \quad 1 - \nu_{rz}\nu_{zr} > 0, \quad 1 - \nu_{\theta z}\nu_{z\theta} > 0,\\
&|\nu_r| < (E_r/E_\theta)^{1/2}, \ldots, |\nu_{z\theta}| < (E_\theta/E_z)^{1/2},\\
&1 - \nu_r\nu_\theta - \nu_{rz}\nu_{zr} - \nu_{\theta z}\nu_{z\theta} - 2\nu_\theta\nu_{zr}\nu_{\theta z} > 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

3. Уравнения общей уточненной нелинейной теории Амбарцумяна изгиба неоднородных пологих ортотропных оболочек

Общая уточненная теория С. А. Амбарцумяна строится на следующих предположениях:

1) нормальное к срединной поверхности оболочки перемещение не изменяется по толщине;

2) касательные напряжения в плоскости, перпендикулярной к срединной поверхности оболочки, изменяются по заданному закону.

Первое предположение совпадает с аналогичным предположением классической теории. Принимая его, мы полагаем

$$u_z = w(r,\theta), \quad e_z \approx 0. \tag{4}$$

Вторая гипотеза, в отличие от классической теории, учитывает деформации поперечного сдвига. В теории Амбарцумяна они обозначаются φ и ψ и являются неизвестными функциями координат. Касательные напряжения согласно теории Амбарцумяна имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\varphi(r,\theta), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\psi(r,\theta). \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, деформация оболочки по теории Амбарцумяна описывается функциями $u, v, w, \varphi, \psi, F$, зависящими от координат r, θ, где u, v, w — перемещение точек срединной поверхности, а F — функция усилий:

$$T_r = \frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}, \quad T_\theta = \frac{d^2F}{dr^2}, \quad S_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{dF}{d\theta} - \frac{1}{r}\frac{d^2F}{drd\theta}. \tag{6}$$

Будем рассматривать только осесимметричную деформацию оболочки. Тогда $v = 0$, $\psi = 0$, а все остальные функции зависят только от координаты r.

При гипертензии и глаукоме прогибы решетчастой пластинки имеют порядок толщины пластинки, поэтому представляют интерес результаты расчетов по геометрически нелинейной теории.

В этом случае в выражениях для определения деформаций будут учитываться члены второго порядка малости, но, согласно теории Амбарцумяна, только те, которые связаны с нормальным перемещением w:

$$\begin{gathered} e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2, \quad e_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2, \\ e_{r\theta} = 0, \quad e_{\theta z} = 0, \quad e_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{gathered} \tag{7}$$

С учетом (1), (4) и (5) получим

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 - z\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{z}{2G'}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3}\right)\frac{d\varphi}{dr}, \\ e_\theta &= \frac{u}{r} - \frac{z}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{z}{2G'}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3}\right)\frac{\varphi}{r}. \end{aligned} \tag{8}$$

Подробный вывод уравнений для однородной пластины описан в [10]. В настоящей работе полагается, что модули упругости E_r и E_θ являются функциями r, поэтому в уравнениях появляются дополнительные слагаемые, отвечающие за неоднородность пластины. Учтем кривизну и в результате получим систему для определения функций $w(r)$, $F(r)$ и $\varphi(r)$ пологой неоднородной ортотропной оболочки:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dr}(\varphi r) + \frac{12}{h^3}\frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr}\frac{dF}{dr}\right) = -\frac{12}{h^3}Pr, \\ \frac{d^3F}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{E_\theta}{E_r}\frac{dF}{dr} + \frac{E_\theta h}{2r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 - \frac{E_\theta}{R}\frac{dw}{dr} = \\ = \frac{1}{E_\theta}\frac{dE_\theta}{dr}\left(\frac{d^2F}{dr^2} - \frac{\nu_\theta}{r}\frac{dF}{dr}\right), \\ E_r\left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}\right) + \frac{dE_r}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu_\theta}{r}\frac{dw}{dr}\right) - E_\theta\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{R}\frac{dF}{dr} - \\ -\frac{h^2}{10\,G'}\left[\frac{dE_r}{dr}\left(\frac{\nu_\theta\varphi}{r} + \frac{d\varphi}{dr}\right) + E_r\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right) - E_\theta\frac{\varphi}{r^2}\right] = (\nu_\theta\nu_r - 1)\varphi. \end{gathered} \tag{9}$$

Решение первого уравнения системы находится при учете, что функция $\varphi(r)$ ограничена при $r = 0$:

$$\varphi(r) = -\frac{6Pr}{h^3} - \frac{12}{h^3 r}\frac{dw}{dr}\frac{dF}{dr}. \tag{10}$$

Положим $E_r(r) = E_r\ f(r/a),\ E_\theta(r) = E_\theta\ f(r/a)$, где f — убывающая функция.

Введем безразмерные величины:

$$\begin{gathered}\rho = \frac{r}{a}, \quad w^* = \frac{w}{h}, \quad F^* = \frac{F}{h^3 E_\theta}, \quad P^* = \frac{6P\,a^2}{h^2 E_\theta}, \\ h^* = \frac{h}{a}, \quad C = \frac{a^2}{Rh}.\end{gathered} \tag{11}$$

Подставим решение (10) в систему (9) и представим ее в безразмерном виде. Здесь и далее для удобства будем опускать символ * и использовать сокращение

$$(\ \ )' = d(\ \ )/d\rho.$$

Система относительно безразмерных функций $w(\rho)$ и $F(\rho)$ имеет вид

$$\begin{gathered}w''' + \frac{1}{\rho}w'' - \frac{K}{\rho^2}w' + \frac{f'}{f}\left(w'' + \frac{\nu_\theta}{\rho}w'\right) + \\ + \lambda\frac{f'}{f}\left[\frac{6h^2}{5}\left(\frac{1}{\rho}w'F'\right)' + \frac{6h^2}{5}\frac{\nu_\theta}{\rho^2}w'F' + \frac{P(\nu_\theta+1)}{10}\right] + \\ + \lambda\frac{6h^2}{5\rho}\left[\left(\rho\left(\frac{1}{\rho}w'F'\right)'\right)' - \frac{K}{\rho^2}w'F'\right] + \frac{\lambda}{\rho}\frac{P(1-K)}{10} - \\ - K\left(1-\nu_r\nu_\theta\right)\left(\frac{P\rho}{h^2 f} + \frac{12}{\rho f}w'F' - 12\,C\,F'\right) = 0, \\ F''' + \frac{1}{\rho}F'' - \frac{K}{\rho^2}F' - \frac{f'}{f}\left(F'' - \frac{\nu_\theta}{\rho}F'\right) + \frac{f}{2\rho}\left(w'\right)^2 - Cw' = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

В системе (12) введены обозначения

$$\lambda = \frac{E_\theta}{G'},\ K = \frac{E_\theta}{E_r}, \tag{13}$$

которые характеризуют степень анизотропии оболочки. Влияние значений параметров λ, K на величину прогиба будет исследоваться далее.

Граничные условия для функций $w(\rho)$ и $F(\rho)$ соответствуют выведенным в постановке задачи предположениям и представляют собой соотношения, полученные в соответствии с [10]:

$$\begin{aligned} &\rho = 1: \qquad w = 0, \qquad w' = -\frac{f(\rho)}{8}\lambda P, \qquad F' = 0; \\ &\rho = 0: \qquad w' = 0, \qquad F' = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

4. Сравнение результатов, полученных по теории Амбарцумяна и по классической теории

Система (12) с граничными условиями (14) решалась методом конечных разностей (МКР) средствами пакета Maple. Далее проводится сравнение решений, полученных по нелинейной и линейной теориям Амбарцумяна, линейной и нелинейной классическим теориям. Исследуется влияние параметров λ, K, R, величины давления и функции f на эти решения. Но сначала покажем, как теория Амбарцумяна может уточнять классическую теорию для трансверсально-изотропной оболочки. Найденные величины везде являются безразмерными.

Рассмотрим аналитические формулы (15), (16) для прогиба однородной пластины. Формула (15) описывает прогиб согласно классической теории пластин и оболочек, формула (16) получена С. А. Амбарцумяном:

$$\frac{w^{cl}}{P} = \frac{(1-\nu^2)(1-\rho^2)^2}{32h^2}, \quad h \ll 1, \tag{15}$$

$$\frac{w^{A}}{P} = \frac{w^{cl}}{P} + \frac{\lambda(1-\rho^2)}{16}. \tag{16}$$

Дополнительное слагаемое в формуле (16) мало по сравнению с первым слагаемым, но оно увеличивается с ростом λ так, что может стать порядка первого слагаемого и даже больше него. Величина λ

определена в (13). В случае сильной анизотропии, который рассматривается в нашей задаче, величина G' полагается малой, и чем меньше эта величина, тем больше отношение λ.

