САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2018–2019 гг.

ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019

ББК 22.25
Т78

Редакционная коллегия:
канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ),
канд. физ.-мат. наук, доц. *И. М. Архипова* (отв. секретарь) (СПбГУ),
PhD, sr. lecturer *Е. И. Атрощенко* (Университет Чили, Сантьяго),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),
канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. Б. Воронкова* (СПбГУ),
д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Ф. Жигалко* (ПГУПС),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Михасев* (БГУ, Беларусь),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. П. Помыткин* (СПб ГУАП),
д-р техн. наук, проф. *С. В. Сорокин* (Университет Ольборга, Дания),
д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик* (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ),
канд. физ.-мат. наук *Д. В. Франус* (НПО «УниШанс»).

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета

Т78 **Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2017–2018 гг.** — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2019. — 146 с.
ISSN 2218-7421

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, собранных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Издание адресовано исследователям, специализирующимся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ББК 22.25

Семинар проводится
Санкт-Петербургским государственным университетом
совместно с Петербургским государственным университетом путей сообщения

Спонсор издания — некоммерческая организация
«Фонд содействия математическому образованию
и поддержки исследований в области точных наук “УниШанс”»
при финансовой поддержке инвестиционно-строительной группы «МАВИС»

ISSN 2218-7421 Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ЭНЕРГО-ВРЕМЕННОЙ КРИТЕРИЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ ГОМАНА

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

Дается новая постановка классической задачи астродинамики — задачи Гомана — об оптимизации двухимпульсного перехода космического летательного аппарата между двумя компланарными круговыми орбитами. В качестве критерия оптимизации принят энерго-временной показатель качества, равный произведению суммарного прироста характеристической скорости и длительности перехода. Приводится подробное решение этой задачи, в результате которого установлена зависимость оптимального значения величины безразмерной начальной скорости от соотношения между радиусами начальной и конечной орбит. На основе построенного решения сделаны численные оценки эффективности предложенного режима межорбитального перехода и проведено их сопоставление с аналогичными оценками для гомановского режима. В результате данных оценок можно сделать вывод о целесообразности использования энерго-временного критерия и в других задачах орбитальной космической навигации, для которых характерны высокая и даже сверхвысокая длительность планируемого перехода.

1. Введение

Известно, что впервые задача о баллистическом переходе космического летательного аппарата (КЛА) между двумя концентрическими круговыми орбитами была поставлена и решена немецким инженером В. Гоманом в 1925 г. [1–5]. Предложенное им решение оказывается вполне естественным и представляет собой полуэллиптическую траекторию, соприкасающуюся с начальной и конечной орбитами в точках A и B подачи импульсного приращения орбитальной скорости ΔV_A и ΔV_B (рис. 1). Довольно долгое время считалось, что этот гомановский полуэллипс минимизирует суммарный прирост характеристической скорости независимо от соотношения радиусов орбит R_A и R_B. Однако в 1959 г. было показано (Хелькер и Зильбер) [1, 5] (до них в 1937 г. аналогичное высказывание было сделано известным советским популяризатором кос-

Доклад на семинаре 3 апреля 2018 г.
© А. С. Смирнов, Б. А. Смольников, 2018

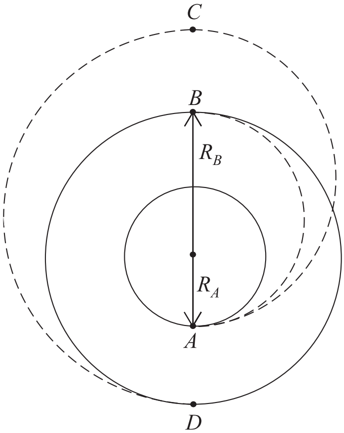


Рис. 1. Гомановская траектория

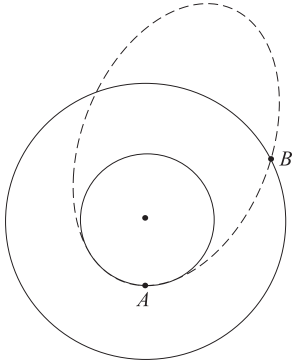


Рис. 2. Секущая траектория

монавтики А. А. Штернфельдом), что гомановский двухимпульсный переход является оптимальным только для $R_B/R_A < 11.94$ (в этом диапазоне лежат орбиты всех планет вплоть до Сатурна). Если же $R_B/R_A > 11.94$, то более выгодным является трехимпульсный биэллиптический переход ACD. Однако в этом случае небольшой выигрыш в суммарной величине характеристической скорости $\Delta V = \Delta V_A + \Delta V_C + \Delta V_D$ сопровождается, как правило, кратным возрастанием длительности перехода, что резко снижает его ценность и не позволяет считать его оптимальным в реальном, а не формальном смысле [2]. К сожалению, и гомановский двухимпульсный переход при $R_B/R_A < 11.94$ также является весьма длительным, так как движение КЛА в окрестности точки B сравнительно медленное и заметно затягивает общую продолжительность перехода. В связи с этим некоторые авторы [3] предлагают отказаться от гомановских полуэллипсов и использовать двухимпульсные переходы по секущему эллипсу, показанному на рис. 2. Ясно, что в этой схеме за счет увеличения суммарного импульса V_Σ время перехода может быть сведено к сколь угодно малой величине [6]. Однако при этом не совсем понятно, какими соображениями следует руководствоваться при конкретном выборе секущего эллипса.

2. Формирование критерия оптимизации

Из сказанного следует, что основными показателями эффективности перехода между двумя круговыми орбитами являются требуемый ресурс характеристической скорости $J_V = V_\Sigma$ и предопределяемая им продолжительность перехода $J_\tau = \tau_{AB}$. При этом ясно, что увеличение первого критерия J_V в определенных пределах позволяет снизить второй критерий J_τ и наоборот. Таким образом, для достижения максимальной эффективности перехода желательно минимизировать оба критерия J_V и J_τ совместно, т. е. с учетом их влияния друг на друга. Формально такую минимизацию целесообразно проводить не раздельно, а путем синтеза (объединения) частных критериев J_V и J_τ в некоторую «композицию», отражающую их функциональное поведение, т. е. возрастающую при их росте и убывающую при их уменьшении. Конкретный вид такой композиции может быть различным, и он сильно зависит от профессиональной компетенции самого исследователя, анализирующего рассматриваемую оптимизационную задачу. Не углубляясь здесь в детали так называемого «композиционного исчисления», намеченного в 1910 г. итальянским математиком и механиком В. Вольтерра, назовем здесь два простейших класса алгебраических композиций:

а) аддитивные композиции, представляющие собой линейную свертку исходных частных критериев J_i: $J = \sum \lambda_i J_i$;

б) мультипликативные композиции, которые можно представить в виде произведения исходных критериев J_i: $J = \prod J_i$.

Класс аддитивных композиционных критериев нашел довольно широкое применение в теории оптимального управления, несмотря на свой существенный недостаток — необходимость подбора весовых коэффициентов λ_i [7]. Этого недостатка лишены мультипликативные композиционные критерии (МКК), позволяющие более гибко синтезировать и корректировать результирующий критерий.

В рассматриваемой оптимизационной задаче естественно синтезировать именно мультипликативный композиционный критерий

$$J_{AB} = J_V J_\tau = V_\Sigma \tau_{AB}, \qquad (1)$$

который имеет физический смысл энерго-временного критерия (ЭВК) эффективности, и к тому же уже давно используется в задачах наземной транспортной логистики при проектировании дальних маршрутов судовых и автомобильных перевозок, авиарейсов и пр. Поэтому его целесообразно применять и в задачах космической навигации, где вопросы минимизации как длительности межорбитального перехода, так и расхода бортовых энергоресурсов имеют крайне важное значение. По своей размерности предлагаемый критерий (1) определяет некоторую «длину пути», преодолеваемую КЛА между начальным и конечным состояниями, и именно ее целесообразно использовать для оценки качества дальних, т. е. межпланетных переходов в задачах астродинамики. Кстати, в последнее время подобный ЭВК используется и в задачах технической механики, где требуется, например, гасить свободные колебания элементов конструкций пассивным [8] или активным [9] способом. Стоит также отметить, что МКК нашли применение в 1960-е гг. и в задачах динамического программирования [10].

Чтобы убедиться в адекватности построенного МКК, следует проделать численные расчеты, выявляющие роль каждого из парциальных критериев J_V и J_τ в поведении оптимизируемой траектории перехода. Возвращаясь к выражению (1), нужно иметь в виду, что в качестве дуги AB может использоваться как дуга эллипса, так и дуга параболы или гиперболы, касательная к начальной орбите в точке A. Учитывая, что параболическая траектория является пограничной между эллиптической и гиперболической, ограничимся рассмотрением лишь этих двух дуг, выбирая в качестве параметра семейства дуг величину начальной скорости V_A в точке A. Уравнение конического сечения, как известно, есть

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\psi}, \tag{2}$$

где p — параметр, e — эксцентриситет, r — радиальное расстояние КЛА от центра притяжения, а ψ — его истинная аномалия на переходной орбите. Согласно [6], имеем следующую зависимость элементов орбиты от начальных условий движения:

$$p = \frac{R_A^2 V_A^2 \cos^2\alpha}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \left(V_A^2 - \frac{2\mu}{R_A}\right)\frac{p}{\mu}}, \tag{3}$$

где α — угол наклона вектора начальной скорости V_A к местному горизонту, а μ — гравитационный параметр притягивающего центра. Учитывая, что в рассматриваемой схеме перехода $\alpha = 0$, и вводя вместо V_A безразмерную величину начальной скорости

$$\nu = \frac{V_A}{V_{Ac}}, \quad V_{Ac} = \sqrt{\frac{\mu}{R_A}}, \tag{4}$$

где V_{Ac} — скорость на начальной круговой орбите, запишем

$$p = \nu^2 R_A, \quad e = \nu^2 - 1. \tag{5}$$

При введенных обозначениях уравнение (2) примет вид

$$r = \frac{\nu^2 R_A}{1 + (\nu^2 - 1)\cos\theta}. \tag{6}$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое значение начального импульсного прироста $\Delta V_A = V_A - V_{Ac} = V_{Ac}(\nu - 1)$, при котором достигается минимум ЭВК (1), т. е.

$$J_{AB} = (\Delta V_A + \Delta V_B)\,\tau_{AB} = \min_{\nu}. \tag{7}$$

Здесь ΔV_B — импульсное приращение скорости в точке B, необходимое для перевода КЛА с переходной дуги AB на круговую конечную орбиту радиуса R_B.

3. Прирост характеристической скорости

Для вычисления начального ΔV_A и конечного ΔV_B приращений орбитальной скорости обратимся к схеме перехода КЛА между двумя круговыми орбитами, приведенной на рис. 1. Полагаем, что в точке A исходной орбиты КЛА, имеющий круговую скорость V_{Ac}, получает прирост скорости ΔV_A, переходя после этого на дугу траектории с начальной скоростью $V_A = V_{Ac} + \Delta V_A$. В зависимости от величины ΔV_A эта дуга может быть эллиптической, параболической или гиперболической, и целью дальнейшего исследования является выбор той из них, на которой достигается минимум критерия (1). Рассматривая в качестве главной управляющей величины значение ΔV_A, выразим через нее все прочие кинематические характеристики процесса, т. е. V_B, ΔV_B, и, наконец, его общую энергетическую затрату $\Delta V = \Delta V_A + \Delta V_B$, также зависящую от ΔV_A. Для этого воспользуемся интегралами энергии и момента количества движения, устанавливающими зависимость величин V_B, ΔV_B от V_A и ΔV_A [5]:

$$V_B^2 = V_A^2 + \frac{2\mu}{R_B} - \frac{2\mu}{R_A} = V_A^2 + 2V_{Bc}^2 - 2V_{Ac}^2. \tag{8}$$

Учитывая, что $V_{Bc}^2 = \rho V_{Ac}^2$, где $\rho = R_A/R_B$ — соотношение радиусов начальной и конечной орбит, и переходя к безразмерным значениям всех скоростей путем деления их на V_{Ac}, найдем отсюда:

$$\widetilde{V}_B = \frac{V_B}{V_{Ac}} = \sqrt{\nu^2 + 2(\rho - 1)}, \tag{9}$$

где тильда «$\sim$» означает указанное обезразмеривание скоростей. Далее возводя в квадрат тождество $\Delta\underline{\widetilde{V}}_B = \underline{\widetilde{V}}_{Bc} - \underline{\widetilde{V}}_B$, получаем:

$$\Delta\widetilde{V}_B^2 = \widetilde{V}_{Bc}^2 + \widetilde{V}_B^2 - 2\widetilde{V}_{Bc}\widetilde{V}_B\cos\beta, \tag{10}$$

где β — угол между $\underline{\widetilde{V}}_B$ и $\underline{\widetilde{V}}_{Bc}$. Из интеграла момента следует, что $\widetilde{V}_B\cos\beta = \nu\rho$, так что значение $\Delta\widetilde{V}_B$ примет вид:

$$\Delta\widetilde{V}_B = \sqrt{\nu^2 + 3\rho - 2\left(1 + \nu\rho^{3/2}\right)}. \tag{11}$$

В результате суммарный прирост скорости перехода будет:

$$\Delta\widetilde{V}_\Sigma = \Delta\widetilde{V}_A + \Delta\widetilde{V}_B = \nu - 1 + \sqrt{\nu^2 + 3\rho - 2\left(1 + \nu\rho^{3/2}\right)}. \tag{12}$$

Для удобства дальнейших сопоставлений найдем аналогичное выражение для гомановского перехода, когда дуга AB представляет собой полуэллипс. Тогда, согласно (6), имеем:

$$\nu^2 = \frac{2}{1+\rho}. \tag{13}$$

Полагая, что в этом случае $\beta = 0$, вместо (11) получим:

$$\Delta\widetilde{V}_{Bh} = \sqrt{\rho} - \rho\sqrt{\frac{2}{\rho+1}}, \tag{14}$$

так что суммарный прирост скорости будет следующим:

$$\Delta\widetilde{V}_h = \sqrt{\rho} + (1-\rho)\sqrt{\frac{2}{\rho+1}} - 1. \tag{15}$$

Как показали А. А. Штернфельд, а затем Р. Хелькер и Р. Зильбер [5], эта зависимость неожиданно оказалась немонотонной, достигая максимума $\Delta\widetilde{V}_{h\,\max} \approx 0.536$ в точке $\rho = 0.064$, а затем стремясь при $\rho \to 0$ к значению $\Delta\widetilde{V}_h = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$.

4. Время перехода по секущей траектории

Для формирования второго сомножителя в критерии (7) необходимо рассмотреть два альтернативных варианта переходной орбиты — эллиптический и гиперболический, выбрав из них тот, который отвечает минимуму принятого ЭВК. В первом варианте для вычисления безразмерного времени перехода $\widetilde{\tau}_{AB}$, отнесенного к периоду обращения T_A по начальной круговой орбите

$$\widetilde{\tau}_{AB} = \frac{\tau_{AB}}{T_A}, \quad T_A = \frac{2\pi R_A^{3/2}}{\sqrt{\mu}}, \tag{16}$$

следует воспользоваться уравнением Кеплера для эллиптической дуги AB [11]:

$$\widetilde{\tau}_{AB} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}T_A}\left(E_B - e\sin E_B\right) = \frac{1}{2\pi(2-\nu^2)^{3/2}}\left(E_B - e\sin E_B\right), \tag{17}$$

где $a = R_A/(1-e)$ — большая полуось эллипса перехода, а E_B — эксцентрическая аномалия точки B (рис. 3), связанная с истинной аномалией θ_B этой точки известным соотношением [12]:

$$\operatorname{tg}\frac{E_B}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\theta_B}{2} = \frac{\sqrt{2-\nu^2}}{\nu}\operatorname{tg}\frac{\theta_B}{2}. \tag{18}$$

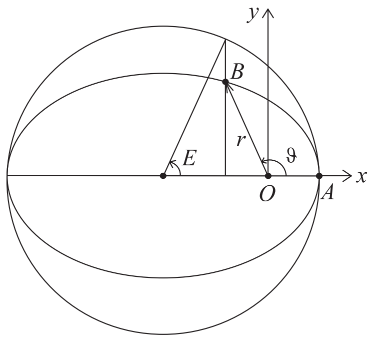


Рис. 3. Истинная и эксцентрическая аномалия

Остается выразить θ_B через R_B посредством уравнения (6). Имеем:

$$\cos\theta_B = \frac{\rho\nu^2 - 1}{\nu^2 - 1}, \quad \sin\theta_B = \frac{\nu}{\nu^2 - 1}\sqrt{[\nu^2(1+\rho) - 2]\,(1-\rho)},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\theta_B}{2} = \frac{\sin\theta_B}{1+\cos\theta_B} = \nu\sqrt{\frac{1-\rho}{\nu^2(1+\rho)-2}}, \tag{19}$$
$$\operatorname{tg}\frac{E_B}{2} = \sqrt{\frac{(2-\nu^2)(1-\rho)}{\nu^2(1+\rho)-2}},$$

после чего получаем

$$\sin E_B = \frac{2\operatorname{tg}\frac{E_B}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{E_B}{2}} = \frac{\sqrt{(2-\nu^2)\,[\nu^2(1+\rho)-2]\,(1-\rho)}}{\rho(\nu^2-1)}. \tag{20}$$

Последнее из этих выражений наглядно показывает ход изменения эксцентрической аномалии E_B в рассматриваемом диапазоне варьирования ν^2:

$$\frac{2}{1+\rho} \le \nu^2 \le 2. \tag{21}$$

На левом конце данного интервала траекторией перехода является гомановский полуэллипс, и ему отвечает согласно (19) $\operatorname{tg} E_B/2 = \infty$, т. е. $E_B = \pi$. На правом краю при $\nu^2 = 2$ переход осуществляется по параболе, которой отвечает $\operatorname{tg} E_B/2 = 0$, т. е. $E_B = 0$. Значению

$E_B = \pi/2$ отвечает, очевидно, $\operatorname{tg} E_B/2 = 1$, т. е. согласно (19)

$$\nu^2 = 2 - \rho. \tag{22}$$

Промежуточное значение ν^2 необходимо знать для расчета времени перехода согласно уравнению Кеплера (17). Действительно, согласно (20) мы можем выразить угол E_B, входящий в уравнение Кеплера, в следующем виде:

$$E_B = \begin{cases} \pi - \arcsin \dfrac{\sqrt{(2-\nu^2)\,[\nu^2(1+\rho)-2]\,(1-\rho)}}{\rho(\nu^2-1)}, \\ \dfrac{2}{1+\rho} \le \nu^2 \le 2-\rho \\ \arcsin \dfrac{\sqrt{(2-\nu^2)\,[\nu^2(1+\rho)-2]\,(1-\rho)}}{\rho(\nu^2-1)}, \quad 2-\rho \le \nu^2 \le 2 \end{cases}. \tag{23}$$

Именно эти главные значения должны фигурировать в общем выражении

$$E_B = \arcsin \frac{\sqrt{(2-\nu^2)\,[\nu^2(1+\rho)-2]\,(1-\rho)}}{\rho(\nu^2-1)}. \tag{24}$$

В результате длительность перехода по эллиптической дуге AB выразится как

$$\widetilde{\tau}_{AB} = \frac{1}{2\pi(2-\nu^2)^{3/2}} \left[\arcsin \frac{\sqrt{(2-\nu^2)\,[\nu^2(1+\rho)-2]\,(1-\rho)}}{\rho(\nu^2-1)} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{(2-\nu^2)\,[\nu^2(1+\rho)-2]\,(1-\rho)}}{\rho}\right]. \tag{25}$$

Чтобы найти длительность параболического перехода, следует перейти к пределу $\nu^2 \to 2$, в результате чего получим

$$\widetilde{\tau}_p = \lim_{\nu^2 \to 2} \widetilde{\tau}_{AB}(\nu) = \frac{1}{3\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \frac{2\rho+1}{\rho}. \tag{26}$$

Ясно, что это минимальное время перехода на классе эллиптических дуг AB. Максимальное же время достигается на другом конце интервала изменения ν, т. е. на гомановском полуэллипсе:

$$\widetilde{\tau}_h = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\rho + 1}{\rho} \right)^{3/2}. \tag{27}$$

Представляет интерес сопоставление продолжительности параболического $\widetilde{\tau}_p$ и гомановского $\widetilde{\tau}_h$ переходов. Запишем их отношение:

$$K_\tau(\rho) = \frac{\widetilde{\tau}_h}{\widetilde{\tau}_p} = \frac{3\pi}{4} \frac{\rho + 1}{2\rho + 1} \sqrt{\frac{\rho + 1}{1 - \rho}}. \tag{28}$$

На рис. 4 видно, что чем ближе радиусы начальной и конечной орбит (т. е. чем больше ρ), тем это различие больше, причем при $\rho = 0$ имеем $K_\tau = 3\pi/4 \approx 2.36$. Видно также, что при увеличении ρ от 0 до примерно 0.5 величина K_τ практически не меняется. Отношение потребных приростов при этом оказывается равным

$$K_V(\rho) = \frac{\Delta\widetilde{V}_h}{\Delta\widetilde{V}_p} = \frac{\sqrt{\rho} + (1 - \rho)\sqrt{\frac{2}{\rho+1}} - 1}{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3\rho - (2\rho)^{3/2}}}. \tag{29}$$

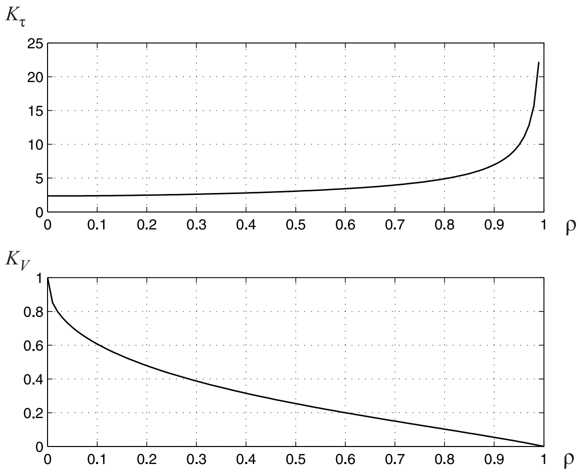


Рис. 4. Сопоставление параметров параболической траектории с гомановской

График данной зависимости также представлен на рис. 4. Из него хорошо видно, что при малых ρ эти приросты различаются не столь существенно, как соответствующие им длительности перехода, хотя с увеличением ρ они начинают различаться все сильнее. Эти сопоставления лишний раз свидетельствуют о том, что при небольших значениях ρ (т. е. при перелетах на дальние расстояния) гомановский переход уж точно нельзя считать эффективным для практического использования и для отыскания оптимальной траектории перелета более целесообразно использовать в качестве критерия эффективности компромиссный критерий типа (7).