На рис. 2 построены графики по формулам (15), (16). Видно, что с ростом λ при постоянном давлении P увеличивается прогиб $w(\rho)$, полученный по теории Амбарцумяна, а разница между значением этого прогиба и решением, полученным по классической теории, становится все больше и больше.

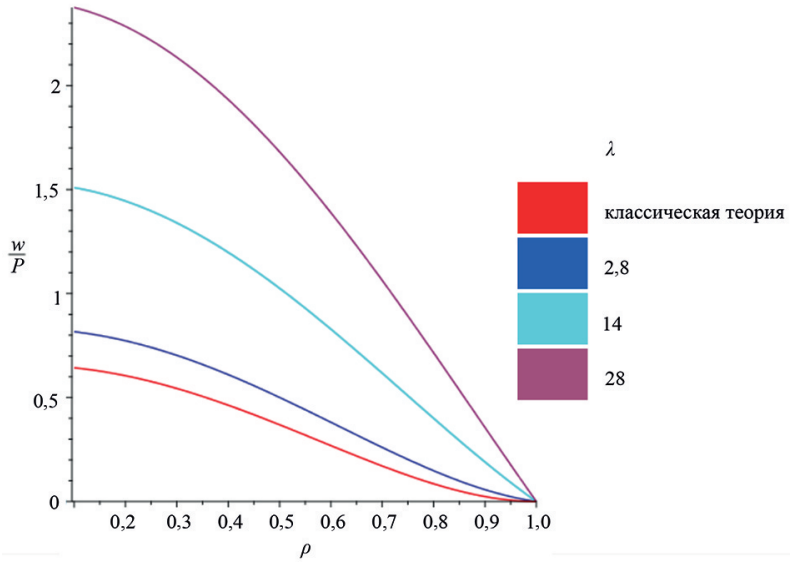


Рис. 2. Сравнение аналитических решений классической теории и теории Амбарцумяна при увеличении параметра λ

Формула (15) показывает, что в классической теории параметр λ не учитывается.

5. Сравнение решений, полученных по линейной и нелинейной теориям Амбарцумяна. Влияние анизотропии

Рассмотрим трансверсально-изотропную однородную пластину, $P = 60$ мм рт. ст. (8 кПа), $\lambda = 2{,}8$. Как видно из рис. 3, при таких параметрах решения, полученные по линейной и нелинейной теориям, практически совпадают. Выясним, как влияет величина λ на разницу между прогибами. График показывает, что при увеличении параметра λ в 20 раз, то есть при уменьшении модуля G' в 20 раз, нелинейная теория дает значительно меньшую величину прогиба. С увеличением λ ошибка при расчетах по линейной теории растет.

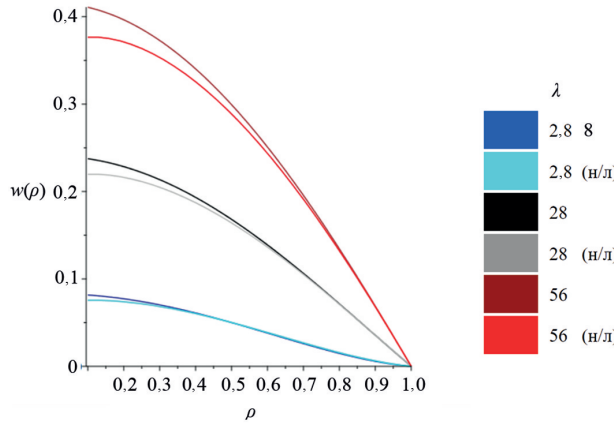


Рис. 3. Сравнение линейной и нелинейной теорий при росте параметра λ

Пусть параметр λ по-прежнему увеличен в 20 раз. Будем менять параметр K, определенный в (13) и отвечающий за степень ортотропии материала пластины. Если $K = 1$, пластина обладает трансверсальной изотропией.

На рис. 4а видно, что при больших K, то есть при меньших E_r, величина прогиба становится значительно больше, а линейная теория дает увеличенное решение по сравнению с нелинейной. При уменьшении параметра K (рис. 4б) происходит обратное.

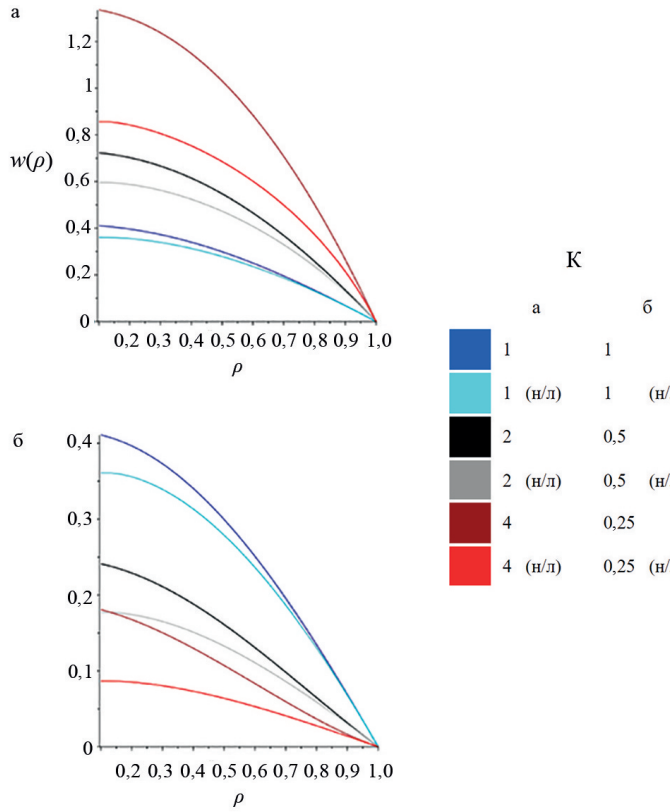


Рис. 4. Сравнение линейной и нелинейной теорий при изменении K

6. Влияния неоднородности, величины давления и кривизны

Рассмотрим пластину при $K = 1$, $\lambda = 28$. Графики на рис. 5 соответствуют решениям при разных давлениях P в случае, когда $f(\rho) = 1$, и решениям, зависящим от убывающей функции $f(\rho) = \exp\{-4\rho\}$. Здесь решение, полученное по линейной теории, было вычислено с помощью МКР. Сравнивая графики, можно сде-

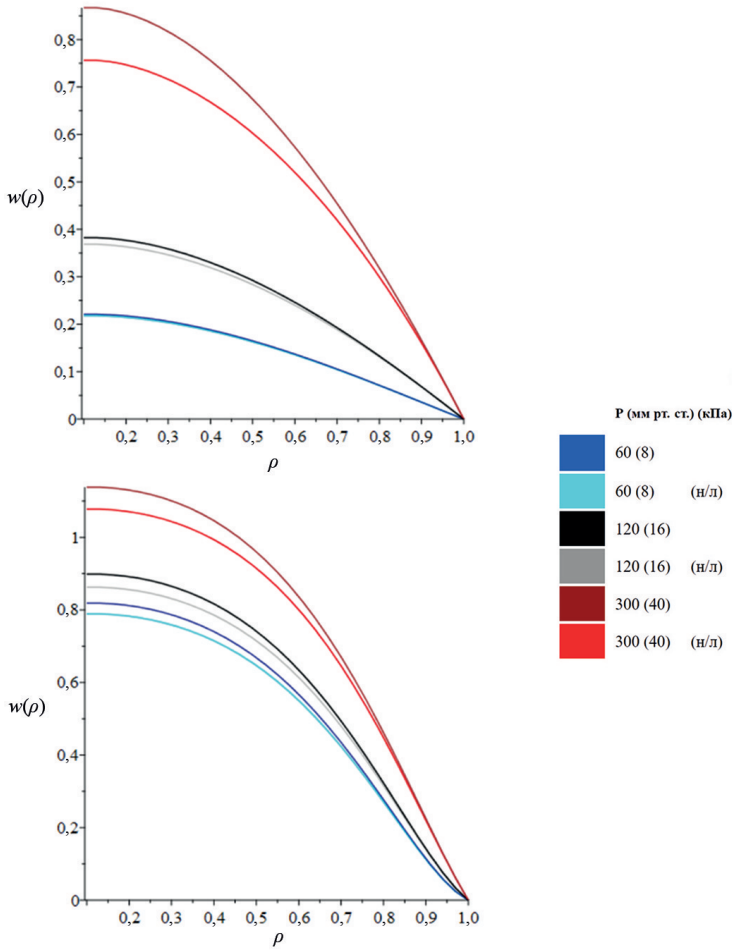


Рис. 5. Влияние неоднородности

лать вывод о том, что учет неоднородности материала пластины существенно увеличивает величину ее прогиба.

На рис. 6 ($K = 1, \lambda = 2{,}8$) проведено сравнение сразу для четырех теорий при больших значениях давления. Уравнения для нелинейной классической теории описаны в [8]. Видно, что и линейная,

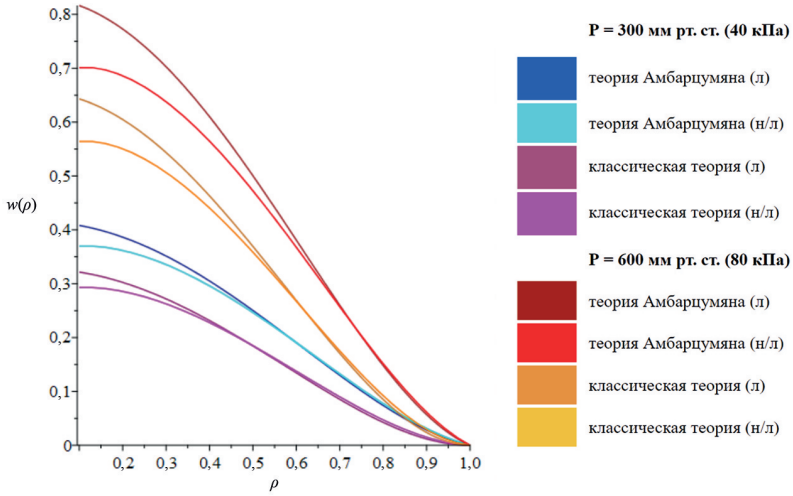


Рис. 6. Сравнение классической теории и теорий Амбарцумяна (линейной и нелинейной)

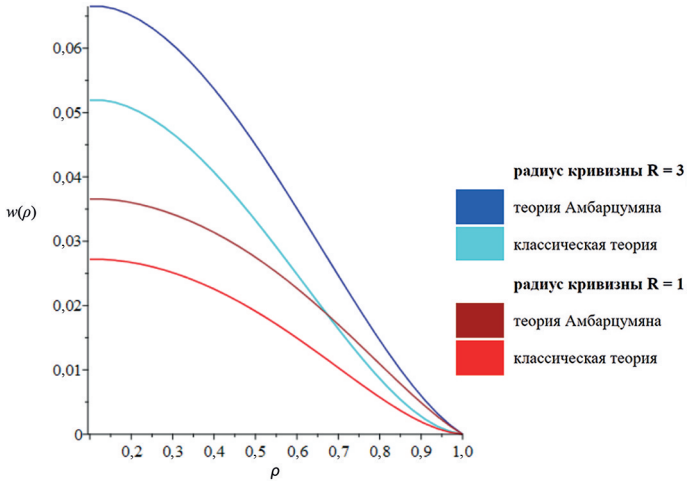


Рис. 7. Влияние кривизны

и нелинейная теории Амбарцумяна дают большую величину прогиба и существенно уточняют классическую линейную и нелинейную теории. Кроме того, с увеличением давления разница между классическими теориями растет медленнее, чем у теорий Амбарцумяна.

Наконец, рассмотрим пологий трансверсально-изотропный сферический сегмент с ($K = 1,\ \lambda = 28$) под действием давления $P = 60$ мм рт. ст. График на рис. 7 показывает, что чем меньше кривизна оболочки, тем больше величина ее прогиба.

7. Область отрицательных напряжений

Возможность перехода симметрично загруженной оболочки в неосесимметричное состояние обуславливается появлением сжимающих напряжений в окрестности края. При возрастании нагрузки увеличивается интенсивность окружных усилий T_θ, введенных в формуле (6), и одновременно сужается зона, в которой они появляются, создавая тем самым дополнительные предпосылки для перехода в неосесимметричное состояние [4].

В [12] исследовалась область сжимающих напряжений для неоднородной пластины. С ростом неоднородности в [12] сужалась область, где функция T_θ принимала отрицательные значения, при этом потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходила при более низкой нагрузке.

На рис. 8 на примере трансверсально-изотропной пологой оболочки ($K = 1, R = 3, \lambda = 2{,}8$ для первого графика, $\lambda = 28$ для

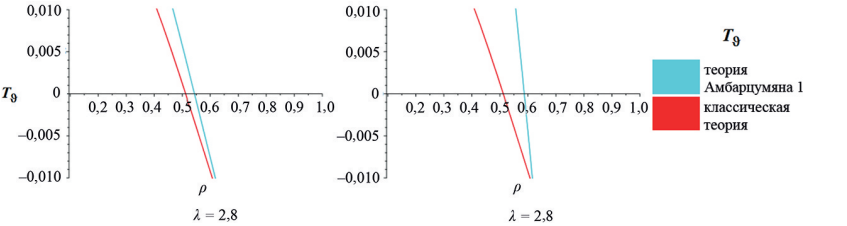


Рис. 8. График окружных усилий в крупном масштабе. В первом случае напряжения являются отрицательными для радиуса 0,52–1 (классическая теория) и 0,54–1 (теория Амбарцумяна). Во втором случае область отрицательных напряжений (теория Амбарцумяна) становится меньше на несколько сотых

второго) показано, что область сжимающих напряжений, полученная по теории Амбарцумяна, у́же области, рассчитанной по классической теории. Также видно, что с увеличением параметра λ область отрицательных усилий T_θ сужается.

Вероятно, это может означать, что в случае теории Амбарцумяна переход в неосесимметричное состояние произойдет раньше, причем величина λ предположительно снижает значение критической нагрузки. Однако этот вопрос требует дальнейшего исследования.

8. Заключение

В работе выведена система уравнений, описывающая прогиб и внутренние усилия неоднородного ортотропного пологого сферического сегмента на основе гипотез С. А. Амбарцумяна. Исследование показало, что прогиб, получаемый по теории Амбарцумяна при сильной анизотропии, имеет бо́льшую величину по сравнению с результатом классической теории. То есть применение теории Амбарцумяна для решения задач, рассмотренных в данной работе, способствует получению более точного решения.

Литература

1. *Иомдина Е. Н, Бауэр С. М., Котляр К. Е.* Биомеханика глаза: Теоретические аспекты и клинические приложения. М.: Реал Тайм, 2015. 208 с.

2. *Бушнелл Д.* Потеря устойчивости и выпучивание оболочек — ловушка для проектировщиков Ракетная техника и космонавтика, 1981. Т. 19. № 10. С. 93–154.

3. *Панов Д. Ю., Феодосьев В. И.* О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. С. 389–406.

4. *Cheo L. S., Reiss E. L.* Unsymmetric wrinkling of circular plates // Quart. Appl. Math. 1971. № 31. P. 75–91.

5. *Coman C. D., Bassom A. P.* Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2016. Vol. 81. P. 8–18.

6. *Coman C. D.* Asymmetric bifurcations in a pressurised circular thin plate under initial tension // Mechanics Research Communications. 2013. Vol. 47. P. 11–17.

7. *Бауэр С. М, Воронкова Е. Б.* Влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у круглых пластин под действием нормального давления // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2020. № 1. С. 38–46.

8. *Bauer S. M., Voronkova E.* . Unsymmetrical buckling of orthotropic annular plates and spherical caps under internal pressure // Proceedings of the CompDyn 2019, Crete, Greece, 24–26 June 2019. Vol. 2. P. 3556–3562. URL: https://2019.compdyn.org.

9. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure // Recent developments in the theory of shells. Advanced structured materials / eds H. Altenbach et al. Vol. 110. Cham: Springer, 2019. P. 79–89.

10. *Ambartsumyan S. A.* Theory of Anisotropic Plates. Stamford: Technomic Publishing Co., 1970. 225 p.

11. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.

12. *Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б.* Основы теории устойчивости упругих систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2017. С. 30–37.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК

Применение пороупругой модели для описания эксперимента на сжатие элемента миокарда

Д. В. Кучеренко

Доклад на семинаре 3 сентября 2019 г.