Перейдем теперь к диапазону $2 \le \nu^2 < \infty$, в котором следует получить иное выражение для $\widetilde{\tau}_{AB}$, отвечающее гиперболической дуге переходной траектории. В этом случае имеем:

$$\begin{gathered} a = \frac{R_A}{\nu^2 - 2}, \quad \widetilde{\tau}_{AB} = \frac{1}{2\pi(2-\nu^2)^{3/2}}(e \operatorname{sh} H_B - H_B), \\ \operatorname{tg}\frac{H_B}{2} = \frac{\sqrt{\nu^2-2}}{\nu}\operatorname{tg}\frac{\theta_B}{2} = \sqrt{\frac{(\nu^2-2)(1-\rho)}{\nu^2(1+\rho)-2}}, \\ \operatorname{sh} H_B = \frac{\sqrt{(\nu^2-2)\left[\nu^2(1+\rho)-2\right](1-\rho)}}{\rho(\nu^2-1)}. \end{gathered} \tag{30}$$

Выражение для безразмерного времени перехода $\widetilde{\tau}_{AB}$ примет вид

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}_{AB} = \frac{1}{2\pi(\nu^2-2)^{3/2}} \Bigg[& \frac{\sqrt{(\nu^2-2)\left[\nu^2(1+\rho)-2\right](1-\rho)}}{\rho} - \\ & - \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{(\nu^2-2)\left[\nu^2(1+\rho)-2\right](1-\rho)}}{\rho(\nu^2-1)} \Bigg]. \end{aligned} \tag{31}$$

5. Анализ критерия оптимизации

Используя найденные выражения (12) и (25) для $\Delta\widetilde{V}_\Sigma$ и $\widetilde{\tau}_{AB}$, получаем для критерия (7) следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
J_{AB} = {} & \frac{\nu - 1 + \sqrt{\nu^2 + 3\rho - 2\left(1 + \nu\rho^{3/2}\right)}}{2\pi(2-\nu^2)^{3/2}} \times \\
& \times \left[\operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{(2-\nu^2)\left[\nu^2(1+\rho)-2\right](1-\rho)}}{\rho(\nu^2-1)} - \right. \\
& \left. - \frac{\sqrt{(2-\nu^2)\left[\nu^2(1+\rho)-2\right](1-\rho)}}{\rho} \right],
\end{aligned}
\tag{32}
$$

пригодное на интервале (21). Что же касается интервала $2 \leq \nu^2 < \infty$, то для него величина ЭВК будет

$$
\begin{aligned}
J_{AB} = {} & \frac{\nu - 1 + \sqrt{\nu^2 + 3\rho - 2\left(1 + \nu\rho^{3/2}\right)}}{2\pi(\nu^2-2)^{3/2}} \times \\
& \times \left[\frac{\sqrt{(\nu^2-2)\left[\nu^2(1+\rho)-2\right](1-\rho)}}{\rho} - \right. \\
& \left. - \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{(\nu^2-2)\left[\nu^2(1+\rho)-2\right](1-\rho)}}{\rho(\nu^2-1)} \right].
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Посредством (32) и (33) можно изучить поведение J_{AB} в диапазоне

$$
\frac{2}{1+\rho} \leq \nu^2 < \infty. \tag{34}
$$

Так, на левом конце этого диапазона при $\nu^2 \to 2/(1+\rho)$ имеем согласно (32):

$$
J_{AB}\left(\sqrt{\frac{2}{1+\rho}}\right) = \frac{(1+\rho)\left[\sqrt{2}(1-\rho) + \sqrt{1+\rho}\left(\sqrt{\rho}-1\right)\right]}{4\sqrt{2}\rho^{3/2}}. \tag{35}
$$

В точке $\nu = \sqrt{2}$, где происходит «стыковка» выражений (32) и (33), получаем

$$
J_{AB}(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3\rho - (2\rho)^{3/2}}}{3\sqrt{2}\pi\rho^{3/2}}(1+2\rho)\sqrt{1-\rho}\,. \tag{36}
$$

Наконец, при $\nu \to \infty$ имеем $J_{AB} \to \infty$. Ясно, что функция $J_{AB}(\nu)$

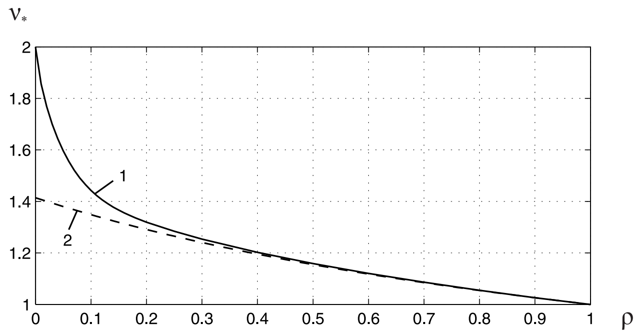


Рис. 5. Зависимость безразмерной начальной скорости от отношения радиусов начальной и конечной орбит: 1 — оптимальная по ЭВК траектория, 2 — гомановская траектория

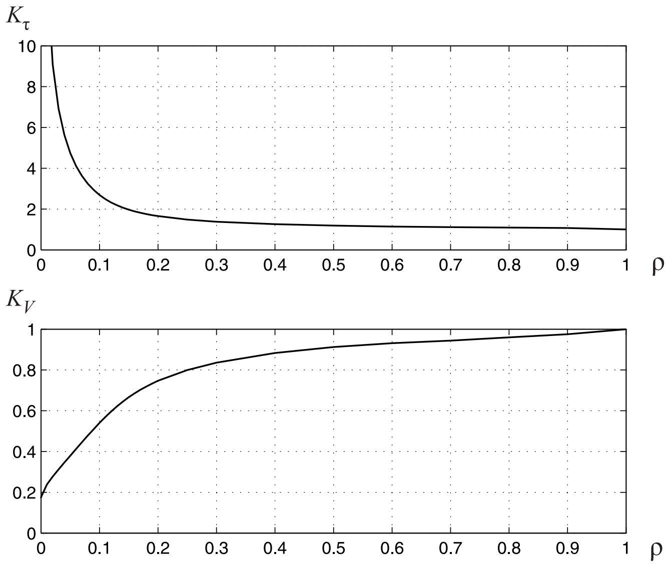


Рис. 6. Сопоставление параметров оптимальной по ЭВК траектории с гомановской

должна иметь точку минимума в диапазоне (34). Численное исследование зависимости $J_{AB}(\nu)$ при различных ρ позволяет построить график зависимости оптимального значения ν_* от ρ (рис. 5).

Из него видно, что при $\rho < 0.115$ (что отвечает $R_B/R_A > 8.696$) оптимальной оказывается гиперболическая траектория, а при $\rho > 0.115$ ($R_B/R_A < 8.696$) — эллиптическая. Видно также, что при значениях ρ, больших примерно 0.5 (при отношении радиусов орбит, меньшем двух), график практически не отличается от гомановского перехода. Таким образом, при перелетах на небольшие расстояния гомановский переход оказывается почти оптимальным и в смысле энерго-временного критерия качества (7).

На рис. 6 представлены зависимости $\widetilde{\tau}_h/\widetilde{\tau}_*$ и $\Delta\widetilde{V}_h/\Delta\widetilde{V}_*$, по которым видно, насколько больше время перелета и насколько меньше суммарный прирост скорости в гомановском варианте по сравнению с оптимальным по ЭВК при заданном значении ρ.

6. Заключение

Резюмируя результаты проведенного исследования, можно заключить, что использование в качестве критерия эффективности межорбитального перехода предложенного компромиссного критерия типа «время — энергия» исключает появление бесконечно удаленных точек в составе оптимальной траектории и дает более реалистичную основу для поиска оптимума как посредством применения ЭВК, так и путем «конструирования» иного многофакторного критерия качества. Такой мультипликативный критерий может учитывать, например, необходимость обхода опасных зон, лежащих на траектории межорбитального перехода, а также факторы, обусловленные целями и задачами планируемого перехода. Исходя из подобных соображений, возможно, стоит пересмотреть и конкретизировать критерии качества для многих квазиоптимальных режимов и траекторий межорбитальных переходов, которым посвящена обширная космическая литература [13–15].

Литература

1. *Дубошин Г. Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1971. 584 с.

2. *Левантовский В. И.* Механика космического полета в элементарном изложении. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Сейферт Г.* Космическая техника. М.: Наука, 1969. 728 с.
4. *Эрике К.* Космический полет. Т. 2. М.: Наука, 1971. 584 с.
5. *Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г.* Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.
6. *Мирер С. А.* Механика космического полета. Орбитальное движение. М.: Резолит, 2007. 270 с.
7. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 488 с.
8. *Смольников Б. А.* Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.
9. *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Оптимальное гашение свободных колебаний в линейных механических системах // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 3. С. 8–15.
10. *Вентцель Е. С.* Элементы динамического программирования. М.: Наука, 1964. 176 с.
11. *Меркин Д. Р., Смольников Б. А.* Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 532 с.
12. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. М., Ижевск: РХД, 2007. 592 с.
13. *Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. 702 с.
14. *Новоселов В. С.* Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1972. 317 с.
15. *Лоуден Д. Ф.* Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966. 152 с.

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ СТЕРЖНЯ В ВОЛНОВОМ ПОЛЕ КЛЕЙНА — ГОРДОНА

Л. А. Игушева

Рассматривается модель взаимодействия стержня постоянного поперечного сечения с упругой окружающей средой. В рамках задачи об ударе рассмотрены распространение и отражение волны от свободной границы стержня конечной длины. В задаче отражения волны от свободного конца стержня показана возможность эффекта откольного разрушения. В нескольких частных случаях найдены зависимости порогового значения амплитуды возмущающей силы от критического времени разрушения стержня и от длительности воздействия внешней силы. Обнаружен целый диапазон оптимальных частот воздействия, при которых происходит откольное разрушение стержня.

1. Введение

Модель взаимодействия элементов инженерных конструкций с упругой окружающей средой может быть применима во многих областях. Например, в настоящее время является актуальным изучение нанокомпозитов с включениями в виде волокон. Благодаря связи между матрицей полимера и включениями такие нанокомпозиты обладают удивительными механическими характеристиками, в частности высоким пределом прочности и большим значением модуля Юнга. Современные наноматериалы являются перспективными в авиастроении. Например, они обладают антистатическими свойствами и могут защищать самолет от ударов молний. В макромире одним из примеров является установка свай в строительстве. При этом очень важно знать, какие напряжения и перемещения возникают в свае, т. к. это позволит рассчитать нагрузки, которые сможет выдержать конструкция.

Существуют различные модели, описывающие взаимодействие деформируемых тел с окружающей их средой.

Доклад на семинаре 23 октября 2018 г.
© Л. А. Игушева, 2019

Л. И. Слепян [1] исследует бесконечный стержень на упругом основании, на который действует сосредоточенная нагрузка, и показывает, что при наличии упругого основания существенные деформации локализуются вблизи приложения нагрузки. Кроме того, Л. И. Слепян рассматривает влияние окружающей среды — идеальной сжимаемой жидкости на распространение нестационарных волн в упругом теле. Показано, что окружающая среда влияет на волновые процессы, происходящие в упругом теле при продольных колебаниях, а именно, в жидкость излучаются волны давления, уносящие часть энергии упругой волны, т. е. имеет место диссипация энергии.

В книге Л. В. Никитина [2] проанализировано множество задач, связанных с динамикой упругих стержней, на которые действуют силы сухого внешнего трения. В случае внешнего сухого трения учтены удар с постоянным напряжением по полубесконечному стержню, удар с постоянной скоростью по полубесконечному стержню, удар с постоянной скоростью по конечному стержню и др. Найдены решения этих задач. Кроме этого, рассмотрена динамика стержня, заключенного в обойму. В данной задаче сила контактного трения прямо пропорциональна продольной деформации в стержне. Найдено решение этого уравнения в случае, когда на конце стержня задано сжимающее напряжение. Отдельно обсужден частный случай, когда происходит удар по стержню, осуществляемый мгновенным приложением на его конце сжимающего напряжения, которое впоследствии поддерживается постоянным.

В статье В. Г. Баженова [3] разбирается экспериментальная методика определения силы сопротивления внедрению деформируемого ударника в мягкую грунтовую среду в обращенной постановке. Также моделируется осесимметричная задача о взаимодействии цилиндрического тела с мягкой грунтовой средой, заключенной в деформируемую оболочку.

В работе А. Аллена [4] исследуется динамика проникания снаряда в песок. Экспериментальные данные сравниваются с двумя теоретическими моделями взаимодействия снаряда конической формы с песком: классической модели проникания Робина — Эйлера и новой модели.

В статье [5] рассматривается задача о проникании в грунт упруго-деформируемого индентора. Сила сопротивления прониканию задается квадратичной зависимостью от скорости проникания. Деформированное состояние в пределах каждого участка предполагается однородным.

Как показано выше, взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой встречается повсеместно в современном мире, и есть различные модели описания этого взаимодействия. В данной работе мы будем обсуждать взаимодействие стержня с упругой средой.

2. Объект исследования, постановка задачи

Стержень с постоянным поперечным сечением совершает продольные колебания. Со стороны среды на стержень действуют силы сопротивления прямо пропорциональные перемещению (рис. 1).

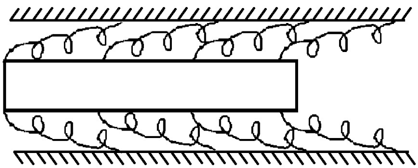


Рис. 1. Элемент стержня в упругой окружающей среде

Мы вычислим перемещения и напряжения, возникающие в стержне при динамическом нагружении. Затем рассмотрим распространение и отражение волны от свободной границы стержня конечной длины. Проанализируем возможность возникновения явления откола в стержне, находящемся в упругой окружающей среде. Найдем зависимость поведения стержня от частоты возмущающей нагрузки. Рассмотрим несколько частных случаев распространения и отражения волны в зависимости от нагружающей силы. Построим зависимость пороговой амплитуды нагружения от периода возмущающей силы. Для определения порогового значения амплитуды нагружения в данной работе используется критерий инкубационного времени разрушения, предложенный Ю. В. Петровым [6].

3. Вывод уравнения

Составим уравнение продольных колебаний стержня в упругой среде, аналогично классическому случаю, рассмотренному в книге Ю. Н. Работнова [7], когда на стержень не действуют силы сопротивления.

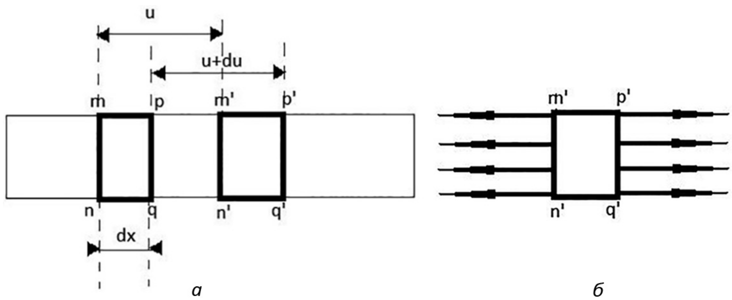


Рис. 2. Элемент стержня (*а*), элемент стержня после деформации (*б*)

На рис. 2, *а* показан элемент стержня, который в недеформируемом состоянии был заключен между сечениями mn и pq с координатами x и $x + dx$ соответственно. Фиксируя момент времени t, когда сечение mn занимает положение $m'n'$, сечение pq — положение $p'q'$, обозначим перемещение левого сечения, первоначальная координата которого была x, через u. Смещение u является функцией двух переменных — времени t и координаты в недеформированном состоянии x, поэтому смещение сечения с координатой $x + dx$ будет $u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$. На рис. 2, *б* изображен элемент $m'n'p'q'$ отдельно. Обозначим напряжение, действующее в сечении $m'n'$ через σ, тогда напряжение, действующее в сечении $p'q'$, будет $\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x}dx$. Вдоль всего элемента будет действовать сила сопротивления равная $-kudx$, где k — коэффициент пропорциональности сил сопротивления.

Составим уравнение движения элемента $m'n'p'q'$

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S\frac{\partial \sigma}{\partial x}dx - kudx. \tag{1}$$

Используя закон Гука, получим

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - kudx. \tag{2}$$

Поделив уравнение на ρS, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u = 0, \tag{3}$$

где $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $b^2 = \frac{k}{\rho S}$.

Дифференциальное уравнение (3), описывающее продольные колебания стержня на упругом основании, называется уравнением Клейна—Гордона (обобщенное волновое уравнение).

4. Решение уравнения Клейна — Гордона для полубесконечного стержня

Будем решать уравнение (3) [8] для бесконечной оси OX при начальных условиях

$$u|_{t<0} = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{a^2}\delta(t). \tag{4}$$

Решением уравнения (3) при условиях (4) согласно [9] будет функция

$$u_0(x,t) = \frac{1}{a} H(t - \frac{x}{a}) J_0(b\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}), \tag{5}$$

где $H(z)$ — единичная функция Хевисайда, $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка. (5) является фундаментальным решением уравнения Клейна — Гордона.

А соответствующее напряжение, возникающее в стержне по закону Гука, если считать модуль Юнга $E = 1$

$$\sigma_0(x,t) = E\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{a^2}\delta(t - \frac{x}{a}) + \tag{6}$$

$$+\frac{1}{a}H(t-\frac{x}{a})J_1(b\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}})\frac{bx}{a^2\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}}=$$
$$=g_0(x,t)+h_0(x,t),$$

где $J_1(z)$ — функция Бесселя первого порядка.

Тогда по формуле Дюамеля решением уравнения (3) с граничными условиями

$$u|_{t<0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-\frac{1}{a^2}f(t), \tag{7}$$

где $f(t)$ — произвольная функция, будет следующее выражение для перемещений

$$u(x,t)=\int\limits_0^t u_0(x,t-s)f(s)\,ds, \tag{8}$$

а соответствующие напряжения

$$\sigma(x,t)=-\frac{1}{a^2}f(t-\frac{x}{a})+\int\limits_0^t h_0(x,t-s)f(s)\,ds. \tag{9}$$

5. Решение уравнения Клейна — Гордона для стержня конечной длины

Теперь рассмотрим задачу об отражении волны от свободного края стержня длиной L (рис. 3).