В работе исследуется возможность применения пороупругой модели для описания эксперимента на сжатие элемента миокарда. Рассматривается линейная одномерная модель пороупругой среды, позволяющая описать петли гистерезиса, возникающие при циклическом приложении нагрузки и разгрузки. Численный расчет производился в системе автоматизированного проектирования Mathcad, где были рассмотрены случаи установившихся колебаний, а также случай с нестационарной нагрузкой. С помощью пороупругой модели удалось описать влияние высоты образца на тип гистерезиса.

Области притяжения в обобщенной задаче Капицы

Д. Б. Кулижников

Доклад на семинаре 17 сентября 2019 г.

Рассматривается область притяжения устойчивого вертикального положения стержня в задаче Капицы и в ее обобщениях. Достаточно длинный гибкий стержень со свободным верхним концом и жестко закрепленным нижним концом теряет устойчивость вертикальной формы под действием собственного веса. Недавно были получены условия, при которых гармонические вертикальные вибрации основания делают вертикальное положение устойчивым. Обсуждается вопрос об области притяжения вертикального положения при вибрациях, в случае когда при отсутствии вибраций это положение неустойчиво. Сначала находится область притяжения в классической задаче Капицы, а затем рассматривается стержень с упруго закрепленным нижним концом, который моделирует задачу о гибком стержне. Используется асимптотический метод двухмасштабных разложений. Обнаружено, что переход стержня в вертикальное положение при вибрациях основания существенно зависит от начальной фазы возмущения. В результате оказалось, что область притяжения состоит из двух частей. В одной из них переход в вертикальное положение не зависит от начальной фазы, а в другой имеет место лишь для начальной фазы из некоторой области.

Оптимальное размещение круглых деталей при штамповке

К. М. Лебедева

Доклад на семинаре 24 сентября 2019 г.

Рассматривается задача об оптимальном положении круглых деталей при штамповке. Исходной для исследования является задача о размещении двух кругов разного радиуса на прямоугольной пластине так, чтобы процент отходов был минимальным. Используя различные способы решения этой задачи, найдено оптимальное положение для двух, а при увеличении числа входных параметров — трех и четырех кругов разного радиуса. Далее рассмотрена задача о размещении кругов одинакового радиуса, при решении которой была выявлена закономерность, используемая при масштабировании задачи. Конечным итогом исследования стало определение оптимального положения деталей при увеличении числа параметров задачи.

Математический анализ саккадического движения глаза

А. П. Кручинина

Доклад на семинаре 15 октября 2019 г.

Диссертация посвящена исследованию и моделированию движений глаз. Первая глава посвящена объяснению причин возникновения сенсорного конфликта при движении на динамическом стенде «качели Хилова» и анализу глазодвигательного отклика в этом случае. Составной частью этого отклика является саккадическое движение глаза.

Во второй главе работы на экспериментальных данных проанализированы возможные формы саккад и построен алгоритм аппроксимации саккады. Предложено три новых параметра для описания саккады.

В третьей главе диссертации рассматривается движение глазного яблока как твердого тела, с приложенным к нему моментом со стороны глазодвигательных мышц. Построены два класса моделей на основе задачи быстродействия:

1) на глазное яблоко действует пара мышц, описанных моделью Фельдмана;

2) на глазное яблоко действует сила со стороны каждой из мышц пары. Эти силы ограничены. Данные модели позволяют получать экспериментально наблюдаемые формы саккад.

Модель Кардара — Паризи — Занга под воздействием ансамбля Казанцева — Крейчнана с «замороженным» статическим шумом

Е. В. Гоголева

Доклад на семинаре 29 октября 2019 г.

В данной работе рассмотрена модель случайного роста границы раздела фаз под влиянием случайного движения жидкости со статическим шумом. В качестве модели роста выбрана модель Кардара — Паризи — Занга. Поле скорости моделируется статистическим ансамблем Казанцева — Крейчнана. В качестве случайного шума был рассмотрен так называемый «замороженный» шум с заданным коррелятором, не зависящим от времени, и нулевым средним. Модель задается с помощью стохастического дифференциального уравнения, после чего происходит переход к квантово-полевой формулировке. Это позволяет использовать мощный вычислительный аппарат квантовой теории поля, в том числе построить диаграммную технику Фейнмана. Производится анализ ультрафиолетовых (УФ) расходимостей диаграмм путем проведения анализа канонических размерностей.

Моделирование функционально-механического поведения пористого сплава с памятью формы на основе аппроксимации его структуры как балочной конструкции

Е. Н. Япарова

Доклад на семинаре 17 марта 2020 г.

В работе представлена модель функционально-механических свойств пористых сплавов с памятью формы (СПФ), основанная на представлении структуры образцов как балочных конструкций. Анализ микрофотографий пористых образцов из TiNi, полученных методами СВС и СЛП, позволил выбрать в качестве математических объектов моделирования наборы балок различной конфигурации. Расчеты производились с использованием микроструктурной модели, позволяющей описывать свойства СПФ, и методов сопротивления материалов. Разработана методика определения параметров, характеризующих поровую структуру. Получены расчетные формулы для деформации элементов структуры пористых СПФ, составлен алгоритм расчета и компьютерная программа, реализующая его, выполнено моделирование деформации образцов и сопоставление с экспериментальными данными. Полученные результаты моделирования поведения пористого СПФ при сжатии в разных фазовых состояниях и при изменении температуры образца под нагрузкой показали хорошее соответствие с данными экспериментов.

Исследование взаимодействия холодных атомов в магнито-оптической ловушке с излучением фемтосекундного лазера

Н. М. Ковалевский

Доклад на семинаре 7 апреля 2020 г.

Целью данной работы является изучение принципов лазерного охлаждения атомов, устройства и работы магнито-оптической ловушки (МОЛ), а также экспериментальное рассмотрение взаимодействия холодных атомов в МОЛ с лазером и теоретическая интерпретация полученных результатов.

Актуальность работы заключается в том, что техника лазерного охлаждения позволяет достичь температур облака атомов, недостижимых другими известными методами. Помимо интереса к фундаментальным исследованиям явления холодных и ультрахолодных атомов, важно отметить и практическое применение: так как частоты, соответсвующие интервалам энергетической структуры холодного атома, определяются с очень высокой точностью, они могут быть использованы как эталон в прецизионной физике и метрологии.

Экспериментальное исследование старения полимерных и композиционных материалов

В. А. Евдокименко

Доклад на семинаре 14 апреля 2020 г.

Целью данной работы является исследование влияния старения на механические и усталостные свойства полимерных и композиционных материалов.

В работе представлены результаты экспериментальных исследований деформационного и климатического старения полиуретана в опытах на усталость, ползучесть, а также эксперименты на длительное естественное старение шести марок ударопрочного полистирола в опытах на растяжение и ползучесть.

Для описания экспериментальных кривых ползучести образцов из полиуретана и полистирола после старения и без старения используется модифицированный вариант уравнения Максвелла, записанный в шкале эффективного времени.

Маятник Капицы

Д. Б. Кулижников

Доклад на семинаре 21 апреля 2020 г.

В работе рассматривается пространственное движение перевернутого недеформируемого стержня на вибрирующем основании. Исследование сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, ко-

торое исследуется методом численного интегрирования и для которого построено асимптотическое разложение решения по малому параметру. Исследуется влияние начальной угловой скорости на способность маятника возвращаться в вертикальное положение равновесия при различных начальных условиях, заданных в сферических координатах.

Свободные колебания неоднородных круглых пластин

Г. П. Васильев

Доклад на семинаре 28 апреля 2020 г.

В докладе исследуются поперечные колебания неоднородной круглой тонкой пластины. С помощью метода возмущений получены асимптотические формулы для частот свободных колебаний пластины, толщина и модуль Юнга которой зависят от радиальной координаты. Рассмотрены различные виды линейной и нелинейной зависимостей, проанализировано поведение частот при фиксированной массе или средней жесткости пластины. Для низших частот пластины асимптотические результаты сравниваются с результатами конечно-элементного анализа и результатами других авторов, полученными с помощью различных методов.

Устойчивость шарнирно опертых балок с переменным сечением

Ф. С. Муслимова

Доклад на семинаре 19 мая 2020 г.

Исследуется устойчивость шарнирно опертых балок с переменным и ступенчатым поперечными сечениями под действием сжимающей силы. Для балки с переменным поперечным сечением сравниваются значения критической нагрузки, полученной асимптотическим методом и найденной методом прогонки. Для балки со ступенчатым сечением в явном виде получено уравнение для определения критической нагрузки. Целью работы является, в частности, определение закона изменения поперечного сечения, для которого при условии сохранения массы балки критическая нагрузка имеет наибольшее значение.

Численное моделирование процесса диффузии

Е. С. Глухова

Доклад на семинаре 21 мая 2020 г.

Работа посвящена численному моделированию процесса диффузии загрязняющего вещества на поверхности жидкости с помощью пакета Comsol

Multiphysics 5.4, когда загрязняющее вещество имеет плотность меньше плотности воды. Решается 2D-уравнение диффузии, когда в начальный момент вещество с высокой концентрацией сосредоточено в круге заданного радиуса. Исследуется зависимость концентрации от радиальной координаты в произвольный момент времени, время жизни пятна загрязнения, в котором концентрация превосходит пороговую, и максимальный размер пятна загрязнения. Для больших значений пороговой концентрации достигнуто совпадение с аналитическими результатами.

Моделирование полей порового давления нефтяного месторождения методом граничных элементов с учетом адаптации на результаты гидродинамических исследований скважин

К. И. Кречетов

Доклад на семинаре 21 мая 2020 г.

Исследуется применимость метода граничных элементов в области моделирования поля порового давления нефтяного месторождения. Предложен и протестирован способ адаптации на результаты гидродинамических исследований скважин. Представлена модель горизонтальной скважины с многостадийным гидроразрывом пласта для случая стационарного потока. Введен скин-фактор для горизонтальных скважин и горизонтальных скважин с многостадийным гидроразрывом пласта.

Асимптотический анализ формул для частот колебаний стержней

Г. М. Агаев

Доклад на семинаре 26 мая 2020 г.

При изучении свободных продольных и поперечных колебаний стержня для частот получаются трансцендентные уравнения, которые не имеют аналитического решения. В данной работе их решения находятся с помощью асимптотических и численных методов. Получены приближенные формулы для частот продольных колебаний стержня с закрепленным и упруго подкрепленным концами, поперечных колебаний консольной балки и балки с грузом на конце. Приближенные решения сравнивают с численными решениями частотных уравнений.

Обоснование выбора элементов и расчет параметров механизма выдвижения датчика для роботизированного диагностического комплекса

Д. Л. Грохольский

Доклад на семинаре 26 мая 2020 г.

Коррозия металлических трубопроводов наносит ущерб экономике. Для ее предотвращения ведется инновационная разработка роботизированного диагностического комплекса, который с помощью датчика производит неразрушающий мониторинг трубопроводов. В случае обнаружения повреждения датчик выдвигается для диагностики.

Рассмотрен механизм выдвижения датчика в трубопроводах диаметром от 530 до 720 мм и рассчитана линейная скорость выдвижения. Для мотор-редуктора, осуществляющего выдвижение, были определены необходимый крутящий момент и скорость вращения.

ОБ АВТОРАХ

Агаев Гасым Микаилович — студент 5-го курса кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: асимптотические методы, колебания упругих тел. Научный руководитель — проф. С. Б. Филиппов. E-mail: agaev.gasym@yandex.ru

Бауэр Светлана Михайловна — доктор физико-математических наук, профессор математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: биомеханика, механика тонкостенных конструкций, математическое моделирование. E-mail: s_bauer@mail.ru

Васильев Григорий Павлович — студент 5-го курса кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: асимптотические методы, колебания упругих тел, вычислительная механика. Научный руководитель — доц. А. Л. Смирнов. E-mail: vasiliev.gregory@gmail.com

Глухова Екатерина Сергеевна — студентка 4-го курса бакалавриата кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: процессы диффузии, вычислительная механика. Научный руководитель — доц. А. Л. Смирнов. E-mail: ekaterina.181194@yandex.ru

Гоголева Елена Владимировна — студентка 1-го курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: квантовая теория поля, задачи теории критического поведения. Научный руководитель проекта — доц. Н. М. Гулицкий. E-mail: st047536@student.spbu.ru

Грохольский Дмитрий Леонидович — студент 4-го курса бакалавриата кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: теоретическая механика. Научный руководитель — проф. П. Е. Товстик. E-mail: st033713@student.spbu.ru

Дзебисашвили Георгий Тамазович — студент 2-го курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: теория оболочек. Научный руководитель — проф. С. Б. Филиппов. E-mail: d-g-t@bk.ru

Додонов Виктор Владимирович — студент 1-го курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: аналитическая механика, космодинамика, неголономная механика, задачи оптимального управления. Научный руководитель — проф. М. П. Юшков. E-mail: v_dod@mail.ru

Евдокименко Валентина Алексеевна — студентка 1-го курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: деформационное старение, механика полимеров, теория ползучести. Научный руководитель — канд. физ.-мат. наук А. Р. Арутюнян.
E-mail: st037622@student.spbu.ru

Казаринов Никита Андреевич — инженер Петербургского государственного университета путей сообщения. Область научных интересов: динамическое разрушение, механика трещин, прочность материала. E-mail: nkazarinov@gmail.com

Карачева Надежда Владимировна — студентка 4-го курса бакалавриата кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: теория тонкостенных конструкций, асимптотические методы. Научный руководитель — проф. С. Б. Филиппов.
E-mail: nadya_karacheva@mail.ru

Ковалевский Николай Михайлович — студент 1-го курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: сплавы с памятью формы. Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук С. А. Пулькин. E-mail: koval2012.ru@gmail.com

Кречетов Константин Игоревич — студент 4-го курса бакалавриата кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: математическое моделирование в нефтегазовом деле, оптимизация процессов и вычислений, прогнозирование дебита жидкости и нефти. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр. E-mail: dyh-174@mail.ru

Кручинина Анна Павловна — ассистент кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Область научных интересов: биомеханика движения, задачи оптимального управления, технологии виртуальной реальности. Научные руководители — доц. А. Г. Якушев, проф. В. В. Александров. E-mail: a.kruch@moids.ru

Крылова Алиса Сергеевна — студентка 4-го курса бакалавриата кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: теория тонкостенных конструкций, асимптотические методы. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр. E-mail: krylovaalice@gmail.com

Кулижников Дмитрий Борисович — студент 1-го курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: теоретическая механика, асимптотические методы, теория колебаний. Научный руководитель — проф. П. Е. Товстик.
E-mail: dima.kulizhnikov@mail.ru

Кучеренко Денис Валерьевич — студент 1-го курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, выпускник кафедры математической теории упругости и биомеханики механико-матема-

тического факультета Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. Область научных интересов: пороупругость, биомеханика. Научный руководитель — проф. М. В. Вильде. E-mail: denismbl@mail.ru

Лебедева Ксения Михайловна — выпускница кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, студентка 1-го курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: топологическая оптимизация образцов для испытаний. Научный руководитель — доц. В. Г. Киселев. E-mail: st079277@student.spbu.ru

Муслимова Фарангиз Санжаровна — студентка 4-го курса бакалавриата кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: теория тонкостенных конструкций, асимптотические методы. Научный руководитель — проф. С. Б. Филиппов.
E-mail: farangiz_01.12.97@mail.ru

Смирнов Александр Андреевич — студент 1-го курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Научные интересы: механика разрушения, теория упругости. Научный руководитель — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Н. А. Казаринов. E-mail: alex.rasmirnus@gmail.com

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, стажер-исследователь Института проблем машиноведения Российской академии наук. Область научных интересов: аналитическая механика, теория механических колебаний, динамика твердого тела, устойчивость равновесия и движения, оптимизация механических систем. E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

Смольников Борис Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, старший научный сотрудник Инсти-

тута проблем машиноведения Российской академии наук. Область научных интересов: общая механика, биомеханика и робототехника, движение космических объектов, теория управления. E-mail: smolnikovba@yandex.ru

Филиппов Сергей Борисович — доктор физ.-мат. наук, профессор математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: механика тонкостенных конструкций, асимптотические методы. E-mail: s_b_filippov@mail.ru

Япарова Елизавета Николаевна — инженер-исследователь кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: сплавы с памятью формы. Научный руководитель — проф. А. Е. Волков. E-mail: erunyauve@mail.ru

УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА, ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ в 2019–2020 гг.

Кручинина Анна Павловна — канд. физ.-мат. наук, МГУ, 2019. Научные руководители — доц. А. Г. Якушев, проф. В. В. Александров.