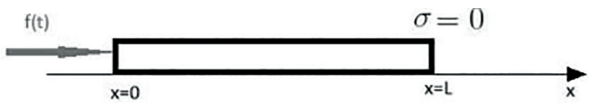


Рис. 3. Модель стержня конечной длины

Для этого будем решать уравнение (3) для стержня длиной L при начальных условиях

$$u|_{t<0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-\frac{1}{a^2}f(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L}=0. \tag{10}$$

Последнее условие — условие свободного конца. То есть мы будем рассматривать задачу об отражении волны от свободного конца стержня.

Тогда решением уравнения (3) при граничных условиях (10) будет сумма двух волн прямой и отраженной

$$u(x,t) = \int\limits_0^t u_0(x,t-s)f(s)\,ds + \int\limits_0^t v_0(x,t-s)f(s)\,ds, \qquad (11)$$

где $v_0(x,t) = \frac{1}{a}H(t - \frac{2L-x}{a})J_0(b\sqrt{t^2 - \frac{(2L-x)^2}{a^2}})$.

А решение в напряжениях (считая модуль Юнга $E = 1$) примет вид

$$\sigma(x,t) = -\frac{1}{a^2}f(t - \frac{x}{a}) + \int\limits_0^t h_0(x,t-s)f(s)\,ds- \qquad (12)$$

$$-(-\frac{1}{a^2}f(t - \frac{2L-x}{a}) + \int\limits_0^t h_1(x,t-s)f(s)),$$

где $h_1(x,t) = \frac{1}{a}H(t - \frac{2L-x}{a})J_1(b\sqrt{t^2 - \frac{(2L-x)^2}{a^2}})\frac{b(2L-x)}{a^2\sqrt{t^2 - \frac{(2L-x)^2}{a^2}}}$.

При отражении волны от свободного края стержня исходные сжимающие напряжения становятся растягивающими. Многие материалы, например бетон, способны выдерживать большие сжимающие напряжения, но легко разрушаются при растягивающих напряжениях. Именно поэтому при отражении волны из-за смены знака напряжения велика вероятность откольного разрушения стержня.

6. Пример

Далее разберем конкретный пример. Пусть на стержень действует сила

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi t}{t0}) & \text{, если } 0 < t < t0 \\ 0 & \text{, иначе.} \end{cases} \qquad (13)$$

Заметим, что при разных значениях коэффициента сопротивления b и периода ударной силы $t0$ волна напряжения будет поразному распространяться по стержню. Для определенности будем считать, что модуль Юнга $E = 1$, длина стержня $L = 50$.

1. Случай $b = 0.1$, $t0 = 10$

Поначалу волна сжатия начинает распространяться по стержню (рис. 4, *а*). Затем из-за сопротивления упругой среды начинают распространяться напряжения растяжения (рис. 4, *б*). Как только прямая волна достигает свободного края стержня, она отражается, и отраженная часть волны складывается с прямой волной. Отраженная волна превращается в волну растяжения (рис. 4, *в*). После сложения волн возникает напряжение растяжения по абсолютной величине большее, чем исходное напряжение, которое было передано в начале стержню. А это значит, что именно в данный момент стержень претерпевает наибольшие нагрузки (рис. 4, *г*). Далее волна аналогично распространяется обратно (рис. 4, *д*).

2. Случай $b = 0.5$, $t0 = 3$

К началу стержня приложено аналогичное случаю 1 напряжение, но с более коротким периодом колебания (рис. 5, *а*). Из-за большего значения коэффициента сопротивления b внешняя среда имеет большее воздействие на напряжения в стержне. Волна разбивается на много сжимающих и растягивающих волн, т. о. мы видим явление дисперсии волн (рис. 5, *б*, *в*)

Можно отметить, что наибольшее по модулю напряжение стержень испытывает в начале приложения нагрузки.

3. Случай $b = 0.5$, $t0 = 38$

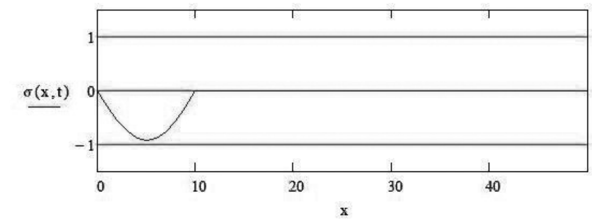
Теперь рассмотрим напряжение с большим периодом колебания (рис. 6, *а*). Заметим, что такая волна практически полностью гасится внешней средой (рис. 6, *б*, *в*).

Вышеописанные явления можно объяснить следующим образом. Рассмотрим дисперсионное соотношение уравнения Клейна — Гордона, для этого подставим в уравнение (3) $u = e^{ikx}e^{i\omega t}$ и получим следующее дисперсионное соотношение

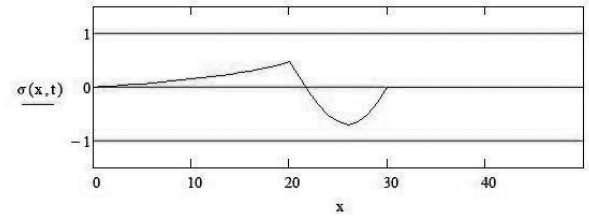
$$\omega = \pm\sqrt{a^2b^2 + k^2}. \tag{14}$$

График зависимости частоты от волнового числа показан на рис. 7.

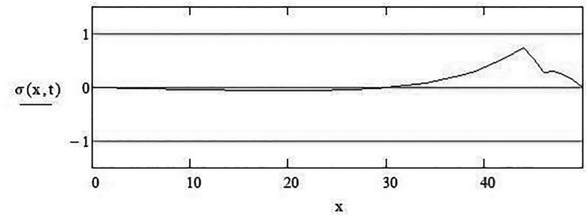
а



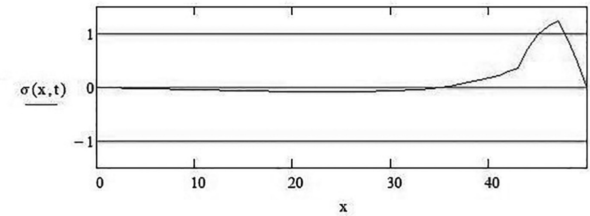
б



в



г



д

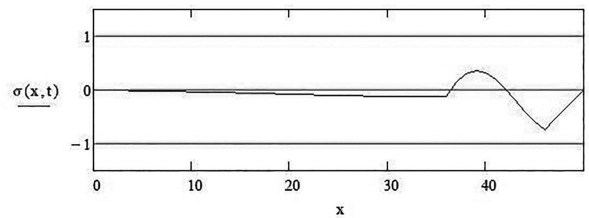


Рис. 4. Распространение волны по стержню при $b = 0.1, t_0 = 10$

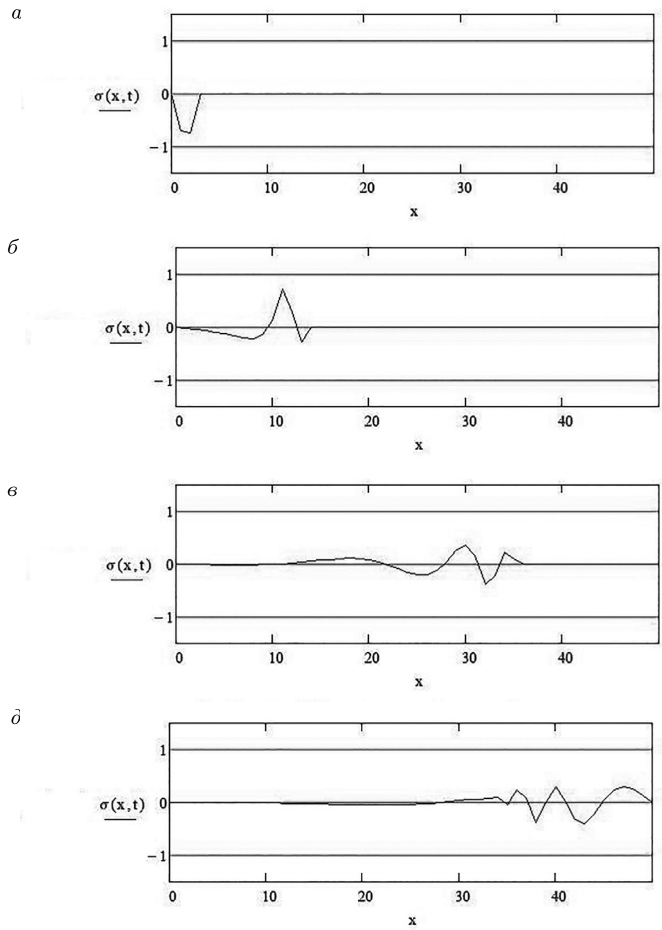


Рис. 5. Распространение волны по стержню при $b = 0.5, t_0 = 3$

Итак, мы видим, что отношение частоты к волновому числу $\frac{\omega}{k}$ — переменная величина; это значит, что имеет место дисперсия волн.

Из дисперсионного соотношения следует, что

$$k = \pm\frac{1}{a}\sqrt{\omega^2 - b^2}. \tag{15}$$

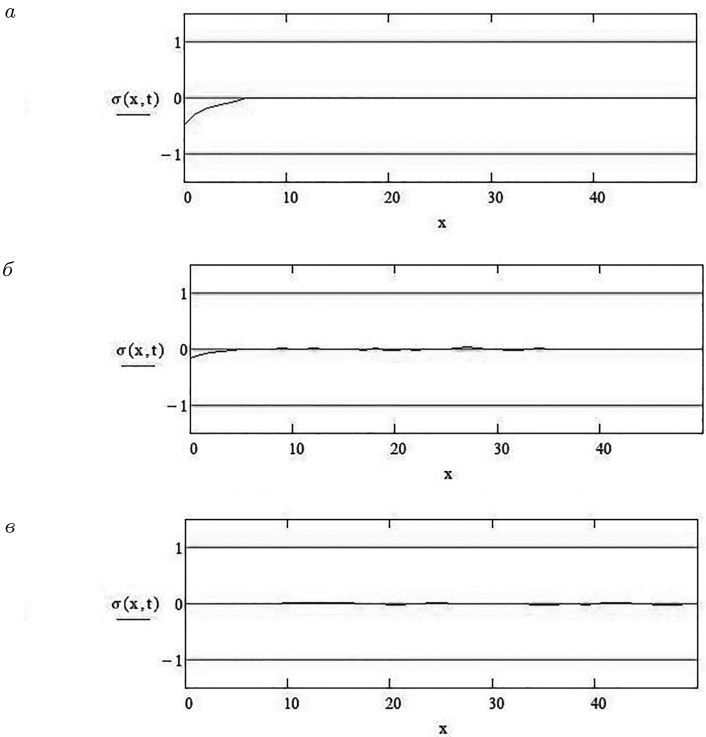


Рис. 6. Распространение волны по стержню при $b = 0.1, t_0 = 38$

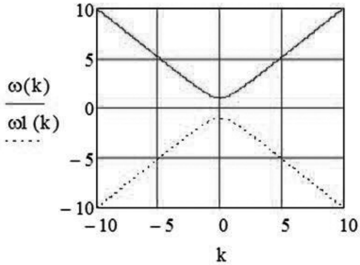


Рис. 7. График зависимости частоты
от волнового числа

После обратного преобразования Фурье мы бы имели

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\infty}^{\infty} f(p) e^{-ikx} e^{-i\omega t} dp. \tag{16}$$

Тогда из (15) получаем, что при маленьких значениях ω (т. е. при больших t_0), k будет комплексным числом, а значит по формуле (16) перемещения и напряжения будут стремительно убывать, что мы и наблюдаем в случае 3. При больших значениях ω (т. е. маленьких значениях t_0) по формуле (16) мы будем наблюдать колебания, как в случае 2.

7. Явление откола в волновом поле Клейна — Гордона

Теперь поставим задачу найти пороговую амплитуду возмущающей стержень силы, при которой произойдет разрушение стержня.

Будем считать, что исследуемый стержень не имеет начальных несовершенств. Поэтому согласно [10] можно использовать критерий инкубационного времени разрушения для предсказания условий инициирования хрупкого разрушения стержня при отколе под действием приложенной динамической ударной нагрузки.

В данном случае критерий запишется в следующем виде

$$\int\limits_{t-\tau}^{t} \sigma(s) ds \le \sigma_c \tau, \tag{17}$$

где τ — инкубационное время, соответствующее образцу, σ_c — критическое значение напряжения в образце (это заданные величины, их можно найти экспериментально для каждого образца).

Как было описано ранее, при действии сжимающей силы вида (13) по стержню будет идти волна сжатия:

$$\sigma_-(x,t) = -\frac{1}{a^2} f(t - \frac{x}{a}) + \int\limits_0^t h_0(x, t-s) f(s)\, ds, \tag{18}$$

где $h_0(x,t) = \frac{1}{a}H(t-\frac{x}{a})J_1(b\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}})\frac{bx}{a^2\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}}$.

После того как волна достигнет свободного конца стержня, она отразится и поменяет свой знак на противоположный, т. е. станет волной растяжения:

$$\sigma_+(x,t) = +\frac{1}{a^2}f(t-\frac{2L-x}{a}) - \int\limits_0^t h_1(x,t-s)f(s), \tag{19}$$

где $h_1(x,t) = \frac{1}{a}H(t-\frac{2L-x}{a})J_1(b\sqrt{t^2-\frac{(2L-x)^2}{a^2}})\frac{b(2L-x)}{a^2\sqrt{t^2-\frac{(2L-x)^2}{a^2}}}$.

Суммарное напряжение, возникающее при этом в стержне, будет равно

$$\sigma(x,t) = \sigma_-(x,t) + \sigma_+(x,t). \tag{20}$$

Разберем первый случай, рассмотренный в примерах, когда $b = 0.1$, $t_0 = 10$ (так как именно в этом случае велика вероятность откольного разрушения в стержне). Положим $E = 1$, $L = 50$.

Пусть на стержень действует сила

$$f(t) = \begin{cases} P * \sin(\frac{\pi t}{t_0}), & \text{если } 0 < t < t_0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \tag{21}$$

где P — амплитуда возмущающей силы (этот параметр мы и будем варьировать).

8. Переход к безразмерным переменным

Для оценки порогового значения амплитуды возмущающей силы P будем пользоваться критерием инкубационного времени разрушения (16), поэтому удобнее ввести безразмерные величины: $T = \frac{t}{\tau}, T_0 = \frac{t_0}{\tau}, X = \frac{x}{\tau * a}, l = \frac{L}{a\tau}$, тогда сила будет равна

$$f(T) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi T}{T_0}), & \text{если } 0 < T < T_0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \tag{22}$$

Далее мы считаем, что при $T_0 < 1$ сила $f(t)$ имеет «маленький» период колебаний, а при $T > 0$ — «большой».

Выражение для напряжений в стержне примет вид

$$\sigma(X,T) = \sigma_1(x(X),t(T)) = -\frac{1}{a^2}f(T-X)+ \tag{23}$$

$$+\frac{1}{\tau}\int\limits_0^T h_0(X\tau a, T\tau - s\tau)f(s)\,ds-$$

$$-(-\frac{1}{a^2}f(T-(2l-X)) + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^T h_1(X\tau a, T\tau - s\tau)f(s)\,ds.$$

А критерий инкубационного времени разрушения (14) в безразмерных величинах будет

$$\int\limits_{T-1}^{T} \sigma(s)ds \leq \sigma_c. \tag{24}$$

9. Графики зависимости порогового амплитуды разрушения от времени разрушения и длительности воздействия

Найдем зависимости пороговой амплитуды разрушения P^* от времени разрушения T^*для случаев $b=0, b=0.1$ и $b=0.5$ (рис. 8, 9). При $b=0$ мы имеем классический случай, когда на стержень не действуют силы сопротивления, при этом уравнение (1) становится волновым уравнением.

График зависимости пороговой амплитуды разрушения P^* от длительности T_0 для случаев $b=0, b=0.1$ и $b=0.5$ показан на рис. 10.

Наибольшее напряжение в стержне при $b=0.1$ возникает после сложения прямой и отраженной волн, т. е. происходит откольное разрушение. На рис. 8 и 9 видно, что поведение стержня при небольшом коэффициенте сопротивления ($b=0.1$) похоже на поведение стержня в классическом случае (при $b=0$, когда на стержень не действуют силы сопротивления). Классический случай был

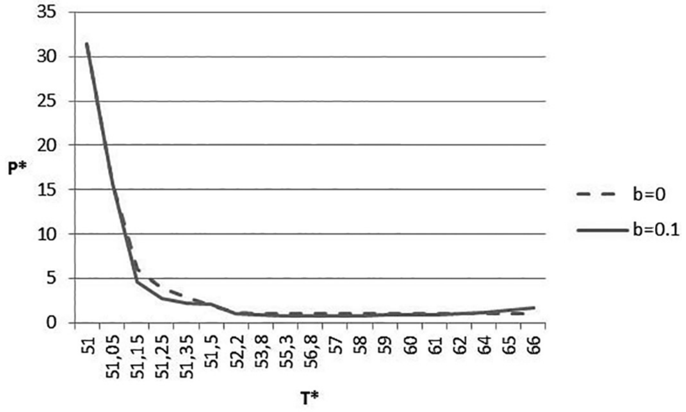


Рис. 8. Зависимость пороговой амплитуды напряжения от времени разрушения

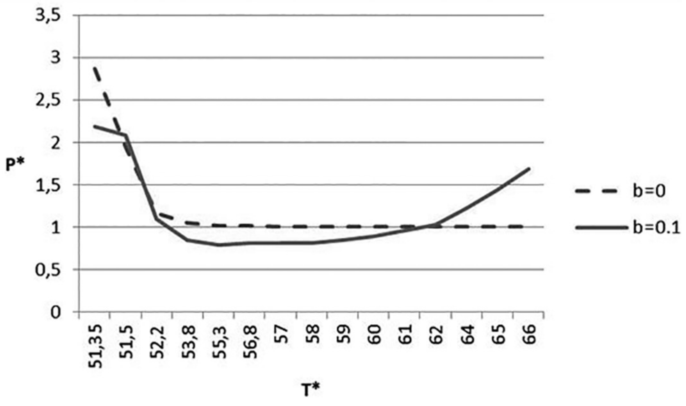


Рис. 9. Увеличенный график зависимости пороговой амплитуды напряжения от времени разрушения

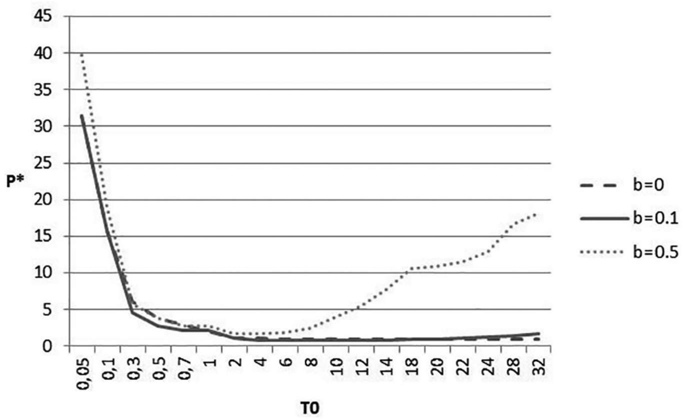


Рис. 10. График зависимости пороговой амплитуды напряжения от длительности воздействия

рассмотрен Ю. В. Петровым [10]. Однако в отличие от классического случая при $b = 0.1$ график зависимости P^* от T^* имеет точку минимума, а следовательно, имеется оптимальный режим воздействия, т. е. мы можем добиться разрушения стержня, прикладывая небольшую амплитуду внешней силы (даже меньшую по абсолютной величине по сравнению с самим критическим напряжением σ_c).

При увеличении коэффициента сопротивления среды, например, при $b = 0.5$ максимальное растягивающее напряжение в стержне возникает еще при прохождении прямой волны до отражения от свободной границы стержня. На рис. 10 мы видим точку минимума, а это значит, что опять существует оптимальный режим воздействия.

10. Заключение

В результате проделанной работы получено уравнение продольных колебаний стержня, взаимодействующего с упругой средой, которое оказывается известным уравнением Клейна — Гордона. Найдено решение этого уравнения, вычислены перемещения и напряжения, возникающие в стержне при динамическом нагружении. Затем рассмотрены распространение и отражение волны от свободной границы стержня конечной длины.

Рассмотрено несколько частных случаев распространения волны в зависимости от нагружающей силы и характеристик окружающей стержень упругой среды. Более того, найдена зависимость поведения стержня от частоты возмущающей нагрузки. При коэффициенте сопротивления $b = 0.5$ при больших значениях частоты можно наблюдать колебания стержня, при маленьких — стремительное гашение волн. Построены соответствующие графики напряжений и перемещений от координаты поперечного сечения.