SUMMARIES

Smolnikov B. A., Smirnov A. S. **A new triangle in the problems of classical mechanics and biodynamics**

The article considers the problem of finding the most miscellaneous, that is the most asymmetric triangle. The issues of various quality criteria formation related to maximizing the differences of angles or sides of triangle that characterize the degree of its asymmetry are discussed. A detailed analysis of both additive and multiplicative criteria is carried out, during which their advantages and disadvantages are revealed. It is shown that the quality criterion based on maximizing the product of triangle sides differences is the most adequate, and as a result of its use, a specific configuration of the triangle can be obtained. In addition, practical applications of the most asymmetric triangle are discussed, related both to the problem of passive stabilization of Earth's artificial satellite in circular orbit in a Newtonian force field and to the biodynamics of human's arm. The obtained results allow us to conclude that it is advisable to use a similar multiplicative criterion in other optimization problems in mathematics and mechanics.

MSC class: 70E99

Keywords: triangle, asymmetry degree, additive and multiplicative quality criteria, Earth's artificial satellite, human arm.

References

1. *Volterra V.* Theory of functionals, integral and integro-differential equations. Moscow, Nauka, 1982. 304 p. [in Russian].
2. *Moiseev N. N.* Mathematical problems of system analysis. Moscow, Nauka, 1981. 488 p. [in Russian].
3. *Sarkisyan S. A., Akhundov V. M., Minaev E. S.* Large technical systems: Analysis and development forecast. Moscow, Nauka, 1977. 350 p. [in Russian].
4. *Nogin V. D.* Decision making under many criteria. St. Petersburg, UTAS, 2007. 104 p. [in Russian].
5. *Koryachko V. P., Kureichik V. M., Norenkov I. P.* Theoretical fundamentals of CAD. Moscow, Energoatomizdat, 1987. 400 p. [in Russian].
6. *Belkov V. N., Lanshakov V. L.* Automated design of technical systems. Moscow, Publishing house of the Academy of Natural Sciences, 2009. 144 p. [in Russian].

7. *Ventsel E. S.* Elements of dynamic programming. Moscow, Nauka, 1964. 176 p. [in Russian].

8. *Lelikov O. P.* Fundamentals of calculation and design of parts and components of machines. Synopsis of the course of lectures "Machine details". Moscow, Mashinostroenie, 2007. 464 p. [in Russian].

9. *Merkin D. R, Smolnikov B. A.* Applied problems of the dynamics of a rigid body. St. Petersburg, St. Petersburg University, 2003. 534 p. [in Russian].

10. *Smolnikov B. A., Smirnov A. S.* A new optimization criterion in the Homan problem // XII Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics. Collection of works. In 4 vols. Vol. 1. General and applied mechanics. 2019. P. 266–268 [in Russian].

11. *Markeev A. P.* Theoretical mechanics. Moscow, Izhevsk, RCD, 2007. 592 p. [in Russian].

12. *Mekhanik N. S.* Fundamentals of plastic anatomy. Moscow, Iskusstvo, 1958. 350 p. [in Russian].

Smirnov A. A., Kazarinov N. A. **Dynamic fracture effects in discrete systems**

The work considers solution of the problem of linear oscillator chain movement due to pulse loading. The obtained solution provided possibility to study the effect of the chain failure and to compare behavior of discrete and continuum models with respect to the system fracture. Classical continuum models cannot account for a possible discrete nature of the material structure and thus some important effects can be neglected by error. This is the main problem that is addressed in the work. In order to investigate the dynamic fracture effects using relatively simple model, failure of a linear oscillator due to short duration loading was considered. The fracture delay phenomenon was investigated using analytical solution of the problem. The dynamic fracture of an oscillator chain with arbitrary finite number of elements was studied in the work. Previous studies of the oscillator chains were mostly focused on infinite chains and the fracture problems were not investigated. The motion equations for the oscillator chain subjected to pulse loading were analytically deduced, which is also a new result.

MSC class: 74A45

Keywords: dynamic fracture, discrete models, oscillator chain, pulse loading, fracture delay.

References

1. *Kalthoff J. F., Shockey D. A.* Instability of cracks under impulse loads // J. Appl. Phys. 1977. Vol. 48. No. 3. P. 986–993.
2. *Slepyan L. I.* Unsteady elastic waves. Leningrad, Sudostroenie, 1972. 376 p. [in Russian].
3. *Slepyan L. I.* Mechanics of cracks. Leningrad, Sudostroenie, 1990. 296 p. [in Russian].
4. *Trubetskov D. I., Rozhnev A. G.* Linear oscillations and waves. Moscow, Fizmatlit, 2001. 465 p. [in Russian].
5. *Petrov Yu. V., Gruzdkov A. A., Kazarinov N. A.* Features of the dynamic fracture of one-dimensional linear chains // Doklady Physics. 2008. Vol. 423. No. 1. P. 51–55. [in Russian].

Smirnov A. S., Smolnikov B. A. **Catenary optimization**

The main geometric and mechanical properties of one of the most well-known lines in the mechanics — the catenary, are discussed in the article. Catenary is realized in everyday life and technology at the level of millennia in the form of threads, ropes, ropes, ropes, etc. The appearance of new materials has significantly increased the strength of these flexible power cells, so that they are increasingly used in a wide variety of fields of technology, technology and construction. The question about the best use of long flexible power elements in practical designs naturally arises. These issues are the subject of this work, which sets and solves a number of problems on the best suspension of a heavy flexible thread (imitating a power line cable). Much attention is paid to the construction and selection of the quality criterion of such suspension. The obtained results may be of practical interest for the developers and builders of power lines, as well as for students of technical universities.

MSC class: 70C20

Keywords: catenary, tension force, sag arrow, equal-strength line, optimization criterion.

References

1. *Rosenberger F.* History of physics. Moscow, Leningrad, GTTI, 1934. 1270 p. [in Russian].
2. *Smolnikov B. A.* Mechanics in the history of science and society. Moscow, Izhevsk, RCD, 2014. 608 p. [in Russian].
3. Designer reference / Ed. by A. A. Umansky. Moscow, Gosstroyizdat, 1960. 1040 p. [in Russian].
4. *Dukelsky A. I.* Suspension ropeways and cable cranes: a textbook for engineering universities. Moscow, Mashgiz, 1951. 397 p. [in Russian].
5. *Vygodsky M. Ya.* Handbook of higher mathematics. Moscow, Nauka, 1977. 872 p. [in Russian].
6. *Starzhinsky V. M.* Theoretical mechanics. Moscow, Nauka, 1980. 464 p. [in Russian].
7. *Potishko A. V., Krushevskaya D. P.* Handbook of engineering graphics. Kiev, Budivelnik, 1983. 264 p. [in Russian].
8. *Idelchik V. I.* Electrical systems and networks: a textbook for high schools. Moscow, Energoatomizdat, 1989. 592 p. [in Russian].
9. *Golozov N. V.* Using catenary in constructions // Technique and construction technology. 2015. No. 1. P. 13–19 [in Russian].
10. *Beletsky V. V., Levin E. M.* Dynamics of space cable systems. Moscow, Nauka, 1990. 329 p. [in Russian].
11. *Voloshenyuk O. L., Pirozhenko A. V., Khramov D. A.* Space cable systems — a promising area of space engineering and technology // Space science and technology. 2011. Vol. 17. No. 2. P. 32–44 [in Russian].
12. *Danilenko A. V., Yolkin K. S., Lyagushina S. Ts.* Project of Russian program on technology development of prospective space tethers applications // Actual problems of aviation and aerospace systems: processes, models, experiment. 2016. Vol. 21. No. 1 (42). P. 96–101.
13. *Smolnikov B. A., Leontev V. A.* Elements of structural mechanics of orbital cable structures // Modern engineering: Science and education. 2013. No. 3. P. 1020–1031 [in Russian].
14. *Shcherbakov V. P.* Applied thread mechanics. Moscow, MSTU, 2007. 301 p. [in Russian].
15. *Lurie A. I.* Analytical mechanics. Moscow, Fizmatlit, 1961. 824 p. [in Russian].
16. *Kachurin V. K.* Flexible strings with small arrows. Moscow, GITTL, 1956. 224 p. [in Russian].
17. Strength, stability, vibrations. In 3 vols. Vol. 1 / Eds I. A. Birger, Ya. G. Panovko. Moscow, Mashinostroenie, 1968. 567 p. [in Russian].