В задаче отражения волны от свободного конца стержня показана возможность эффекта откольного разрушения. Обнаружено, что при небольших значениях коэффициента сопротивления среды $b \approx (0.1)$ и достаточно больших значениях частоты возмущающей силы напряжение в стержне может достигать больших значений по сравнению с исходной нагрузкой. Именно в этих условиях вероятность разрушения стержня в результате интерференции прямой и отраженной волн очень велика. Отмечены особенности, отличающие данный процесс от классического случая.

Для предсказания условий инициирования хрупкого разрушения стержня при отколе под действием приложенной динамической ударной нагрузки применен критерий инкубационного времени разрушения. В нескольких частных случаях найдены зависимости порогового значения амплитуды возмущающей силы, при котором происходит разрушение стержня от критического времени разрушения стержня и длительности воздействия внешней силы. Построены соответствующие графики. При небольшом коэффициенте сопротивления окружающей стержень среды обнаружен целый диапазон оптимальных частот воздействия, при которых при небольшой амплитуде нагружения происходит откольное разрушение стержня.

При увеличении коэффициента сопротивления окружающей среды отмечено, что разрушение стержня происходит еще при прямом прохождении волны по стержню. Показано, что существует оптимальный режим воздействия, при котором происходит разрушение стержня.

Как было отмечено ранее, стержни на упругом основании используются в разных областях нашей жизни, поэтому расчет и изучение таких объектов интересен как с научной, так и с практической точки зрения.

Литература

1. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. С. 271–273, 284–285
2. *Никитин Л. В.* Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Моск. лицей, 1998.
3. *Баженов В. Г., Котов В. Л., Крылов С. В., Баландин В. В., Брагов А. М., Цветкова Е. В.* Экспериментально-теоретический анализ нестационарных процессов взаимодействия деформируемых ударников с грунтовой средой // Прикладная механика и техническая физика, 2001. Т. 42, № 6. С. 190–197.
4. *Allen A., Earle B. M., Harvey L. M.*. Dynamics of a Projectile Penetrating Sand William // Journal of Applied Physics. Vol. 28. P. 370, 1957.
5. *Аверин В. В., Желтков В. И.* Проникание упругого ступенчатого стержня в грунт // Известия ТулГУ. Технические науки, 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 178–188.
6. *Петров Ю. В., Морозов Н. Ф., Уткин А. А.* Об анализе откола с позиций структурной механики разрушения, ДАН СССР. Т. 313. № 2. 1990. С. 276–279.
7. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. С. 187–190.
8. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. С. 573–583.
9. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 261.
10. *Petrov Y. V.* Structural-temporal approach to modeling of fracture dynamics in brittle media. London: Rock Dynamics and Applications — State of the Art, 2013. P. 101–110.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА И УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ БАЛОК И ПЛАСТИН

Ю. М. Даль, А. А. Морщинина, Д. А. Морщинина

Рассмотрена задача об изгибе балки, загруженной произвольной поперечной нагрузкой. Интегрирование дифференциального уравнения изгиба выполнено операционным способом. Установлена связь этого способа с методом начальных параметров. Исследована устойчивость призматических стержней. Выявлен физический смысл произвольного числового сомножителя в выражениях для форм потери устойчивости. Проанализирована локальная потеря устойчивости тонкостенных элементов инженерных конструкций. Приведены результаты теоретических исследований данной проблемы.

Изложены особенности деформирования растянутых толстых плит и тонких пластин с эллиптическим вырезом. Показано, что коэффициент концентрации напряжений около выреза является функцией, зависящей от его деформированной конфигурации. Представлены результаты экспериментов над растянутыми полимерными пленками с круговым отверстием и системой прямолинейных разрезов.

1. Задача об изгибе прямолинейной балки

Рассмотрим балку постоянного поперечного сечения длиною l, загруженную моментом M в сечении $x = a$, силой P в сечении $x = b$ и распределенной нагрузкой $q = \text{const}$ на участке от $l_1 \leq x \leq l_2$ (рис. 1).

Дифференциальное уравнение изгиба такой балки имеет вид

$$EJy^{(4)}(x) = q[e(x - l_1) - e(x - l_2)] + P\delta(x - b) + M\delta'(x - a), \quad (1.1)$$

где E — модуль упругости материала балки; J — момент инерции ее поперечного сечения; $e(x - l_i)$ — единичная функция; $\delta(x - b)$ и $\delta'(x - a)$ — соответственно дельта-функция и ее первая производная.

Краевые условия на концах балки могут быть различными: свободно опертые концы $y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0$; жестко за-

Доклад на семинаре 30 октября 2018 г.
© Ю. М. Даль, А. А. Морщинина, Д. А. Морщинина, 2018

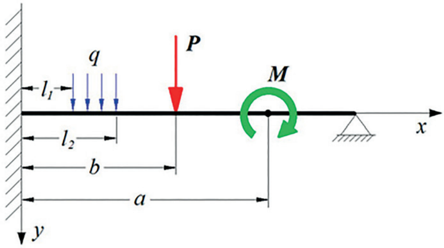


Рис. 1. Внешние нагрузки, приложенные к балке

крепленные $y(0) = y(l) = y'(0) = y'(l) = 0$; левый конец закреплен, а правый свободен $y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0$ и т. д.

Выполнив в (1.1) преобразование Лапласа [4]

$$Y(p) = \int_0^\infty e^{-pt} y(x) dx,$$

получим

$$EJ[p^4 Y(p) - p^3 y(0) - p^2 y'(0) - py''(0) - y'''(0)] = \\ = \frac{q}{p}\left[e^{-pl_1} - e^{-pl_2}\right] + Pe^{-pb} + Mpe^{-pa}.$$

Откуда

$$Y(p) = \frac{y(0)}{p} + \frac{y'(0)}{p^2} + \frac{y''(0)}{p^3} + \frac{y'''(0)}{p^4} + \\ + \frac{1}{EJ}\left[\frac{q}{p^5}(e^{-pl_1} - e^{-pl_2}) + P\frac{e^{-pb}}{p^4} + M\frac{e^{-pa}}{p^3}\right]. \tag{1.2}$$

Изображению (1.2) соответствует оригинал

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2} + \frac{y'''(0)x^3}{3!} + \\ + \frac{1}{EJ}\left[\frac{q}{4!}\left[(x-l_1)^4 e(x-l_1) - (x-l_2)^4 e(x-l_2)\right] + \right. \\ \left. + P\frac{(x-b)^3}{3!} e(x-b) + M\frac{(x-a)^2}{2!} e(x-a)\right]. \tag{1.3}$$

Пусть левый конец стержня свободно оперт, а правый жестко закреплен. Тогда $y(0) = y''(0) = y(l) = y'(l) = 0$ и выражение (1.3) преобразуется к виду

$$y\,(x) = y'\,(0)\,x + \frac{y'''\,(0)\,x^3}{3!} + \frac{1}{EJ}\left[\frac{q}{4!}\left[(x-l_1)^4 e\,(x-l_1) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \,(x-l_2)^4 e\,(x-l_2)\right] + P\frac{(x-b)^3}{3!}e\,(x-b) + M\frac{(x-a)^2}{2!}e\,\,(x-a)\right],$$

где неизвестные значения $y'(0)$ и $y'''(0)$ находятся из условий: $y(l) = y'(l) = 0$, т. е. из решения простейшей системы двух алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
y'\,(0)\,l + \tfrac{y'''(0)l^3}{3!} &= -\tfrac{1}{EJ}\left[\tfrac{q}{4!}\left[(l-l_1)^4 - (l-l_2)^4\right] + \right.\\
&\left. + P\tfrac{(l-b)^3}{3!} + M\tfrac{(l-a)^2}{2!}\right],\\
y'\,(0) + \tfrac{y'''(0)l^2}{2} &= -\tfrac{1}{EJ}\left[\tfrac{q}{3!}\left[(l-l_1)^3 - (l-l_2)^3\right] + \right.\\
&\left. + P\tfrac{(l-b)^2}{2} + M\,(l-a)\right].
\end{aligned}$$

Заметим, что в случае произвольно распределенной нагрузки $q(x)$ на участке $l_1 \le x \le l_2$ ее следует представить в виде

$$q(x) = q + \sum_{k=1}^{n} q_k (x-l_1)^k, \text{ где } q_k = \frac{q^{(k)}(l_1)}{k!} = \text{const}.$$

При этом в уравнении (1.3) справа появятся дополнительные слагаемые

$$\frac{1}{EJ}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{(4+k)!}\left[(x-l_1)^{(4+k)}e(x-l_1) - (x-l_2)^{(4+k)}e(x-l_2)\right]\right).$$

Полученное выражение (1.3) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (1.1) и частного решения данного уравнения, соответствующего виду его правой части. Нахождение частного решения иными методами оказывается довольно трудоемкой задачей [2].

2. О формах потери устойчивости стержней

Искривление прямолинейной формы упругого стержня (рис. 2), сжатого на торцах силами P, действующими вдоль его оси, принято описывать дифференциальным уравнением

$$y^{(4)}(x) + k^2 y^{(2)}(x) = 0, \quad \left(k = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \text{const}\right), \tag{2.1}$$

где E — модуль Юнга материала стержня; I — момент инерции его поперечного сечения.

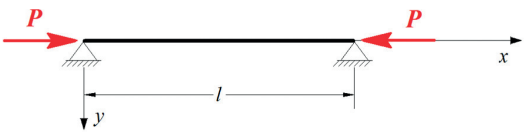


Рис. 2. Стержень длиной l, сжатый по концам силами P

Уравнение (2.1) «дает вполне правильное значение для критической нагрузки» [1, с. 263], однако форма потери устойчивости $y(x)$ определяется при этом с точностью до «совершенно неопределенного» [2, с. 302] числового сомножителя. Ниже выясняется геометрический смысл этого сомножителя.

Произведя в (2.1) интегральное преобразование Лапласа

$$Y(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} y(x) dx,$$

имеем

$$p^4Y(p) - p^3y(0) - p^2y'(0) - py''(0) - y'''(0) +$$
$$+k^2\left[p^2Y(p) - py(0) - y'(0)\right] = 0,$$

или

$$Y(p) = \frac{y(0)}{p} + \frac{y'(0)}{p^2} + \frac{y''(0)}{p(p^2+k^2)} + \frac{y'''(0)}{p^2(p^2+k^2)}.$$

Откуда устанавливаем [3]:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{k^2}(1-\cos kx) + \frac{y'''(0)}{k^3}(kx - \sin kx). \quad (2.2)$$

Пусть оба конца стержня свободно оперты. Тогда краевые условия имеют вид:

$$y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0. \quad (2.3)$$

Принимая во внимание первые два равенства (2.3), получаем:

$$y(x) = y'(0)x + \frac{y'''(0)}{k^3}(kx - \sin kx).$$

Условия на правом конце стержня будут выполнены, если

$$y'(0)l + \frac{y'''(0)}{k^3}(kl - \sin kl) = 0, \quad \frac{y'''(0)}{k}\sin kl = 0. \quad (2.4)$$

Поскольку $y'(0) \neq 0$ и $y'''(0) \neq 0$, ненулевое решение данной системы однородных алгебраических уравнений определяется равенством

$$\begin{vmatrix} l & (kl - \sin kl)/k^3 \\ 0 & (\sin kl)/k \end{vmatrix} = 0, \text{ отсюда } \sin kl = 0.$$

Следовательно,

$$k = k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = (1, 2, 3, ...). \quad (2.5)$$

Согласно (2.1), дискретным значениям k_n соответствуют силы P_n равные

$$P_n = \frac{n^2\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{2.6}$$

На основании (2.5) из первого уравнения (2.4) находим

$$y'(0) = -\frac{y'''(0)l^2}{n^2\pi^2}.$$

Внеся полученный результат в уравнение (2.3), устанавливаем

$$y_n(x) = A_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \text{здесь} \quad A_n = \frac{y'(0)l}{n\pi} = \text{const}, \tag{2.7}$$

но численное значение $y'(0)$ и, стало быть A_n, остается неопределенным.

Произведем теперь оценку величины $y'(0)$ в начальный момент изгибания прямого стержня. В основу анализа положим нелинейное уравнение изгиба

$$\frac{y''}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}} + k^2 y = 0, \tag{2.8}$$

в котором последовательно модифицируем первое слагаемое:

$$\frac{y''}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}} \approx \frac{y''}{\sqrt{(1+3(y')^2)}} \approx y''\left(1-\frac{3}{2}(y')^2\right) \approx$$
$$\approx \frac{d}{dx}\left(y'-\frac{1}{2}(y')^3\right).$$

Итак, исходное уравнение устойчивости (2.8) оказалось преобразованным к виду

$$\frac{d}{dx}\left(y'-\frac{1}{2}(y')^3\right) + k^2 y = 0,$$

откуда после интегрирования получим

$$y' - \frac{1}{2}(y')^3 + k^2\int_0^x y\,dx = 0.$$

Примем далее, что изогнутая ось стержня вблизи его левого конца описывается полиномом третьей степени

$$y(x) \approx a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \text{ где } a_i = \text{const } (i = 1, 2, 3), \ x = o(1).$$

Внеся данное выражение функции $y(x)$ в предыдущее уравнение, устремим в нем переменную $x \to 0$. Тогда, пренебрегая слагаемыми высшего порядка малости, находим $a_1 = y'(0) \approx \sqrt{2}$. Подставив этот результат в формулу (2.7), окончательно имеем

$$y_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{где} \quad A_n \approx \frac{\sqrt{2}l}{n\pi} = \text{const.} \tag{2.9}$$

Выведенная формула свидетельствует о том, что при возрастании числа полуволн потери устойчивости n их амплитуда A_n уменьшается.

3. Локальная устойчивость тонкостенных балок

В современных инженерных конструкциях и сооружениях широко применяются балки с тонкими и высокими стенками. Вопросы локальной устойчивости таких стенок, особенно в местах действия сосредоточенных сил, представляют как теоретический, так и практический интерес (рис. 3).

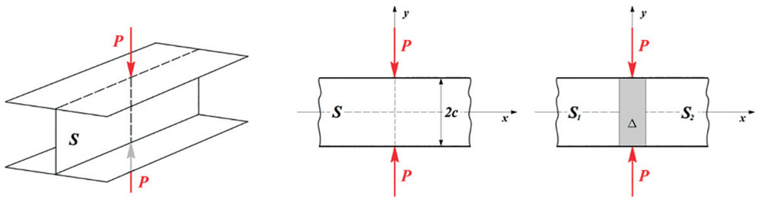


Рис. 3. Тонкостенная балка, нагруженная сосредоточенными силами

С точки зрения механики дело сводится к решению задачи об устойчивости свободно опертой прямоугольной полосы S, сжатой двумя сосредоточенными силами. Впервые эту задачу поставил А. Зоммерфельд [5], позднее ею занимался ряд авторов [6]. Все они исходили из предположения, что напряженное состояние в области S заключено в узком прямоугольнике шириной Δ, где

$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yy} = P/\Delta = \text{const}$. Смежные же области S_1 и S_2 считались ненапряженными (см. рис. 3).

Несостоятельность данного предположения очевидна. В полосе S, сжатой на кромках двумя сосредоточенными силами, напряженной оказывается не только узкая полоска шириной Δ, но и области S_1 и S_2, непосредственно примыкающие к ней слева и справа. В них, равно как и в зоне Δ, отличными от нуля будут не только напряжения σ_{yy}, но и σ_{xx}, а также σ_{xy}, причем все эти напряжения являются весьма сложными функциями от переменных x и y. Заметим, кстати, что нормальные напряжения σ_{xx} и σ_{yy} суть симметричные функции относительно срединной линии полосы, тогда как касательные σ_{xy}, наоборот, антисимметричны. Графики этих напряжений, заимствованные из работы [7], приведены на рис. 4–7.

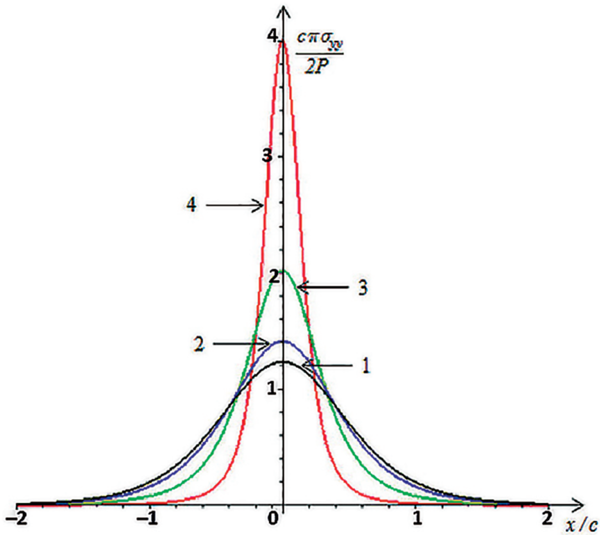


Рис. 4. Распределение функции $\pi c\sigma_{yy}/2P$ на линиях $\tilde{y} = y/c = \text{const}$. Кривые (1, 2, 3, 4) соответствуют значениям $\tilde{y} = (0, 0.25, 0.50, 0.75)$

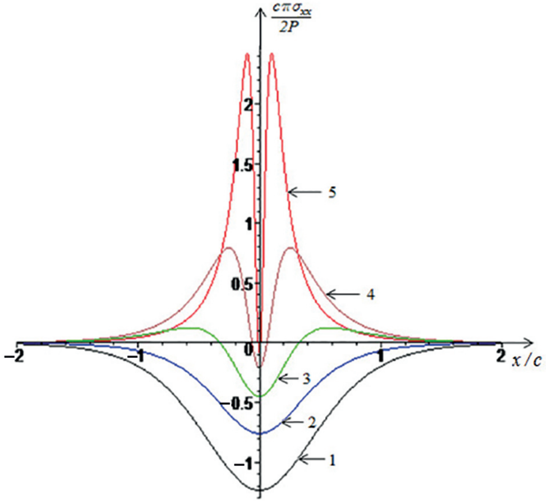


Рис. 5. Графики функции $\pi c \sigma_{xx}/2P$ на линиях $\tilde{y} = y/c = \mathrm{const}$. Кривые (1, 2, 3, 4, 5) отвечают значениям $\tilde{y} = (0, 0.25, 0.50, 0.75, 0.90)$

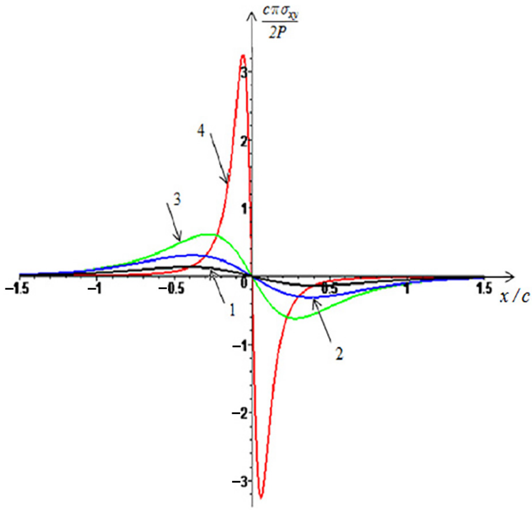


Рис. 6. Графики функции $\pi c \sigma_{xy}/2P$ на линиях $\tilde{y} = y/c = \mathrm{const}$. Кривые (1, 2, 3, 4) соответствуют значениям $\tilde{y} = (0.10, 0.25, 0.50, 0.90)$

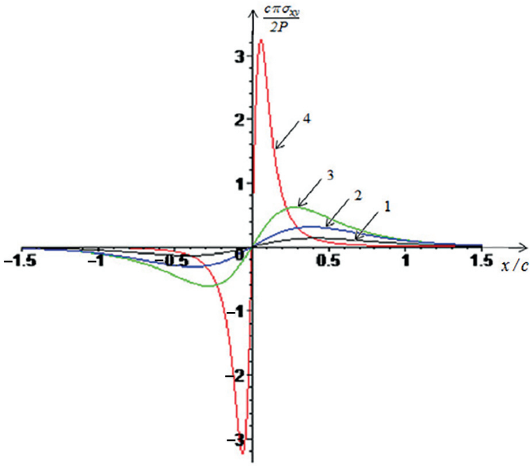


Рис. 7. Графики функции $\pi c\sigma_{xy}/2P$ на линиях $\tilde{y} = y/c = \text{const}$.
Кривые (1, 2, 3, 4) представляют значения
$\tilde{y} = (-0.10, -0.25, -0.50, -0.90)$

Сопоставив их с упомянутым выше предположением, лежащим в основе вывода формулы для критической нагрузки полосы S [4, 5],

$$P_{\text{э}} = \frac{4\pi D}{2c}, \quad \left(D = \frac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)}\right), \tag{3.1}$$

заключаем, что результат (3.1) весьма сомнителен.