18. *Merkin D. R.* Introduction to mechanics of flexible thread. Moscow, Nauka, 1980. 240 p. [in Russian].
19. *Ponomaryov K. K.* Compilation of differential equations. Minsk, Vyshejshaya shkola, 1973. 560 p. [in Russian].
20. *Bermant A. F., Aramanovich I. G.* Short course of mathematical analysis. St. Petersburg, Lan, 2005. 736 p. [in Russian].
21. *Appel P.* Theoretical Mechanics: in 2 vols. Vol. 1. Statics. Moscow, Fizmatgiz, 1960. 515 p. [in Russian].
22. *Ilyin V. A., Poznyak E. G.* Fundamentals of mathematical analysis. Pt. 1. Moscow, Fizmatlit, 2005. 648 p. [in Russian].
23. *Volterra V.* Theory of functionals, integral and integro-differential equations. Moscow, Nauka, 1982. 304 p. [in Russian].
24. *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Energy-time criterion in the Homan problem // Transactions of seminar "Computer methods in continuum mechanics" 2018–2019. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2019. P. 6–20 [in Russian].
25. *Ventsel E. S.* Elements of dynamic programming. Moscow, Nauka, 1964. 176 p. [in Russian].
26. *Merkin D. R, Smolnikov B. A.* Applied problems of the dynamics of a rigid body. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2003. 534 p. [in Russian].

Dodonov V. V. **The motion of an Earth satellite after fixing the values of its acceleration in apogee**

When a satellite moves along an orbit its acceleration changes. Further motion in the case of constant acceleration after the moment of finding the satellite in apogee is being considered. This requirement is equivalent to second-order nonlinear non-holonomic constraint, which can be considered as a motion program, imposed to the satellite motion. Two possible solutions of the control problem are considered based on two theories of motion of non-holonomic systems with high order constraints, developed by S. A. Zegzhda and M. P. Yushkov. According to the first theory a consistent system of differential equations with respect to unknown generalized coordinates and Lagrange multipliers is constructed. The second theory is based on applying generalized Gauss principle.

MSC class: 70F25

Keywords: non-holonomic constraint, high-order constraint, satellite motion, constant acceleration, generalized Gauss principle, motion program.

References

1. *Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., Zegzhda S. A.* Mechanics of non-holonomic systems. A new class of control systems. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 2009. 329 p.
2. *Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* Equations of motion of non-holonomic systems and variational principles of mechanics. A new class of control systems. Moscow, Fizmatlit, 2005. 272 p. [in Russian].
3. *Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Soltakhanov Sh. Kh., Shatrov E. A.* Non-holonomic mechanics and control theory. Moscow, Fizmatlit, 2018. 234 p. [in Russian].
4. *Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P.* Generalization of Gauss principle to non-holonomic systems of higher orders // Dokladi Akademii Nauk SSSR. 1983. Vol. 269(6). P. 1328–1330 [in Russian].
5. *Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* Application of generalized Gauss principle for composing equations of motion for systems with third-order non-holonomic constraints // Vestnik of Leningrad University: Mathematics. Mechanics. Astronomy. 1990. Vol. 3(15). P. 77–83 [in Russian].
6. *Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* Equations of motion of a non-holonomic system in the presence of a second-order constraint // Vestnik of Leningrad University: Mathematics. Mechanics. Astronomy. 1991. Vol. 4 (22). P. 26–29 [in Russian].
7. *Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P.* Theoretical Mechanics. Moscow, Yurait, 2015. 592 p. [in Russian].
8. *Dodonov V. V., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* The motion of an Earth satellite after imposition of a non-holonomic third-order constraint // AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959 (1). P. 030006-1–030006-6. http://doi/10.1063/1.5034586.

Dzebisashvili G. T. Estimate of the frequencies of the cylindrical shell with rectangular cross-section joined with the plate

Vibrations of a cylindrical shell with the rectangular cross-section, which has one edge clamped and other one joined with the plate, are studied in the work. The relationship between frequencies of the shell

with and without the plate is found by means of the finite element analysis. The effect of the plate thickness on shell vibration frequencies is examined.

MSC class: 74K25, 74H45

Keywords: cylindrical shell, plate, vibrations, finite element method.

References

1. *Amosov A. S.* Free vibrations of a thin rectangular elastic tube // Vestnik of Saint Petersburg State University, Ser. 1. 2004. Iss. 1 (1). P. 67–72 [in Russian].
2. *Dzebisashvili G. T.* Free vibrations of cylindrical shells with the square cross-section. // Trudy seminara "Kompyuternye metody v mekhanike sploshnoy sredy" 2017–2018. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2019. P. 13–29 [in Russian].
3. *Dzebisashvili G. T., Filippov S. B.* Vibrations of cylindrical shells with rectangular cross-section // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1479.
4. *Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L.* Free vibrations of square elastic tubes with a free end // Mechanics Research Communications. 2020. Vol. 27, iss. 4. P. 457–464.

Karacheva N. V., Filippov S. B. **Vibrations of a beam with the variable cross-section**

The article analyzes the free vibrations of beam with the variable cross-section or step section, which have a hinge support. The fundamental frequencies of the beam with the variable cross-section obtained by means of the asymptotic and numerical methods are compared. For a beam with the step section the frequency equation is obtained in the explicit form. The results obtained allow us to conclude about the accuracy of the approximate values obtained for beams with variable cross-sections and step sections. The form of the beam cross-section was found, for which the fundamental frequency attains its maximum, if the mass of the beam is conserved.

MSC class: 74K10

Keywords: free vibrations, beam with the variable cross-section, asymptotic methods.

References

1. *Bauer S. M., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Filippov S. B.* Asymptotic methods in mechanics of solids. Moscow; Izhevsk, 2007. 357 p. [in Russian].
2. *Tovstik P. E., Bauer S. M., Smirnov A. L., Filippov S. B.* Asymptotic methods in the mechanics of thin-walled structures. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 1995. 182 p. [in Russian].
3. *Andrianov I. V., Danishevsky V. V., Ivanov A. O.* Asymptotic methods in the theory of beam and plate vibrations. Dnepropetrovsk: Pridneprovskaya State Academy of Construction and Architecture, 2010. 216 p. [in Russian].
4. *Kostin G. V., Saurin V. V.* An asymptotic approach to the problem of the free oscillations of a beam // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2006. Vol. 71, no. 4. P. 611–621.
5. *Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W.* Vibrations in Engineering. Moscow, Main editorial office of Physical and Mathematical literature of Nauka Publishing House, 1967. P. 420–426 [in Russian].
6. *Pomytkina E. S., Smirnov A. L.* Free transverse vibrations of a beam with variable parameters // Transactions of seminar "Computer methods in continuum mechanics" 2012–2013. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2013. P. 103–114 [in Russian].

Bauer S. M., Krylova A. S. **Deformation of spherical caps under internal pressure**

The work concerns the deformation of shallow nonuniform spherical shells under internal pressure. A mesh-like structure in a human eye called the Lamina Cribrosa may be modelled with such shell. It is known that the material of this shell is transversely isotropic or orthotropic. The elastic modulus in the thickness direction is significantly less than the tangential elastic modulus. The deformation of this shell is studied according to Ambartsumyan theory. The effect of material heterogeneity, orthotropy and curvature of a shell on the deflection is investigated. The obtained results are compared with the results of classical theory. In particular, it is shown that Ambartsumyan theory gives larger deflection value.

MSC class: 74K25

Keywords: transversely isotropic shallow shell, orthotropic shallow shell, Ambartsumyan theory, spherical caps.

References

1. *Iomdina E. N., Bauer S. M., Kotliar K. E.* Eye Biomechanics: Theoretical Aspects and Clinical Applications. Moscow, Real Time, 2015. 208 p., illustrations. [in Russian]
2. *Bushnell D.* Buckling of shells — Pitfall for designers // AIAA Journal, 1981. Vol. 19, No. 9. P. 1183–1226. [in Russian]
3. *Panov D. Yu., Feodosiev V. I.* On the equilibrium and loss of stability of shallow shells in the case of large displacement // Prikladnaia Matematika i Mekhanika. 1948. Vol. 12. P. 389–406 [in Russian].
4. *Cheo L. S., Reiss E. L.* Unsymmetric wrinkling of circular plates // Quart. Appl. Math. No. 31. 1971. P. 75–91.
5. *Coman C. D., Bassom A. P.* Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2016. Vol. 81. P. 8–18.
6. *Coman C. D.* Asymmetric bifurcations in a pressurised circular thin plate under initial tension // Mechanics Research Communications, 2013, Vol. 47. P. 11–17.
7. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Influence of boundary constraints on the appearance of asymmetrical equilibrium states in circular plates under normal pressure // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics, 2020. P. 38–46 [in Russian].
8. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Unsymmetrical buckling of orthotropic annular plates and spherical caps under internal pressure. In: Proceedings of the CompDyn 2019, Crete, Greece, 24–26 June 2019. URL: https://2019.compdyn.org. Vol. 2. P. 3556-3562.
9. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure. In: Altenbach H., Chroscielewski J., Eremeyev V., Wisniewski K., ed. Recent developments in the theory of shells. Advanced structured materials. Vol. 110. Cham: Springer; 2019. P. 79–89.
10. *Ambartsumyan S. A.* Theory of anisotropic plates. Newport Beach, California; Stamford: TECHNOMIC Publishing Co., 1970. 255 p.
11. *Ambartsumyan S. A.* General theory of anisotropic shells. Moscow, Nauka, 1974. 448 p. [in Russian].
12. *Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B.* Fundamentals of theory of stability of elastic systems. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2017. P. 30–37 [in Russian].