4. Особенности деформации растянутых плит и тонких пластин с эллиптическим отверстием

Математический аппарат плоской теории упругости одинаков при плоской деформации и плоском напряженном состоянии деформируемого тела. Однако при наличии в теле макроскопических концентраторов напряжений физическая картина деформации может оказаться совершенно различной. Особенно наглядно это проявляется при растяжении массивных тел и тонких пластин с эллиптическими отверстиями или трещинами.

Рассмотрим упругую плоскость с эллиптическим отверстием — $x^2/{a_0}^2 + y^2/{b_0}^2 = 1$, растянутую на бесконечности усилием $p =$ const в направлении оси y (рис. 8). Как известно, максимальное *растягивающее* напряжение σ_{yy} возникает на контуре отверстия в точках $(x = \pm a,\ y = 0)$:

$$\max \sigma_{yy} = \left(1 + 2\frac{a_0}{b_0}\right) p.$$

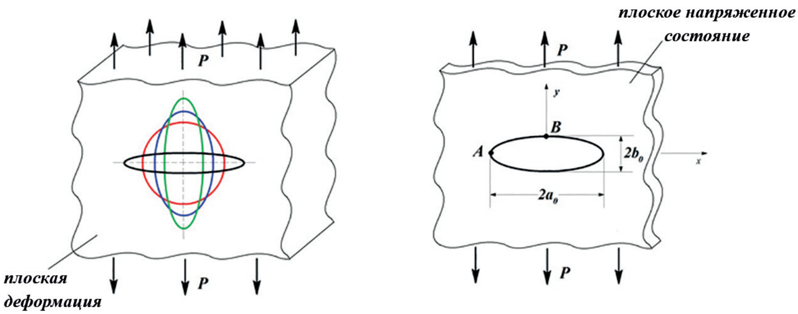


Рис. 8. Напряженно-деформируемое тело с эллиптическим отверстием

Максимальное (по модулю) *сжимающее* напряжение σ_{xx} отмечается также на контуре отверстия в точках $(x = 0,\ y = \pm b)$. Это напряжение, подчеркнем, не зависит от параметров эллиптического отверстия a_0, b_0

$$\max \sigma_{xx} = -p.$$

Коэффициент концентрации напряжений на контуре эллиптического выреза

$$K_\sigma = \frac{\max \sigma_{yy}}{p} = 1 + 2\frac{a_0}{b_0}. \tag{4.1}$$

Теорема: при растяжении плоскости с эллиптическим вырезом усилием $\sigma_{yy}^\infty = p =$ const деформированный контур выреза остается эллиптическим, т. е.

$$x^2/{a_*}^2 + y^2/{b_*}^2 = 1.$$

Формулы для деформированных длин большой (a_*) и малой (b_*) полуосей эллиптического выреза таковы [7]:

$$a_* = a_0 e^{-cp/E}, \quad b_* = b_0 e^{cp/E} + a_0 \left(e^{cp/E} - e^{-cp/E} \right), \tag{4.2}$$

где $c = 1 - \nu^2$ для плоской деформации и $c = 1$ при плоском напряженном состоянии.

Заменим в равенстве (4.1) параметры a_0 и b_0 соответственно на a_* и b_*, т. е.

$$K_\sigma^* = \frac{\max \sigma_{yy}}{p} = 1 + 2\frac{a_*}{b_*}. \tag{4.3}$$

Внеся в равенство (4.3) выражения для a_* и b_* согласно (4.2), положим величину $cp/E \ll 1$ (это совершенно оправдано для большинства конструкционных материалов). Тогда после соответствующих преобразований получим

$$K_\sigma^* = 1 + \frac{2}{b_0/a_0 + 2cp/E}\,. \tag{4.4}$$

Как видим, коэффициент концентрации напряжений на контуре *деформированного* выреза K_σ^* зависит от усилий p. Графики функции K_σ^* представлены на рис. 9.

В том случае, когда $2cp/E \ll b_0/a_0$, формула (4.4) переходит в известное соотношение линейной теории упругости $K_\sigma = 1 + 2a_0/b_0$. Поэтому равенство (4.1) справедливо, если выполняются два условия:

$$cp/E \ll 1 \text{ и } 2cp/E \ll b_0/a_0.$$

Отметим, что формулы (4.2) дают качественно верную картину при больших упругих деформациях низкомодульных материалов, находящихся в условиях плоской деформации. Так, по мере возрастания растягивающих усилий, эллиптическое отверстие в теле, постепенно округляясь, переходит в круговое, затем начинает вытягиваться вдоль оси y, *принимая вновь эллиптическую форму* (см. рис. 8).

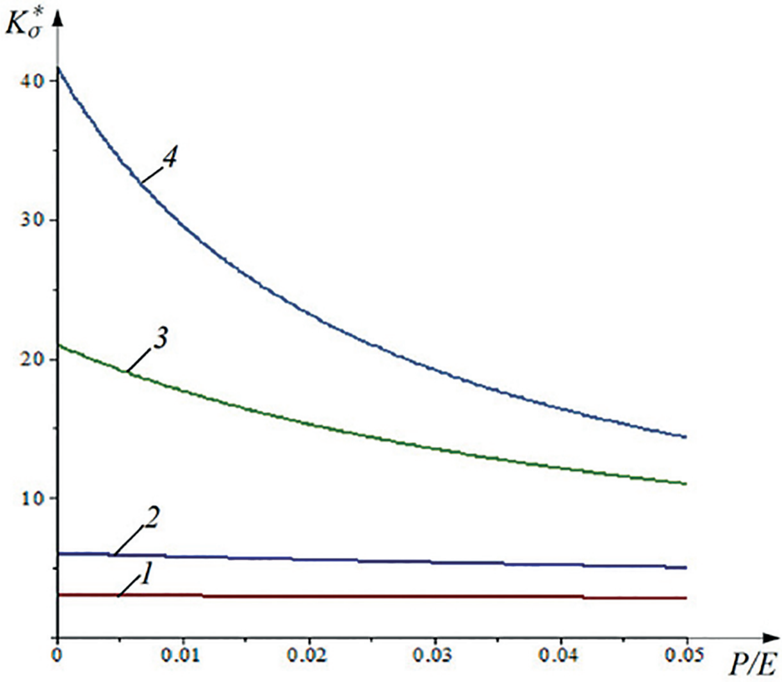


Рис. 9. Графики коэффициента концентрации напряжений K_σ^*. Кривые (*1, 2, 3, 4*) соответствуют значениям $b_0/a_0 = (1.00, 0.40, 0.10, 0.05)$

Разумеется, зависимости (4.2) справедливы и для тонких пластин или пленок, ослабленных эллиптическим вырезом. Однако в этом случае следует соблюдать известную осторожность.

Дело в том, что в окрестности выреза (около оси y) возникает поле *сжимающих* напряжений, которое при определенном значении *растягивающих* усилий p вызывает локальную потерю устойчивости пластины.

Проведенные нами эксперименты подтверждают сказанное выше (рис. 10, 11).

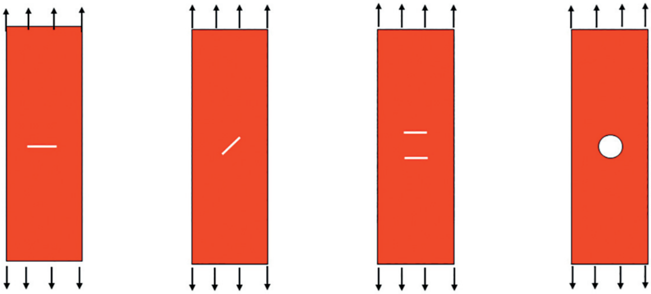


Рис. 10. Экспериментальные образцы полимерных пленок (длина образцов — 200 мм, толщина — 0.2 мм; длина разрезов — 10 мм, диаметр кругового выреза — 8 мм)

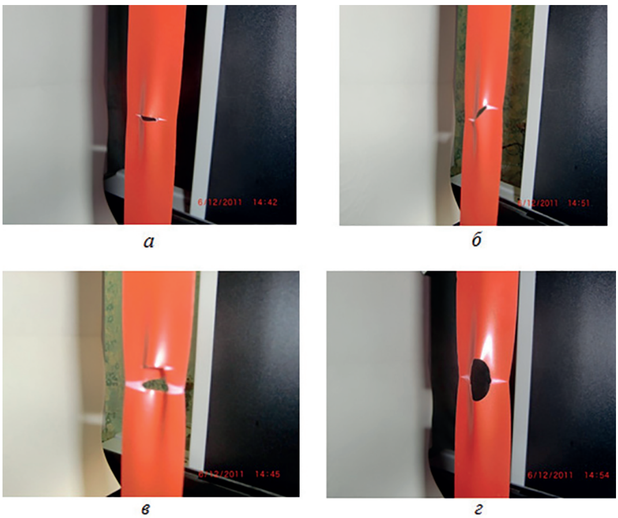


Рис. 11. Экспериментальные образцы: *а* — с разрезом, *б* — с наклонным разрезом, *в* — с двумя разрезами, *г* — с круговым вырезом, испытываемые на установке LOYD 30кн плюс в лаборатории сопротивления материалов СПбГУ

Литература

1. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. Киев: Наукова Думка, 1972. 501 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1963. 456 с.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 736 с.
4. *Sommerfeld A.* Über die Knicksicherheit der Stege von Walzprofiln // Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1906. Bd. 54, H. 2. S. 113–153.
5. *Папкович П. Ф.* Строительная механика корабля. Часть II. Л.: Судпромгиз, 1941. 960 с.
6. *Даль Ю. М.* О напряжениях в полосе, загруженной на продольных кромках сосредоточенными усилиями // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 130–139.
7. *Даль Ю. М.* Влияние малой геометрической нелинейности на характер напряженно-деформированного состояния у вершины трещины // Известия АН СССР, МТТ. 1980. № 2. С. 130–137.

УПРАВЛЕНИЕ ГАШЕНИЕМ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

К. М. Фазлыева, Т. С. Шугайло

Данная работа посвящена расчету гашения колебаний механической системы при помощи нахождения оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему за требуемое время из одного фазового состояния, в котором заданы начальные обобщенные координаты и скорости, в другое фазовое состояние с заранее заданными обобщенными координатами и скоростями. Такая задача является одной из центральных задач теории управления. Для ее решения используется сравнительно новый метод, опирающийся на применение обобщенного принципа Гаусса [5] из теории неголономных систем. Результаты расчетов будут сравниваться с результатами, полученными применением классической теории управления — принципом максимума Понтрягина [2].

1. Постановка задачи. Уравнения движения

Пусть имеется механическая система, состоящая из трех тележек массами m, m_1 и m_2 (рис. 1). Тележки с массами m и m_1 соединены пружиной жесткости c_1, тележки с массами m_1 и m_2 — пружиной жесткости c_2. За заданное время $\widetilde{T}$ требуется переместить механическую систему из состояния покоя на расстояние S в новое состояние покоя за счет выбора управляющей силы F, приложен-

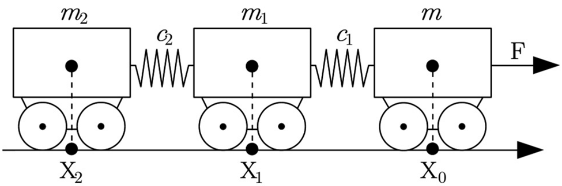


Рис. 1. Система трех масс с пружинами

Доклад на семинаре 4 декабря 2018 г.
© К. М. Фазлыева, 2019

ной к первой тележке. В этом случае условия на концах движения примут вид:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{X}_0(0)=0\,,\quad \mathrm{X}_1(0)=0\,,\quad \mathrm{X}_2(0)=0\,,\\
\dot{\mathrm{X}}_0(0)=0\,,\quad \dot{\mathrm{X}}_1(0)=0\,,\quad \dot{\mathrm{X}}_2(0)=0\,,\\
\mathrm{X}_0(\widetilde{T})=S,\quad \mathrm{X}_1(\widetilde{T})=S,\quad \mathrm{X}_2(\widetilde{T})=S\,,\\
\dot{X}_0(\widetilde{T})=0\,,\quad \dot{\mathrm{X}}_1(\widetilde{T})=0\,,\quad \dot{\mathrm{X}}_2(\widetilde{T})=0\,.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь X_0 — перемещение первой тележки, X_1 — второй, X_2 — третьей.

В принятых обобщенных координатах уравнения Лагранжа второго рода [1] для нашей системы имеют вид:

$$
\begin{cases}
m\,\ddot{\mathrm{X}}_0+c_1(\mathrm{X}_0-\mathrm{X}_1)=\mathrm{F}\,,\\
m_1\,\ddot{\mathrm{X}}_1+c_1(\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_0)+c_2(\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2)=0\,.\\
m_2\,\ddot{\mathrm{X}}_2+c_2(\mathrm{X}_2-\mathrm{X}_1)=0\,.
\end{cases}
\tag{2}
$$

2. Уравнения движения в главных координатах

Для удобства дальнейшего решения перепишем систему (2) в матричном виде $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\mathbf{X}=\mathbf{Y}$, где

$$
\mathbf{A}=\begin{pmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & m_1 & 0\\ 0 & 0 & m_2\end{pmatrix},\quad
\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_1 & -c_1 & 0\\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2\\ 0 & -c_2 & c_2\end{pmatrix},
$$
$$
\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathrm{X}_0\\ \mathrm{X}_1\\ \mathrm{X}_2\end{pmatrix},\quad
\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}\mathrm{F}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.
$$

Собственные частоты системы обозначим Ω_i, а собственные формы колебаний соответственно $\mathbf{U}_i$. При этом Ω_i являются корнями характеристического уравнения $\det(\mathbf{C}-\Omega^2\mathbf{A})=0$. А собственные формы можно записать в виде

$$\mathbf{U}_i = \left(\begin{array}{c} S \\ \dfrac{(c_1 - \Omega_i^2 m)S}{c_1} \\ \begin{vmatrix} c_1 - \Omega_i^2 m & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - \Omega_i^2 m_1 \end{vmatrix} \dfrac{S}{c_1 c_2} \end{array} \right).$$

Перепишем уравнения движения в главных безразмерных координатах [2] при помощи замены

$$\mathbf{X} = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{U}_i \frac{S^2 M}{\mathbf{U}_i^T \mathbf{A} \mathbf{U}_i} x_i\,. \tag{3}$$

В этом случае уравнения запишутся в виде

$$\ddot{x}_i + \Omega_i^2 x_i = \frac{\mathrm{F}}{SM}\,,\ i = \overline{0..2}\,, \quad M = m + m_1 + m_2\,.$$

Перейдем теперь к безразмерному времени заменой

$$\tau = \Omega_1 t\,, \quad T = \Omega_1 \widetilde{T}\,.$$

В новых координатах уравнения движения примут вид:

$$\begin{cases} x_0'' = u\,, \\ x_1'' + x_1 = u\,, \\ x_2'' + \omega_2^2\, x_2 = u\,. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $u = \dfrac{\mathrm{F}}{SM\Omega_1^2}$ — безразмерное управление, $\omega_i^2 = \dfrac{\Omega_i^2}{\Omega_1^2}$, $i = \overline{0..2}$, $\Omega_0 = 0$. В уравнениях штрих указывает на дифференцирование по безразмерному времени τ.

Граничные условия в этом случае примут вид:

$$\begin{array}{lll} x_0(0) = 0\,, & x_1(0) = 0\,, & x_2(0) = 0\,, \\ x_0'(0) = 0\,, & x_1'(0) = 0\,, & x_2'(0) = 0\,, \\ x_0(T) = 1, & x_1(T) = 0\,, & x_2(T) = 0, \\ x_0'(T) = 0\,, & x_1'(T) = 0, & x_2'(T) = 0\,. \end{array} \tag{5}$$

3. Решение задачи применением принципа максимума Понтрягина

В системе уравнений (4) x_0, x_1, x_2, u являются неизвестными функциями времени, но самих уравнений три, следовательно, система (4) является недоопределенной. Поэтому к рассматриваемой системе следует добавить еще одно условие. Оно будет выражать критерий, положенный в основу выбора управляющего усилия из всех возможных вариантов, при которых система уравнений (4) имеет решение.

Критерии выбора u могут быть самыми разнообразными и чаще всего зависят от утилитарных предпочтений при решении поставленной задачи. Например, потребуем минимальность функционала

$$J = \int_0^T u^2(\tau) d\tau \,. \tag{6}$$

Такому условию выбор управления при решении подобных задач подчиняется в монографии академика Черноусько [3].

Одним из наиболее широко распространенных и часто употребительных классических методов минимизации является принцип максимума Понтрягина. Основы этого принципа подробно изложены в [2].

Согласно общей теории для применения принципа максимума Понтрягина систему (4) необходимо записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$z'_k = f_k \,, \quad k = \overline{1..6} \,,$$

$$f_1 = z_2 \,, \quad f_2 = u \,, \quad f_3 = z_4 \,, \quad f_4 = u - z_3 \,,$$

$$f_5 = z_6 \,, \quad f_6 = u - {\omega_2}^2 z_5 \,,$$

и составить функцию Гамильтона — Понтрягина:

$$\mathrm{H} = u^2 + \sum_{k=1}^{6} \lambda_k f_k \,.$$

Система уравнений для отыскания множителей Лагранжа λ_k и управления u

$$\lambda_k' = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_k}\,, \quad k = \overline{1..6}\,, \quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u} = 0\,,$$

в нашем случае будет иметь вид

$$\begin{cases} \lambda_2'' = 0\,, \\ \lambda_4'' + \lambda_4 = 0\,, \\ \lambda_6'' + \omega_2^2 \lambda_6 = 0\,, \\ 2u + \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 = 0\,. \end{cases} \tag{7}$$

Из системы (7) следует, что управление запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} u(\tau) = C_1 + C_2\tau + C_3 \sin\tau + C_4 \cos\tau + \\ + C_5 \sin\omega_2\tau + C_6 \cos\omega_2\tau\,, \end{gathered} \tag{8}$$

где $C_k,\ k = \overline{1..6}$ — неизвестные произвольные постоянные.

4. Применение обобщенного принципа Гаусса

Рассмотрим теперь с совершенно новой точки зрения решение, полученное с помощью принципа максимума Понтрягина, минимизирующего функционал (6). С этой целью обратим внимание на то, что полученное с помощью принципа максимума Понтрягина управление (8) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Big(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_1^2\Big)\Big(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_2^2\Big) u = 0\,.$$

Возвращаясь в этом уравнении от безразмерных переменных к размерным и подставляя затем выражение F, взятое из первого уравнения системы (2), будем иметь:

$$\frac{m}{\varOmega_1^2}\frac{d^8\mathrm{X}_0}{dt^8}+\left(m+\frac{c_1}{\varOmega_1^2}+m\frac{\varOmega_2^2}{\varOmega_1^2}\right)\frac{d^6\mathrm{X}_0}{dt^6}-\frac{c_1}{\varOmega_1^2}\frac{d^6\mathrm{X}_1}{dt^6}+$$
$$+\left(c_1+m\varOmega_2^2+c_1\frac{\varOmega_2^2}{\varOmega_1^2}\right)\frac{d^4\mathrm{X}_0}{dt^4}-\left(c_1+c_1\frac{\varOmega_2^2}{\varOmega_1^2}\right)\frac{d^4\mathrm{X}_1}{dt^4}+$$
$$+c_1\varOmega_2^2\frac{d^2\mathrm{X}_0}{dt^2}-c_1\varOmega_2^2\frac{d^2\mathrm{X}_1}{dt^2}=0\,.$$

Полученное дифференциальное уравнение можно рассматривать как неголономную связь восьмого порядка, которая непрерывно выполняется при движении под действием управления, найденного при минимизации функционала (6).

Таким образом, при управлении, найденном с помощью принципа максимума Понтрягина, непрерывно выполняется неголономная связь высокого порядка, а в этом случае можно пытаться решать поставленную задачу управления с помощью теории движения неголономных систем со связями высокого порядка, разработанную в монографии [4].