РЕФЕРАТЫ

УДК 531.3

Смольников Б. А., Смирнов А. С. **Новый треугольник в задачах классической механики и биодинамики** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2019–2020 гг. С. 5–21.

В статье рассматривается задача о нахождении самого разностороннего, т. е. наиболее асимметричного, треугольника. Обсуждаются вопросы формирования различных критериев качества, связанных с максимизацией разностей углов или сторон треугольника и характеризующих степень его асимметрии. Проводится подробный анализ как аддитивных, так и мультипликативных критериев, в ходе которого выявляются их достоинства и недостатки. Показано, что наиболее адекватным является критерий качества, основанный на максимизации произведения разностей сторон треугольника, и в результате его использования можно получить конкретную конфигурацию треугольника. Помимо этого, обсуждаются практические приложения наиболее асимметричного треугольника, связанные как с задачей о пассивной стабилизации искусственного спутника Земли на круговой орбите в ньютоновом силовом поле, так и с биодинамикой руки человека. Полученные результаты позволяют сделать вывод о целесообразности использования подобного мультипликативного критерия и в других задачах оптимизации в математике и механике.

Библиогр. 12 назв. Ил. 10.

Ключевые слова: треугольник, степень асимметрии, аддитивные и мультипликативные критерии качества, искусственный спутник Земли, рука человека.

УДК 534

Смирнов А. А., Казаринов Н. А. **Эффекты разрушения конечных цепочек линейных осцилляторов при импульсном нагружении** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2019–2020 гг. С. 22–34.

Работа посвящена решению задачи о динамическом разрушении систем с пространственной дискретностью. Данная задача представляет интерес как для фундаментальных исследований, так и для инженерных приложений. Исследования в области динамики разрушения проводятся в основном для континуальных сред, задачи о разрушении дискретных систем зачастую остаются неизученными. При этом, с одной стороны, дискретные системы обладают рядом особенностей разрушения при динамическом воздействии, а с другой — позволяют исследовать ряд эффектов динамического разрушения используя относительно простые модели. В представленной работе изучается разрушение гармонического осциллятора при кратковременных силовых воздействиях. Получены эффекты задержки разрушения, а также зависимости длины разрушающего импульса от времени разрушения. Также было получено аналитическое решение для задачи о колебаниях цепочки из произвольного числа одинаковых осцилляторов при действии произвольной силы, приложенной к свободному концу цепочки. Данное решение позволило продемонстрировать эффект разрушения, свойственный дискретным системам и не наблюдаемый в континуальных аналогах.

Ключевые слова: колебания, механика разрушения, дискретная модель, эффекты разрушения.

УДК 624.04

Смирнов А. С., Смольников Б. А. **Оптимизация цепной линии** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2019–2020 гг. С. 35–50.

В статье обсуждаются основные геометрические и механические свойства одной из самых известных в механике линий — цепной линии, которая уже на протяжении тысячелетий реализуется в быту и технике в виде нитей, веревок, тросов, канатов и т. д. Появление новых материалов позволило существенно повысить прочность этих гибких силовых элементов, благодаря чему они все чаще используются в самых различных областях техники, технологии и строительства. Естественно возникает вопрос о наилучшем использовании длинномерных гибких силовых элементов в практических конструкциях. Именно этим вопросам и посвящена настоящая работа,

в которой ставится и решается ряд задач о наилучшем подвешивании тяжелой гибкой нити (имитирующей кабель линии электропередач — ЛЭП). Большое внимание при этом уделяется построению и выбору критерия качества такого подвешивания. Полученные в работе результаты могут представлять практический интерес для разработчиков и строителей ЛЭП, а также для студентов технических вузов и университетов.

Библиогр. 26 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: цепная линия, сила натяжения, стрела провисания, равнопрочная линия, критерий оптимизации.

УДК 531.3

Додонов В. В. **Движение спутника Земли после фиксирования величины его ускорения в апогее** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2019–2020 гг. С. 51–63.

При движении спутника по орбите его ускорение меняется. Рассматривается дальнейшее движение спутника в случае, если с момента нахождения спутника в апогее начинает выполняться неизменность величины его ускорения. Это требование эквивалентно наложению на движение спутника нелинейной неголономной связи второго порядка, которую можно рассматривать как программу движения. В работе рассматриваются два возможных решения поставленной задачи управления, базирующиеся на двух теориях движения неголономных систем со связями высокого порядка, разработанных С. А. Зегждой и М. П. Юшковым. По первой теории строится совместная система дифференциальных уравнений относительно неизвестных обобщенных координат и множителей Лагранжа. Вторая теория базируется на применении обобщенного принципа Гаусса.

Библиогр. 8 назв. Ил. 8.

Ключевые слова: неголономная связь, связь высокого порядка, движение спутника, постоянное ускорение, обобщенный принцип Гаусса, программа движения.

УДК 534.1, 539.3

Дзебисашвили Г. Т. **Оценка частот колебаний цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением, сопряженной с пластиной** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2019–2020 гг. С. 64–72.

Рассматриваются колебания цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением, один край которой закреплен, а другой сопряжен с пластиной. Методом конечных элементов исследуется связь частот колебаний оболочки данного типа с частотами оболочки без пластины. Выявлена связь частот колебаний оболочки с пластиной различной толщины с частотами оболочки без пластины. Проанализировано влияние толщины пластины на частоты колебаний.

Библиогр. 4 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, пластина, колебания, метод конечных элементов.

УДК 534.014.1

Карачева Н. В., Филиппов С. Б. **Колебания стержня с переменным сечением** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2019–2020 гг. С. 73–83.

В статье исследуются свободные колебания шарнирно опертых балок с переменным и ступенчатым поперечными сечениями. Для балки с переменным поперечным сечением сравниваются первые частоты, полученные с помощью асимптотического метода, и частоты, найденные методом прогонки. Для балки со ступенчатым сечением в явном виде получено уравнение для определения частот. Целью работы является, в частности, определение закона изменения поперечного сечения, для которого при условии сохранения массы балки первая частота имеет наибольшее значение.

Ключевые слова: свободные колебания, стержень с переменным сечением, асимптотические методы.

УДК 539.3

Бауэр С. М., Крылова А. С. **Деформация пологих сферических сегментов под действием внутреннего давления** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2019–2020 гг. С. 84–99.

В работе изучается деформация решетчатой пластинки диска зрительного нерва — пологого сферического сегмента. Известно, что материал этой оболочки является трансверсально-изотропным или ортотропным. Модуль упругости материала в направлении толщины существенно меньше его тангенциальных модулей упругости. В связи с этим рассматривается деформация ортотропных неоднородных по радиусу пологих сферических сегментов в рамках нелинейной теории Амбарцумяна. Исследовано влияние степени неоднородности, анизотропии и величины радиуса кривизны на величину прогиба. Проведено сравнение полученных результатов с результатами классической теории. В частности, показано, что теория Амбарцумяна дает большую величину прогиба.

Ключевые слова: трансверсально-изотропные пологие оболочки, ортотропные пологие оболочки, теория Амбарцумяна.

Научное издание

ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2019–2020 гг.

Редактор *А. С. Яшина*
Корректор *Н. Е. Абарникова*
Компьютерная верстка *Е. М. Воронковой*
Обложка *Е. А. Соловьевой*

Подписано в печать 28.10.2020. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Усл. печ. л. 7,3.
Тираж 100 экз. Print-on-Demand. Заказ № .
Издательство Санкт-Петербургского университета.
199004, Санкт-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11.
Тел./факс +7(812) 328-44-22 publishing@spbu.ru

publishing.spbu.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5.