Рассмотрим решаемую задачу как механическую задачу, на движение которой наложена линейная неголономная связь восьмого порядка

$$f_8^{\varkappa}=\sum_{\sigma=1}^{s}a_{8,\sigma}^{\varkappa}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},...,\mathbf{q}^{(7)})q_\sigma^{(8)}+a_{8,0}^{\varkappa}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},...,\mathbf{q}^{(7)})=0\,,$$
$$\varkappa=\overline{1..k}\,,\ \sigma=\overline{1..s}\,.$$

В этом случае уравнения движения можно записать в виде одного векторного уравнения [4,5]

$$M\mathbf{W}=\mathbf{Y}+\mathbf{R}\,,$$

где $\mathbf{R}$ — вектор реакции наложенных неголономных связей, $\mathbf{Y}$ — активные силы, действующие на систему, $\mathbf{W}$ — ускорение системы. При этом справедлив обобщенный принцип Гаусса [6]

$$\delta^{(8)}\,\mathrm{Z}_{(6)}=0\,,\quad \mathrm{Z}_{(6)}=\frac{M}{2}\left(\mathbf{W}^{(6)}-\frac{\mathbf{Y}^{(6)}}{M}\right)^2.$$

Его суть в том, что минимальной должна быть величина шестой производной вектора реакции связи

$$\mathbf{R}^2_{(6)} = M\frac{d^6\mathbf{W}}{dt^6} - \frac{d^6\mathbf{Y}}{dt^6}\,.$$

Выберем для нашего случая из всех возможных неголономных связей высокого порядка то семейство, для которого минимальная величина $\mathbf{R}^2_{(6)}$ равна нулю. Мы можем представить управляющее усилие как реакцию наложенной неголономной связи восьмого порядка

$$\mathbf{R} = u(t)\mathbf{b}\,, \quad \mathbf{b} = \sum_{\sigma=1}^{3} b_\sigma \mathbf{e}^\sigma\,.$$

Теперь, исходя из обобщенного принципа Гаусса, можно записать $\dfrac{d^6u}{dt^6} = 0$. Следовательно, управляющее воздействие можно искать в виде:

$$u = C_1 + C_2\tau + C_3\tau^2 + C_4\tau^3 + C_5\tau^4 + C_6\tau^5\,. \tag{9}$$

Решения $x_0(\tau)$, $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ системы (4) при неоднородности (8) или (9) удобно искать при помощи интегралов Дюамеля:

$$x_0(\tau) = \int_0^\tau u(\tau_1)(\tau - \tau_1)d\tau_1\,,$$

$$x_1(\tau) = \frac{1}{\omega_1}\int_0^\tau u(\tau_1)\sin(\omega_1(\tau - \tau_1))d\tau_1\,,$$

$$x_2(\tau) = \frac{1}{\omega_2}\int_0^\tau u(\tau_1)\sin(\omega_2(\tau - \tau_1))d\tau_1\,.$$

Удобство такого подхода заключается в том, что интегралы Дюамеля автоматически удовлетворяют нулевым начальным условиям. Поэтому, чтобы найти неизвестные постоянные C_i, следует x_0, x_1 и x_2 подставить в граничные условия на правом конце:

$$x_0(T) = 1\,, \quad x_1(T) = 0\,, \quad x_2(T) = 0\,,$$

$$x_0'(T) = 0\,, \quad x_1'(T) = 0\,, \quad x_2'(T) = 0\,.$$

5. Численные расчеты

Рассмотрим теперь некоторые случаи управления движением и сравним решения, полученные применением принципа максимума Понтрягина и обобщенного принципа Гаусса. В качестве примера построим решение для системы с набором параметров: $m = 100$ *кг*, $m_1 = 300$ *кг*, $m_2 = 30$ *кг*, $c_1 = 15$ *Н/м*, $c_2 = 45$ *Н/м*.

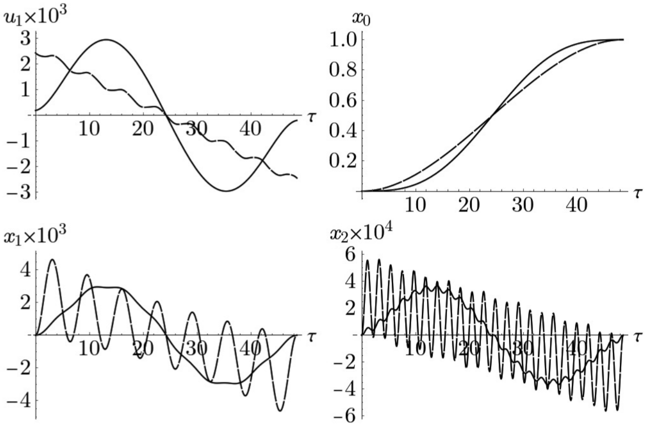


Рис. 2. Движение в безразмерных координатах при $T = 48{,}5$

Будем искать решение в двух масштабах для пары время–расстояние. В первом решении возьмем длительное время движения $\widetilde{T} = 110$ *с* и большое расстояние $S = 600$ *м*. Во втором расчете возьмем малое время движения $\widetilde{T} = 17$ *с* и короткое расстояние $S = 3$ *м*. В каждом из случаев получаем безразмерное время движения $T = 48{,}5$ и $T = 7{,}5$ соответственно.

Проведем расчет в безразмерных величинах, а затем по формулам замены (3) получим движение в исходных криволинейных координатах. Безразмерные результаты вычислений изображены на рис. 2 и 3, размерные — на рис. 4 и 5. Решения, полученные при помощи обобщенного принципа Гаусса, представлены сплошными кривыми, принципом максимума Понтрягина — штрихованными.

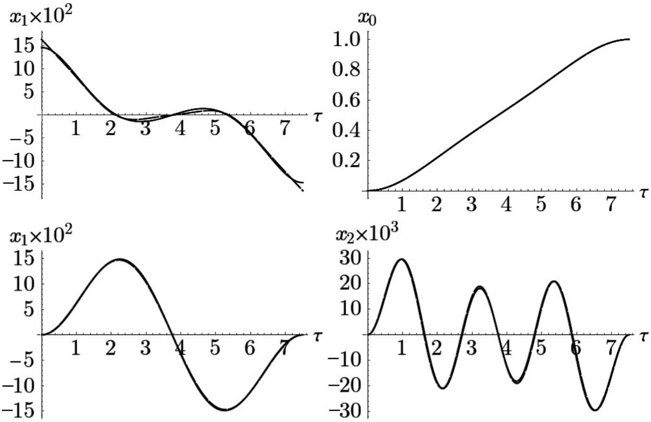


Рис. 3. Движение в безразмерных координатах при $T = 7{,}5$

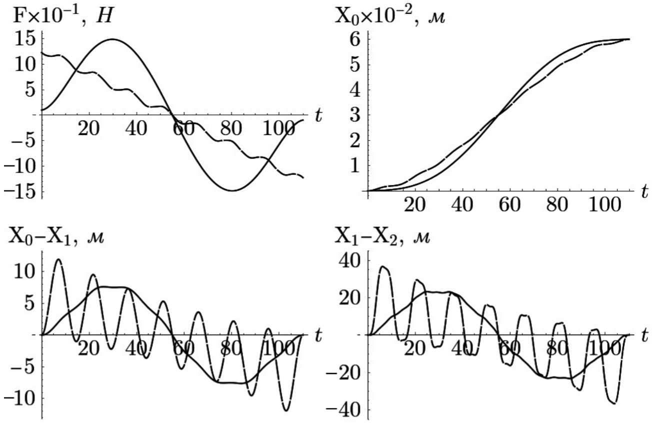


Рис. 4. Движение механической системы при $\widetilde{T} = 110$ *с* и $S = 600$ *м*

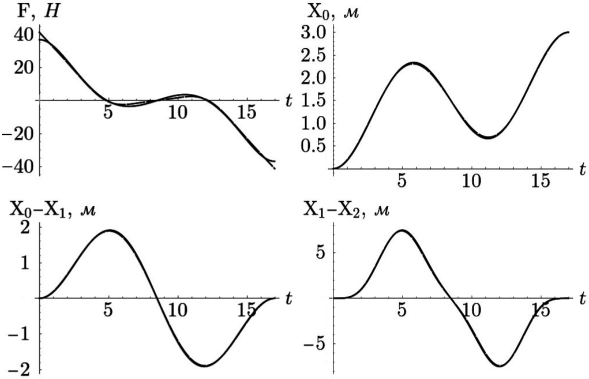


Рис. 5. Движение механической системы при $\widetilde{T} = 17$ *с* и $S = 3$ *м*

На представленных графиках можно заметить, что при длительном времени движения в решении, полученном применением принципа максимума Понтрягина, механическая система испытывает сильные колебания, что закономерно, так как вид управления, который получен этим методом, содержит гармонические слагаемые, действующие на систему с ее собственной частотой. Также управление, полученное классическим методом, имеет значительно более сложный вид, что затрудняет его реализацию на практике. Это существенно, так как воздействие, содержащее собственные гармоники системы, даже в случае незначительной ошибки при реализации управления может ввести систему в резонанс, а это, в свою очередь, может привести к катастрофе. Решение, полученное обобщенным принципом Гаусса, имеет полиномиальный вид и с этой точки зрения выглядит более надежным. К списку преимуществ метода из области неголономной механики можно отнести и тот факт, что полученное этим методом управление при длительном движении начинается плавным нарастанием управляющего усилия, тогда как управляющее усилие, полученное применением принципа максимума Понтрягина, имеет резкий скачок в начале и в конце движения. Однако несмотря на существенные различия в подходах к решению поставленной задачи, эти два метода имеют тесную связь, что наглядно иллюстрируют графики, полученные при коротком времени движения, на которых видно, что решения этими двумя методами все более сближаются с уменьшением временного промежутка, отведенного системе на достижение требуемого фазового состояния.

6. Выводы

В работе представлены два метода нахождения управляющего воздействия, переводящего трехмассовую систему с пружинами из одного состояния покоя в конечное состояние покоя с перемещением на заданное расстояние и за заданное время.

Было показано, что решение методом неголономной механики при кратковременном движении дает результаты, близкие к решениям с применением принципа максимума Понтрягина.

В случае длительного движения метод обобщенного принципа Гаусса показывает результаты, положительно отличающиеся от результатов решения классическим методом принципа максимума Понтрягина. В качестве преимуществ нового метода в случае длительного движения системы выявлено более плавное движение с постепенным нарастанием управляющего усилия. Тогда как классический метод в этом плане показал результаты, приводящие к интенсивным колебаниям в системе на всем промежутке движения с большими скачками управляющего усилия в начале и в конце движения.

Литература

1. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. 536 с.
2. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
3. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управления колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
4. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука, 2009. 344 с.
5. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Наука; Физматлит, 2005. 269 с.
6. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Доклады АН СССР, 1983. Т. 269. № 6. С. 1328–1330.

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ И БЕЗОПАСНОСТИ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

А. А. Морщинина, Д. А. Морщинина

Построены математические модели функционирования автоматизированных систем управления различных конфигураций. Определены показатели надежности и безопасности системы в целом и входящих в нее элементов с учетом структуры технических средств и особенностей программного обеспечения.

1. Введение

В настоящее время автоматизированные системы управления (АСУ) получили широкое применение в различных областях человеческой деятельности [1–5]. Они используются в отраслях промышленности, транспорте, энергетике и т. д. Выход из строя элемента такой системы может привести к аварийной ситуации и, как следствие, к материальным потерям и даже человеческим жертвам.

Для обеспечения функционирования АСУ с заданными параметрами необходимо осуществлять анализ показателей надежности и безопасности как системы в целом, так и входящих в нее элементов. В зависимости от условий эксплуатации на них накладываются определенные требования, установленные нормативной документацией [2, 6, 7].

Значения показателей надежности и безопасности определяются как аппаратной, так и программной составляющей системы. Поэтому математические модели, описывающие функционирование автоматизированных систем управления, должны учитывать особенности структуры технических средств и программного обеспечения.

Методика, приведенная в настоящей статье, используется авторами для оценки надежности и безопасности Управляющего вычислительного комплекса производства ОАО «Радиоавионика», являющегося технической основой микропроцессорной системы ЭЦ-ЕМ.

Доклад на семинаре 12 февраля 2019 г.
© А. А. Морщинина, Д. А. Морщинина, 2019

Эта станционная система обеспечивает централизованное управление и автоматический контроль состояния напольного оборудования железнодорожной станции.

2. Оценка надежности автоматизированных систем управления

Рассмотрим автоматизированную систему управления, представляющую собой комплекс технических средств, характеризующихся определенной структурой и выполняемыми функциями. Элементы, идентичные по строению и назначению, можно объединить в функциональные блоки. Будем считать, что система находится в работоспособном состоянии, если каждый из входящих в нее блоков выполняет заданную функцию с требуемыми параметрами (рис. 1) [8–12].

Рис. 1. Работоспособное состояние системы

Предположим, что рассматриваемая система состоит из функциональных блоков трех типов. Первый включает в себя три элемента и сохраняет работоспособность в случае исправной работы хотя бы двух из них (рис. 2).

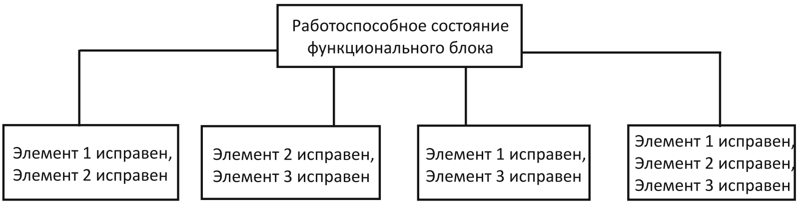


Рис. 2. Работоспособное состояние функционального блока первого типа

Второй тип функциональных блоков представляет собой совокупность двух элементов и остается работоспособным при исправности хотя бы одного (рис. 3).

Рис. 3. Работоспособное состояние функционального блока второго типа

Функциональный блок, состоящий из одного элемента, относится к третьему типу.

Анализ надежности блоков исходной системы проводится на основе теории марковских случайных процессов. При этом рассматривается марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем [13, 14], т. е.:

1) для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы при $t > t_0$ зависит только от ее состояния в текущий момент $t = t_0$ и не зависит от того, как развивался процесс при $t < t_0$;

2) система время от времени мгновенно переходит из одного возможного состояния в другое; состояния образуют счетное множество;

3) переход из одного состояния в другое возможен в любой случайный момент времени.

В этом случае смена состояний системы происходит под действием пуассоновского потока событий, который характеризуется отсутствием последствий (события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга) и ординарностью (события происходят поодиночке, а не парами). Данный процесс описывается посредством системы дифференциальных уравнений Колмогорова [8, 11–13].

Функциональные блоки первых двух типов представляют собой резервированную систему с восстановлением, граф состояний которой приведен на рис. 4.

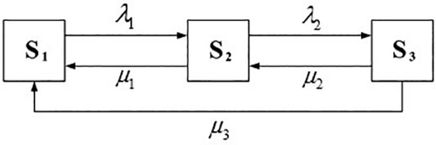


Рис. 4. Граф состояний резервированной системы с восстановлением

Данная система может находиться в одном из трех состояний:

1) S_1 — все устройства функционального блока исправны;

2) S_2 — выход из строя одного из устройств функционального блока;

3) S_3 — выход из строя двух устройств функционального блока. Переход из S_i в S_j $\left(i,\, j = \overline{1,3}\right)$ происходит с интенсивностями $\lambda_k =$ const $(k = 1, 2)$, $\mu_n =$ const $\left(n = \overline{1,3}\right)$.

Для рассматриваемых типов функциональных блоков работоспособными состояниями являются S_1, S_2. Соответствующая система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид [15]

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_1 P_1(t) + \mu_1 P_2(t) + \mu_3 P_3(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1 P_1(t) - (\lambda_2 + \mu_1) P_2(t) + \mu_2 P_3(t), \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_2 P_2(t) - (\mu_2 + \mu_3) P_3(t), \\ P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

где $P_i(t)$ — вероятность нахождения системы в состоянии S_i в момент времени t.

Положим, что начальные условия системы (1) таковы:

$$P_1(0) = 1, \quad P_2(0) = 0, \quad P_3(0) = 0. \tag{2}$$

Осуществляя необходимые преобразования, находим характеристические числа (1):

$$q_1 = 0,$$

$$q_2 = \frac{-\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)}{2} - \\ - \frac{\sqrt{\left(\lambda_1-\lambda_2+\mu_1-\mu_2-\mu_3\right)^2+4\lambda_2\left(\mu_1-\mu_3\right)}}{2},$$

$$q_3 = \frac{-\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)}{2} + \\ + \frac{\sqrt{\left(\lambda_1-\lambda_2+\mu_1-\mu_2-\mu_3\right)^2+4\lambda_2\left(\mu_1-\mu_3\right)}}{2}.$$

С учетом последних общее решение системы (1) будет

$$P_1(t) = C_1\left(\frac{\mu_1\left(\mu_2+\mu_3\right)}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{\mu_3}{\lambda_1}\right)+C_2\left(\frac{\left(\lambda_2+\mu_1+q_2\right)\left(\mu_2+\mu_3+q_2\right)}{\lambda_1\lambda_2} - \\ - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)e^{q_2t}+C_3\left(\frac{\left(\lambda_2+\mu_1+q_3\right)\left(\mu_2+\mu_3+q_3\right)}{\lambda_1\lambda_2}-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)e^{q_3t},$$

$$P_2(t) = C_1\frac{\mu_2+\mu_3}{\lambda_2}+C_2\frac{\mu_2+\mu_3+q_2}{\lambda_2}e^{q_2t}+C_3\frac{\mu_2+\mu_3+q_3}{\lambda_2}e^{q_3t},$$

$$P_3(t) = C_1+C_2e^{q_2t}+C_3e^{q_3t}.$$

Отсюда, принимая во внимание начальные данные (2), получаем частное решение (1):

$$\begin{gathered} P_1(t) = \frac{\mu_1\left(\mu_2+\mu_3\right)+\lambda_2\mu_3}{q_2q_3} - \\ - \left(\frac{\left(\lambda_2+\mu_1+q_2\right)\left(\mu_2+\mu_3+q_2\right)-\lambda_2\mu_2}{q_2\left(q_3-q_2\right)}\right)e^{q_2t} + \\ + \left(\frac{\left(\lambda_2+\mu_1+q_3\right)\left(\mu_2+\mu_3+q_3\right)-\mu_2\lambda_2}{q_3\left(q_3-q_2\right)}\right)e^{q_3t}, \\ P_2(t) = \frac{\lambda_1\left(\mu_2+\mu_3\right)}{q_2q_3}-\frac{\lambda_1\left(\mu_2+\mu_3+q_2\right)}{q_2\left(q_3-q_2\right)}e^{q_2t}+\frac{\lambda_1\left(\mu_2+\mu_3+q_3\right)}{q_3\left(q_3-q_2\right)}e^{q_3t}, \\ P_3(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{q_2q_3}-\frac{\lambda_1\lambda_2}{q_2\left(q_3-q_2\right)}e^{q_2t}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{q_3\left(q_3-q_2\right)}e^{q_3t}. \end{gathered} \tag{3}$$

Предельные вероятности состояний системы удовлетворяют выражениям

$$P_1 = \lim_{t\to\infty} P_1\left(t\right), \; P_2 = \lim_{t\to\infty} P_2\left(t\right), \; P_3 = \lim_{t\to\infty} P_3\left(t\right).$$

Тогда, поскольку числа $q_2 < 0, \; q_3 < 0$:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \lambda_2\mu_3}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_1\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \lambda_2\mu_3}, \\ P_2 &= \frac{\lambda_1\mu_2 + \lambda_1\mu_3}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_1\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \lambda_2\mu_3}, \\ P_3 &= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_1\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \lambda_2\mu_3}. \end{aligned} \tag{4}$$

Зависимости (3), (4) позволяют вычислить показатели надежности [9, 11, 12] для функциональных блоков первого и второго типа.

Функция готовности — вероятность нахождения системы в работоспособном состоянии — удовлетворяет выражению

$$K_\Gamma\left(t\right) = P_1\left(t\right) + P_2\left(t\right)$$

или, согласно (3),

$$\begin{gathered} K_\Gamma\left(t\right) = \frac{\mu_1\left(\mu_2+\mu_3\right) + \lambda_1\left(\mu_2+\mu_3\right) + \lambda_2\mu_3}{q_2 q_3} - \\ - \left(\frac{\left(\lambda_2+\mu_1+q_2\right)\left(\mu_2+\mu_3+q_2\right) + \lambda_1\left(\mu_2+\mu_3+q_2\right) - \lambda_2\mu_2}{q_2\left(q_3-q_2\right)}\right) e^{q_2 t} + \\ + \left(\frac{\left(\lambda_2+\mu_1+q_3\right)\left(\mu_2+\mu_3+q_3\right) + \lambda_1\left(\mu_2+\mu_3+q_3\right) - \mu_2\lambda_2}{q_3\left(q_3-q_2\right)}\right) e^{q_3 t}. \end{gathered}$$

Коэффициент готовности

$$K_\Gamma = \lim_{t\to\infty} K_\Gamma\left(t\right) = P_1 + P_2.$$

С учетом (4) имеем:

$$K_\Gamma = \frac{\lambda_1\mu_2 + \lambda_1\mu_3 + \lambda_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_1\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \lambda_2\mu_3}.$$

Интенсивность отказов системы

$$\Lambda = \frac{1 - K_\Gamma}{K_\Gamma T_B}, \tag{5}$$

где T_B — среднее время восстановления.

Нетрудно заметить, что значения показателей надежности зависят от величин интенсивностей переходов системы из одного состояния в другое. Они, в свою очередь, определяются интенсивностями отказов элементов, входящих в состав блока, а также временем восстановления отказавших устройств. Так, для первого типа функциональных блоков $\lambda_1 = 3\lambda$, $\lambda_2 = 2\lambda$, для второго — $\lambda_1 = 2\lambda$, $\lambda_2 = \lambda$, где λ — интенсивность отказов составляющих элементов.

Третий тип функциональных блоков является восстанавливаемой системой без резервирования. На рис. 5 представлен граф ее состояний.

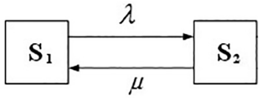


Рис. 5. Граф состояний восстанавливаемой системы без резервирования

Здесь S_1, S_2 — состояние, в котором может находиться блок в процессе функционирования:

1) S_1 — функциональный блок исправен;

2) S_2 — выход из строя функционального блока.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова и начальные условия в данном случае выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t), \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t), \\ P_1(t) + P_2(t) = 1, \end{cases} \tag{6}$$

$$P_1(0) = 1, \quad P_2(0) = 0, \tag{7}$$

где $P_i\left(t\right)$ — вероятность нахождения системы в состоянии S_i в момент времени t; $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ — интенсивности переходов из S_i в S_j $(i, j = 1, 2)$.

Решением (6), (7) являются функции:

$$P_1\left(t\right) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$P_2\left(t\right) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Отсюда находим предельные вероятности состояний системы

$$P_1 = \lim_{t\to\infty} P_1\left(t\right) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad P_2 = \lim_{t\to\infty} P_2\left(t\right) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Тогда функция готовности и коэффициент готовности определяются соотношениями:

$$K_{\Gamma}\left(t\right) = P_1\left(t\right) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$K_{\Gamma} = \lim_{t\to\infty} K_{\Gamma}\left(t\right) = P_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Интенсивность отказов данного функционального блока вычисляется по формуле (5).

Показатели надежности автоматизированной системы управления в целом зависят от количества и характера функционирования ее элементов. Функция готовности и коэффициент готовности системы вычисляются по формулам:

$$\tilde{K}_{\Gamma}\left(t\right) = K_{\Gamma 1}\left(t\right) \cdot K_{\Gamma 2}\left(t\right) \cdot \ldots \cdot K_{\Gamma \mathrm{N}}\left(t\right),$$

$$\tilde{K}_{\Gamma} = K_{\Gamma 1} \cdot K_{\Gamma 2} \cdot \ldots \cdot K_{\Gamma \mathrm{N}},$$

где $K_{\Gamma \mathrm{i}}\left(t\right)$ $\left(i = \left(\overline{1, N}\right)\right)$ — функция готовности i-го функционального блока, $K_{\Gamma \mathrm{i}}$ $\left(i = \left(\overline{1, N}\right)\right)$ — коэффициент готовности i-го функционального блока.

В свою очередь, интенсивность отказов системы будет

$$\tilde{\Lambda} = \frac{1 - \tilde{K}_{\Gamma}}{\tilde{K}_{\Gamma}\tilde{T}_{\mathrm{B}}}.$$

Здесь $\tilde{T}_{\text{В}}$ — среднее время восстановления системы.

Построенная математическая модель позволяет произвести анализ показателей надежности сложных технических систем различной конфигурации.

Проведем оценку функции готовности, коэффициента готовности и интенсивности отказов систем, структуры которых приведены в табл. 1.

Таблица 1. **Технические системы различной конфигурации**

№ пп	Наименование технической системы	Состав технической системы: Наименование функционального блока	Состав технической системы: Тип функционального блока	Состав технической системы: Элементы функционального блока	Интенсивность отказов элементов функционального блока λ, 1/ч
1	Система 1	Функциональный блок 1	1-й тип	Элемент 1	10^{-3}
				Элемент 2	
				Элемент 3	
		Функциональный блок 2	1-й тип	Элемент 1	
				Элемент 2	
				Элемент 3	
		Функциональный блок 3	1-й тип	Элемент 1	
				Элемент 2	
				Элемент 3	
2	Система 2	Функциональный блок 1	2-й тип	Элемент 1	
				Элемент 2	
		Функциональный блок 2	2-й тип	Элемент 1	
				Элемент 2	
		Функциональный блок 3	2-й тип	Элемент 1	
				Элемент 2	
3	Система 3	Функциональный блок 1	1-й тип	Элемент 1	
				Элемент 2	
				Элемент 3	
		Функциональный блок 2	2-й тип	Элемент 1	
				Элемент 2	
		Функциональный блок 3	3-й тип	Элемент 1	
4	Система 4	Функциональный блок 1	1-й тип	Элемент 1	
				Элемент 2	
				Элемент 3	
		Функциональный блок 2	3-й тип	Элемент 1	
		Функциональный блок 3	3-й тип	Элемент 1	
5	Система 5	Функциональный блок 1	2-й тип	Элемент 1	
				Элемент 2	
		Функциональный блок 2	3-й тип	Элемент 1	
		Функциональный блок 3	3-й тип	Элемент 1	

Окончание табл. 1

№ пп	Наименование технической системы	Состав технической системы			Интенсивность отказов элементов функционального блока λ, 1/ч
		Наименование функционального блока	Тип функционального блока	Элементы функционального блока	
6	Система 6	Функциональный блок 1	3-й тип	Элемент 1	
		Функциональный блок 2	3-й тип	Элемент 1	
		Функциональный блок 3	3-й тип	Элемент 1	

Замечание. *В перечисленных системах (табл. 1) интенсивности отказов всех элементов приняты равными* 10^{-3} *1/ч для того, чтобы оценить влияние структуры на значения показателей надежности.*

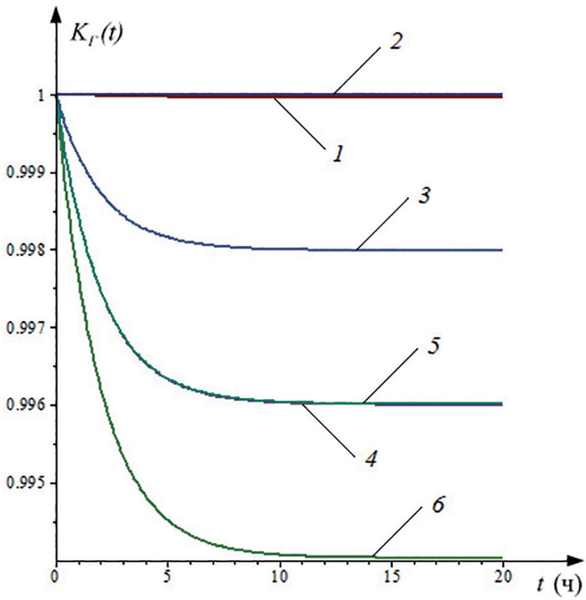


Рис. 6. Функция готовности систем 1–6

На рис. 6 представлены графики функции готовности систем 1–6 (кривые 1–6 соответственно). Значения коэффициента готовности и интенсивности отказов рассматриваемых систем помещены в табл. 2.

Таблица 2. **Значения показателей надежности систем 1–6**

№ пп	Наименование системы	Коэффициент готовности K_Γ	Интенсивность отказов Λ, 1/ч
1	Система 1	0.999964	$1.789 \cdot 10^{-5}$
2	Система 2	0.999988	$5.976 \cdot 10^{-6}$
3	Система 3	0.997988	$1.008 \cdot 10^{-3}$
4	Система 4	0.996000	$2.008 \cdot 10^{-3}$
5	Система 5	0.996008	$2.004 \cdot 10^{-3}$
6	Система 6	0.994024	$3.006 \cdot 10^{-3}$

Полученные результаты (см. рис. 6, табл. 2) отражают особенности структуры технической системы: количество элементов, входящих в систему, и наличие резервирования существенно влияют на значения показателей надежности.

3. Оценка безопасности автоматизированных систем управления

Обеспечение безопасного функционирования автоматизированной системы управления заключается в минимизации вероятности возникновения опасного отказа. Под опасным отказом будем понимать искажение контрольной или управляющей информации, приводящее к опасному событию.

Оценка безопасности функционирования АСУ производится на основе метода анализа дерева отказов. При этом учитываются особенности структуры технических средств и программного обеспечения.

Для определения вероятности возникновения опасного отказа системы необходимо проанализировать все возможные пути потоков управляющей и контрольной информации, включающие различные функциональные блоки (рис. 7).

Тогда дерево опасного искажения рассматриваемого потока информации будет иметь вид, представленный на рис. 8. Откуда следует, что вероятность возникновения рассматриваемого события зависит от вероятности опасного искажения информации в каждом из функциональных блоков. Последний представляет собой совокупность p одинаковых элементов, программное обеспечение которых

Рис. 7. Путь i-го потока информации в автоматизированной системе управления технологическими процессами

осуществляет обмен полученными данными внутри блока, их сравнение, а затем формирование результирующей информации на основе совпадения данных в k из p элементов, образующих M групп. Искажение информации в каждом элементе возникает при отказе устройства и может быть не обнаружено программными средствами с соответствующей долей вероятности (рис. 9).

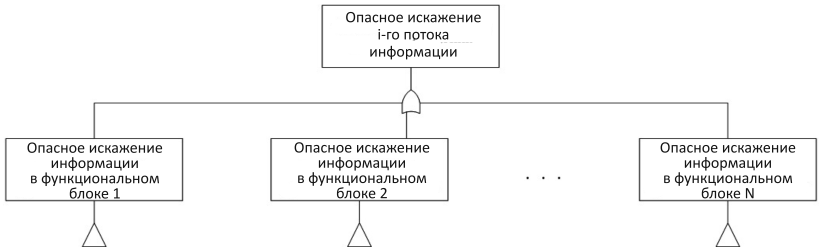


Рис. 8. Дерево опасного искажения i-го потока информации

Следовательно, вероятность опасного искажения информации в j-м функциональном блоке удовлетворяет выражению

$$P_j = \sum_{m=1}^{M} \prod_{q=1}^{k} \left(\tilde{P}_{mq} \cdot \hat{P}_{mq} \right), \tag{8}$$

где $\tilde{P}_{mq}$ — вероятность неисправности элемента q в группе m, $\hat{P}_{mq}$ — вероятность необнаружения программными средствами искажения данных в элементе q группы m, возникшего в результате его неисправности.

Тогда, согласно рис. 8, вероятность опасного искажения i-го потока информации будет

$$P_i = \sum_{j=1}^{N} P_j. \tag{9}$$

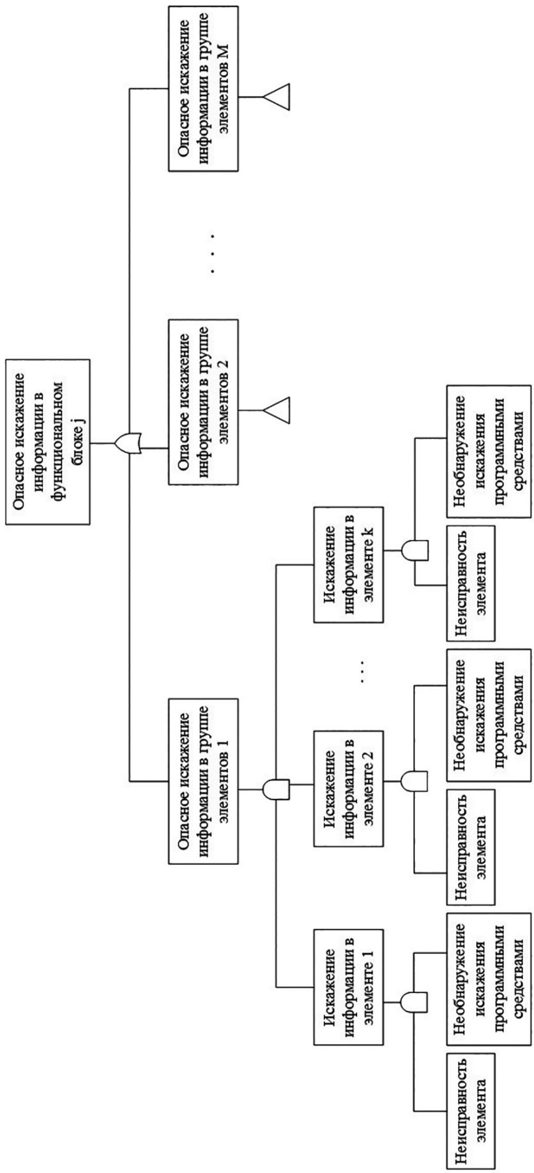


Рис. 9. Дерево опасного искажения информации в j-м функциональном блоке

Для определения вероятности опасного отказа автоматизированной системы управления технологическими процессами в целом, необходимо просуммировать вероятности опасных искажений всех возможных потоков информации.

4. Выводы

1. Построены математические модели функционирования АСУ.
2. Определены показатели надежности как АСУ в целом, так и входящих в нее функциональных блоков.
3. Произведена оценка влияния структуры АСУ на значения ее показателей надежности.
4. Выведена формула для вероятности опасного отказа АСУ с учетом особенностей структуры технических средств и программного обеспечения.
5. Разработанные математические модели позволяют оценить надежность и безопасность системы, состоящей из произвольного числа функциональных блоков.

Авторы выражают благодарность Юрию Михайловичу Далю за поддержку и ценные советы в ходе работы.

Литература

1. *Стефани Е. П.* Основы построения АСУ ТП: учеб. пособие для вузов. М.: Энергоиздат, 1982. 352 с.
2. *Федоров Ю. Н.* Справочник инженера по АСУТП: Проектирование и разработка. Учеб. пособие. 2-е изд. М.: Инфа-Инженерия, 2016. 484 с.
3. *Лавренюк И. В.* Автоматизированные системы управления на железнодорожном транспорте: учеб. пособие / И. В. Лавренюк. М.: УМЦ ЖДТ, 2017. 242 с.
4. *Пъявченко Т. А., Финаев В. И.* Автоматизированные информационно-управляющие системы. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2007. 271 с.
5. *Федотов А. В.* Автоматизация управления в производственных системах: учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2001. 354 с.
6. *Сапожников В. В.* Методы построения безопасных микропроцессорных систем железнодорожной автоматики / В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников, Х. А. Христов, Д. В. Гавзов под ред. Вл. В. Сапожникова. М.: Транспорт, 1995. 272 с.

7. *Сапожников В. В.* Сертификация и доказательство безопасности систем железнодорожной автоматики / В. В. Сапожников, Вл. В. Сапожников, В. И. Талалаев и др. / под ред. Вл. В. Сапожникова. М.: Транспорт, 1997. 288 с.
8. *Половко А. М.* Основы теории надежности / А. М. Половко, С. В. Гуров. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 704 с.
9. *Острейковский В. А.* Теория надежности: учебник для вузов / В. А. Острейковский. М.: Высш. шк., 2003. 463 с.
10. *Беляев Ю. К.* Надежность технических систем: справочник / Ю. К. Беляев, В. А. Богатырев, В. В. Болотин и др. / под ред. И. А. Ушакова. М.: Радио и связь, 1985. 608 с.
11. *Брылеев А. М.* Основы железнодорожной автоматики и телемеханики: учебник для вузов ж.-д. трансп. 2-е изд., перераб. и доп. / А. М. Брылеев, А. С. Переборов, Вл. В. Сапожников, А. В. Смирнова, А. А. Эйлер. М.: Транспорт, 1977. 376 с.
12. *Переборов А. С.* Основы железнодорожной автоматики и телемеханики: учебник для вузов ж.-д. трансп. 3-е изд., перераб. и доп. / А. С. Переборов, А. М. Брылеев, В. В. Сапожников и др. / под ред. А. С. Переборова. М.: Транспорт, 1984. 384 с.
13. *Вентцель Е. С.* Исследование операций / Е. С. Вентцель. М.: Советское радио, 1972. 552 с.
14. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. В 2-х т. Т. 1: пер. с англ. М.: Мир, 1984. 528 с.
15. *Морщинина А. А., Морщинина Д. А.* К вопросу о функциональной надежности сложных систем // Радиоэлектронные комплексы многоцелевого назначения: сб. науч. трудов. Юбилейный выпуск. 1991–2016 / ОАО «Радиоавионика». СПб.: Политехника, 2016. С. 255–264.

ОСОБЕННОСТИ ОТРАЖЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ КОМПАКТНОГО УЗКОНАПРАВЛЕННОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА

А. В. Дементьев

Локация основана на том, что анализ свойств отраженного сигнала дает возможность получать информацию о поверхности исследуемого или обнаруживаемого объекта. При этом для локации более далеких объектов и в большем телесном угле можно использовать два способа: 1) посылать высокоэнергичный поток излучения (электромагнитного, акустического и т. д.) сразу по всем возможным направлениям короткими импульсами; 2) сосредоточить этот поток в узком луче и сканировать им по различным направлениям. В связи с конечностью скорости распространения сигналов облучение одного и того же объекта этими двумя способами может приводить к появлению отраженных импульсов с различными параметрами.

В работе рассмотрено отражение экраном сферической и эллипсоидальной формы электромагнитного излучения компактного источника, равномерно вращающегося вокруг своей оси и излучающего в ограниченном телесном угле. Рассчитаны профили отраженных импульсов и их моменты прихода к удаленному наблюдателю. Определены условия, при которых указанные способы облучения экрана дают отраженные импульсы с существенно отличающимися параметрами.

1. Введение

Анализ излучения, отраженного некоторым объектом, позволяет получать информацию о геометрических и физических свойствах его поверхности. В частности, на этом основана локация, когда в направлении объекта, который предполагается обнаружить или исследовать, посылается сигнал с известными характеристиками, а затем регистрируется отраженное объектом излучение. Мы будем иметь в виду источники электромагнитного излучения, хотя аналогичное рассмотрение, в принципе, применимо и к источникам иных типов излучения, например, акустического.

Если говорить о локации, то для задачи постоянного слежения по всем возможным направлениям за объектами, как можно более

Доклад на семинаре 12 марта 2019 г.
© А. В. Дементьев, 2019

далекими, очевидным решением явилось бы непрерывное излучение по всем этим направлениям мощного сигнала. Однако излучение подобного сигнала потребовало бы нерационально больших затрат энергии. Избежать этого можно двумя способами:

1) посылать сигнал короткими импульсами по всем возможным направлениям сразу;
2) посылать непрерывный сигнал в узком телесном угле и организованную таким образом диаграмму направленности источника быстро перемещать по всем возможным направлениям.

Оба этих способа облучения исследуемого объекта ведут к тому, что отраженное им излучение будет зависеть от времени — иметь импульсный характер.

Оказывается, что при определенных условиях форма профилей отраженных импульсов в случаях 1 и 2 могут значительно различаться. Настоящая работа посвящена исследованию условий, при которых это происходит, а также расчету соответствующих профилей отраженных импульсов.

2. Постановка задачи

Будем считать, что источник излучения имеет малые размеры, так что его можно рассматривать как точечный. Пусть его диаграмма направленности (ДН) представляет собой плоский угол α, в пределах которого источник излучает равномерно; при этом ДН вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\pi/P$, где P — период ее вращения вокруг некоторой оси AA', проходящей через источник (аналогично вращающемуся маяку).

В качестве отражающего объекта сначала рассмотрим шарообразный экран радиуса R, центр которого расположен на расстоянии r_s от источника. Будем предполагать, что каждая площадка его поверхности переизлучает все падающее на нее излучение таким образом, что ее яркость оказывается одинаковой во всех направлениях (т. е. она представляет собой так называемый ламбертов источник) — подобная ситуация возникает, например, при диффузном отражении, когда поверхность отражателя имеет неровный шероховатый вид. Кроме того, считаем, что отражение от поверхности экрана происходит мгновенно. Очевидно, что отраженный сигнал будет периодическим с тем же периодом P.

Введем декартову систему координат с началом в точке C — центре шарообразного экрана; ось z направим на источник, расположенный в точке S. Также введем сферическую систему координат $(r,\, \theta,\, \varphi)$: $x = r\, \sin\theta\, \cos\varphi$, $y = r\, \sin\theta\, \sin\varphi$, $z = r\, \cos\theta$.

Будем считать, что ДН источника — угол α с вершиной в точке S, 1) расположена перпендикулярно плоскости (yz); 2) если ДН повернута таким образом, что оказывается лежащей в плоскости (xz), то биссектриса α лежит на оси z; при этом сечение экрана указанной плоскостью — круг радиуса R — целиком попадает внутрь α (рис. 1).

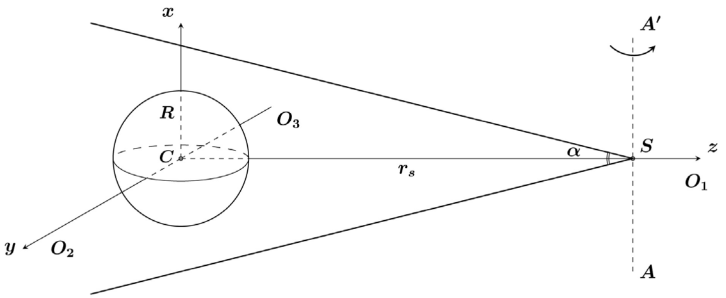


Рис. 1. Схема взаимного расположения отражающего экрана — шара с центром в точке C и радиусом R, точечного источника S ($CS = r_s$) и диаграммы направленности источника — плоского угла α. AA' — ось вращения источника; дуга со стрелкой показывает направление его вращения. O_1, O_2 и O_3 — рассматриваемые направления на наблюдателей

Мы будем рассчитывать профили импульсов, отраженных в положительном направлении оси z и в положительном и отрицательном направлениях оси y. Наблюдателей, которые регистрируют отраженное излучение, идущее в этих направлениях (а также и сами эти направления), будем обозначать O_1, O_2 и O_3 соответственно. Расстояние от начала координат до любого из указанных наблюдателей обозначим r_o. При расчетах будем принимать, что

$$r_o \gg r_s \gg R \tag{1}$$

и пренебрегать соответствующими малыми членами. Также введем обозначение $k \equiv r_s/R$; в силу (1), $k \gg 1$.

Заметим, что рассмотрение ДН вращающегося компактного источника в виде плоского угла, ориентированного указанным образом, означает, что каждая малая площадка поверхности экрана, находящаяся в прямой видимости с местоположения источника (далее будем называть такие площадки доступными), облучается импульсами, профиль которых по времени описывается δ-функцией Дирака. Соответственно, отражают эти площадки импульсы также δ-образной формы. Однако в силу того, что разные участки поверхности экрана облучаются δ-импульсами неодновременно и также отраженные импульсы неодновременно приходят к наблюдателю, суммарный регистрируемый импульс отраженного излучения будет описываться некоторым профилем $h(t)$, имеющим уже конечную длительность по времени. Указанная неодновременность возникает вследствие того, что разные площадки расположены на различных расстояниях и от источника, и от наблюдателя; кроме того, облучение всех доступных площадок на сферическом экране ненулевого радиуса требует поворота ДН, который занимает конечное время.

Если ДН источника будет такова, что каждая площадка поверхности экрана облучается импульсом с некоторым профилем $s(t)$, имеющим конечную длительность по времени, то в этом случае профиль импульса, отраженного всем экраном, будет определяться сверткой [1]

$$\phi(\tau) = \int h(\tau')\, s(\tau - \tau')\, d\tau'. \tag{2}$$

Использование свертки предполагает, что отдельные δ-образные импульсы отражаются от поверхности экрана независимо друг от друга, т. е. процесс отражения линеен.

3. Два режима облучения экрана

Рассмотрим сечение системы экран — источник плоскостью (yz). Введем в этой плоскости декартову $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и полярную $(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$: $\tilde{x} = \tilde{r}\cos\tilde{\varphi}$, $\tilde{y} = \tilde{r}\sin\tilde{\varphi}$, системы координат с центром в точке S. Ось $S\tilde{x}$ направим противоположно оси Cy, а ось $S\tilde{y}$ — противоположно Cz (рис. 2). Геометрическое место точек плоскости $(\tilde{x}\tilde{y})$, до которых в некоторый момент времени t дошло излучение, представляет собой архимедову спираль, определяемую уравнением

$$\tilde{r} = c(t - \tilde{\varphi}/\omega), \tag{3}$$

где c — скорость распространения излучения [2]. Фактически эта спираль представляет собой сечение волнового фронта плоскостью $(\tilde{x}\tilde{y})$ (или, что то же самое, плоскостью (yz)).

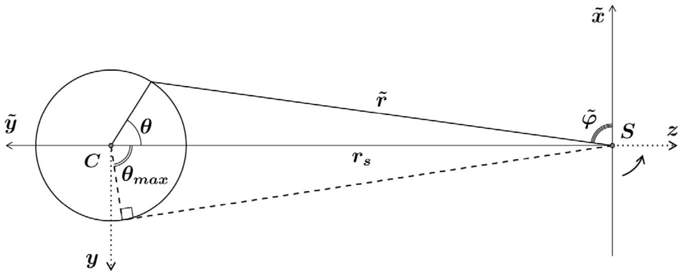


Рис. 2. Сечение системы экран–источник плоскостью (yz)

Введем два характерных промежутка времени, связанных с процессом облучения экрана.

1) Время прохождения излучением расстояния, равного диаметру шара:
$$t_1 = 2R/c. \tag{4}$$

2) Время поворота ДН на угол β, под которым из источника виден круг радиуса R:

$$\beta = 2\arcsin R/r_s = 2\arcsin 1/k \simeq 2/k,$$

$$t_2 = \frac{2/k}{2\pi} P = \frac{P}{\pi k}. \tag{5}$$

В зависимости от соотношения между этими временами можно выделить два крайних режима падения излучения на поверхность экрана. При $t_1 \gg t_2$ время облучения экрана по порядку величины равно времени прохождения излучением расстояния от ближайшей к источнику доступной площадки до самой дальней из них. В этом случае на расстоянии r_s от источника спираль (3) является полностью раскрученной. При этом можно считать, что на поверхность экрана падает плоский волновой фронт, который проходит по ней в направлении, противоположном направлению оси Cz со скоростью распространения излучения (рис. 3, *а*).

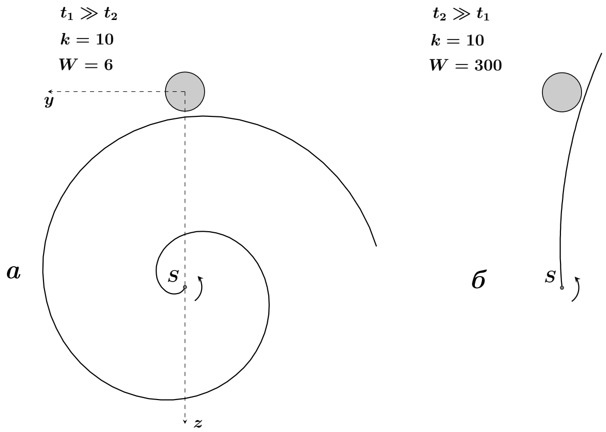


Рис. 3. Сечение волнового фронта плоскостью (yz) при различных соотношениях между временами t_1 и t_2

Если же наоборот, $t_2 \gg t_1$, то время облучения доступных площадок определяется только временем пробегания ДН по поверхности экрана за счет поворота источника. Тогда на расстоянии r_s от источника спираль еще только начинает раскручиваться (рис. 3, *б*), и можно считать, что плоский волновой фронт пробегает по экрану в направлении Cy (т. е. справа налево в соответствии с рис. 3, *б*) со скоростью ωr_s; при этом само излучение распространяется перпендикулярно направлению движения фронта.

Можно ввести безразмерный параметр Q:

$$Q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{cP}{2\pi r_s} \tag{6}$$

— реализуемый режим облучения экрана зависит от того, как этот параметр соотносится с единицей. Заметим, что Q не зависит от радиуса экрана R. Однако профили отраженных импульсов при одном и том же Q могут получаться различными в зависимости от значения R. Во-первых, чем больше радиус шара, тем больше может оказаться амплитуда импульса. Во-вторых, длительность импульса, равная по порядку величины $t_1 + t_2$, также зависит от R согласно (4) и (5).

Подставим в (6) числовое значение скорости света c, выразив P в секундах, а r_s — в километрах:

$$Q \simeq 5 \cdot 10^4 \frac{P\,(\text{с})}{r_s\,(\text{км})}.$$

Отсюда видно, что в земных условиях для обычных локаторов будет $Q \gg 1$, т. е. заведомо реализуется режим нераскрученной спирали (рис. 3, *б*). Однако локация, например, Луны, расстояние до которой равно примерно 400 000 км, могла бы проходить в режиме раскрученной спирали (см. рис. 3, *а*), поскольку $Q_{\text{Л}} \simeq 0.125 \cdot P(\text{с})$. На рис. 4 показаны значения Q, которые соответствуют разным точкам спирали сечения волнового фронта плоскостью (yz).

Далее будем измерять время в единицах периода: $\tau = t/P$; также введем безразмерную скорость распространения излучения: $W = cP/R$.

4. Расчет профиля отраженных импульсов

Будем считать, что отдельные отраженные импульсы, которые регистрирует наблюдатель, не перекрываются. Тогда нам достаточно рассмотреть отражение излучения, падающего на экран в течение промежутка времени, равного одному периоду. Малая площадка $d\sigma$ поверхности экрана, на которую падает излучение, дает

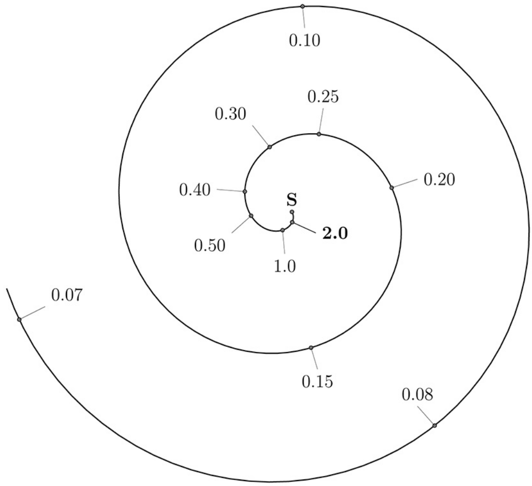


Рис. 4. Значения Q, отмеченные в соответствующих точках сечения волнового фронта плоскостью (yz). Для рис. 3, *а* параметр $Q = 0.10$, для рис. 3, *б* — $Q = 4.77$

следующий вклад в отраженный поток:

$$h_0 \delta(\tau - \tau_{so}) \cos\psi_s \cos\psi_o \, d\sigma.$$

Здесь h_0 — интегральный за период поток излучения, который падает на площадку в случае ее перпендикулярного расположения к направлению на источник (предполагается, что h_0 одинаково для всех доступных площадок); τ_{so} — момент времени, в который излучение, отраженное площадкой, регистрируется наблюдателем; ψ_s — угол падения излучения на $d\sigma$, а под углом ψ_o эту площадку видит наблюдатель.

Пусть $d\sigma$ имеет координаты θ и φ во введенной выше сферической системе координат (на поверхности шара координата $r = R$); при этом $d\sigma = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Полный поток, отраженный от полусферы, которая обращена к наблюдателю, будет равен

$$h(\tau) = h_0 \, R^2 \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} d\varphi \int_0^{\theta_{max}} \delta(\tau - \tau_{so}) \cos\psi_s \cos\psi_o \sin\theta \, d\theta, \qquad (7)$$

где φ_{min} и φ_{max} — пределы изменения азимутального угла на указанной полусфере; $\theta_{max} = \arccos 1/k$ (см. рис. 2).

Приведем выражения для ψ_s, ψ_o и τ_{so} с небольшими пояснениями (подробнее см. [3] и [4]).

Угол падения излучения на площадку $d\sigma$ — это угол между нормалью к ней и направлением на источник. По теореме косинусов нетрудно получить, что

$$\cos\psi_s = \frac{k\cos\theta - 1}{\sqrt{k^2 - 2k\cos\theta + 1}}.$$

Аналогичным образом можно найти косинусы углов, под которыми рассматриваемую площадку видят наблюдатели O_1, O_2 и O_3:

$$\cos\psi_{o1} = \frac{r_o\cos\theta - R}{\sqrt{r_o^2 - 2r_oR\cos\theta + R^2}} \approx \cos\theta\,, \theta \in [0;\, \theta_{max}],\;\; \varphi \in [0;\, 2\pi],$$

$$\cos\psi_{o2} \approx \sin\theta\sin\varphi, \quad \theta \in [0;\, \theta_{max}],\, \varphi \in [0; \pi],$$

$$\cos\psi_{o3} \approx -\sin\theta\sin\varphi, \quad \theta \in [0;\, \theta_{max}],\;\; \varphi \in [\pi; 2\pi]$$

— здесь везде использовано условие (1).

Пусть τ_s — задержка момента падения излучения на некоторую площадку $d\sigma$ относительно момента падения на площадку, ближайшую к источнику (для нее $\theta = 0$). Отраженное площадкой $d\sigma$ излучение дойдет до наблюдателя также с некоторой задержкой τ_o относительно излучения, отраженного площадкой с $\theta = 0$. Тогда $\tau_{so} = \tau_s + \tau_o$. При этом и τ_s, и τ_o могут оказаться как больше, так и меньше нуля. Выражения для соответствующих задержек получаются путем решения несложной геометрической задачи:

$$\tau_s = \frac{\sqrt{k^2 - 2k\cos\theta + 1} - k + 1}{W} + \frac{\tilde{\varphi}_D}{2\pi} - \frac{1}{4}\,, \tag{8}$$

где

$$\cos\tilde{\varphi}_D = \frac{-\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{k^2 - 2k\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi}}\,. \tag{9}$$

$$\tau_{o_1} = \frac{1}{W}\,(1 - \cos\theta), \tag{10}$$

$$\tau_{o_2} = \tau_{o_3} = -\,\frac{1}{W}\,|\sin\theta\sin\varphi|. \tag{11}$$

Для расчета профиля отраженных импульсов, т. е. значений функции $h(\tau)$, определяемой выражением (7), промежутки интегрирования по θ и φ, а также промежуток изменения τ_{so} разобьем на бины сетками дискретных узлов:

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_i < \cdots < \theta_{N_1-1} < \theta_{N_1} = \theta_{max}\,,$$

$$\varphi_{min} = \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_j < \cdots < \varphi_{N_2-1} < \varphi_{N_2} = \varphi_{max}\,,$$

$$\tau_{min} = \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots < \tau_{M-1} < \tau_M = \tau_{max}\,,$$

где τ_{min} и τ_{max} — это моменты регистрации переднего и заднего фронтов импульса соответственно, а N_1, N_2 и M — некоторые целые числа. Изначально моменты τ_{min} и τ_{max} неизвестны, поэтому в качестве промежутка изменения τ_{so} выбирается такой, чтобы τ_{min} и τ_{max} в него заведомо попадали. По окончании процедуры вычисления значений $h(\tau_n)$ моменты τ_{min} и τ_{max} определяются как первый и последний моменты времени, при которых $h(\tau_n) = 0$.

В ходе расчетов выяснилось, что равномерная сетка по углам

$$\Delta\theta = \theta_{max}/N, \quad \Delta\varphi = (\varphi_{max} - \varphi_{min})/N \tag{12}$$

при равномерной сетке по времени

$$\Delta\tau = (\tau_{max} - \tau_{min})/M$$

не обеспечивает сходимость результата, если шаг по времени $\Delta\tau$ уменьшается при фиксированном N (см. пример на рис. 5). Указанный дефект пропадает, если делить поверхность сферы на участки равной площади, что можно выполнить следующим образом. Шаг по углу φ остается равномерным, как в (12); узлами по зенитному углу поверхность сферы делится на N полосок равной площади, при этом узлы $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_{N+1}$ находятся из условия

$$\frac{4\pi R^2}{N} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} R^2 \sin\theta\, d\theta.$$

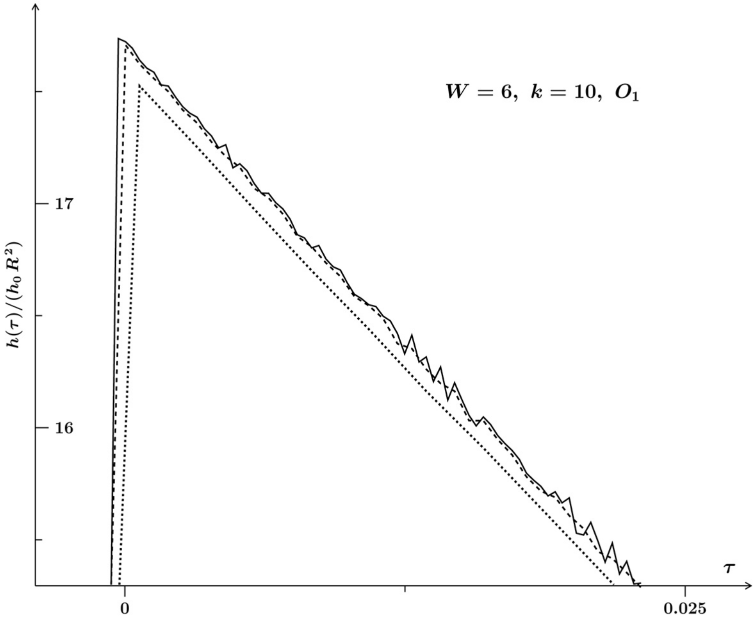


Рис. 5. Пример неустойчивого поведения решения при уменьшении шага по времени в случае равномерного расположения узлов по углам: $M = 128$ — пунктирная кривая; $M = 512$ — штриховая кривая, $M = 1024$ — сплошная кривая. Число точек деления по углам одинаково для всех кривых: $N = 2048$

Например,

$$\frac{4\pi R^2}{N} = 2\pi R^2 \int_{\theta_1=0}^{\theta_2} \sin\theta\, d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos\theta_2).$$

В итоге получим, что $\theta_i = \arccos(1 - 2(i-1)/N)$, где i меняется от 1 до $N+1$.

5. Результаты

Рассчитанные профили отраженных импульсов, соответствующие двум режимам облучения экрана ($W = 6$, $k = 10$ — раскручен-

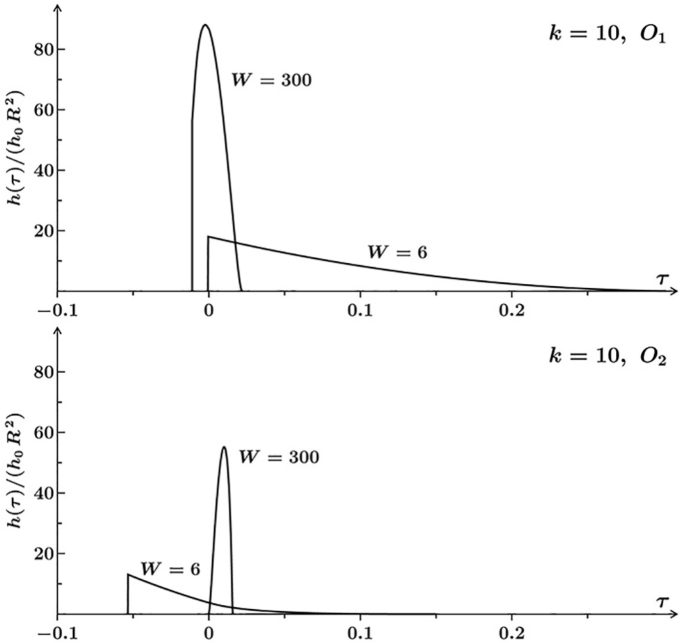


Рис. 6. Профили импульсов, отраженных в направлениях O_1 и O_2

ная спираль, $Q \ll 1$, рис. 3, *а*, и $W = 300$, $k = 10$ — нераскрученная спираль, $Q \gg 1$, рис. 3, *б*), представлены на рис. 6 и 7. Момент $\tau = 0$ на шкале времени соответствует регистрации наблюдателем излучения, отраженного ближайшей к источнику площадкой поверхности экрана. Профиль импульса, регистрируемого в направлении O_3 в случае $W = 300$, возрастает немонотонно — на кривой имеется небольшой пик. Можно показать, что его происхождение связано с геометрическими особенностями расматриваемой системы экран — источник (см. [4]). Эволюцию этого пика при изменении W показывает нижний из рис. 7.

Полученные результаты показывают, что изменение режима облучения шара (переход от нераскрученной спирали к раскрученной или наоборот) оказывает существенное влияние на профиль отраженных импульсов, а также на моменты их регистрации наблюда-

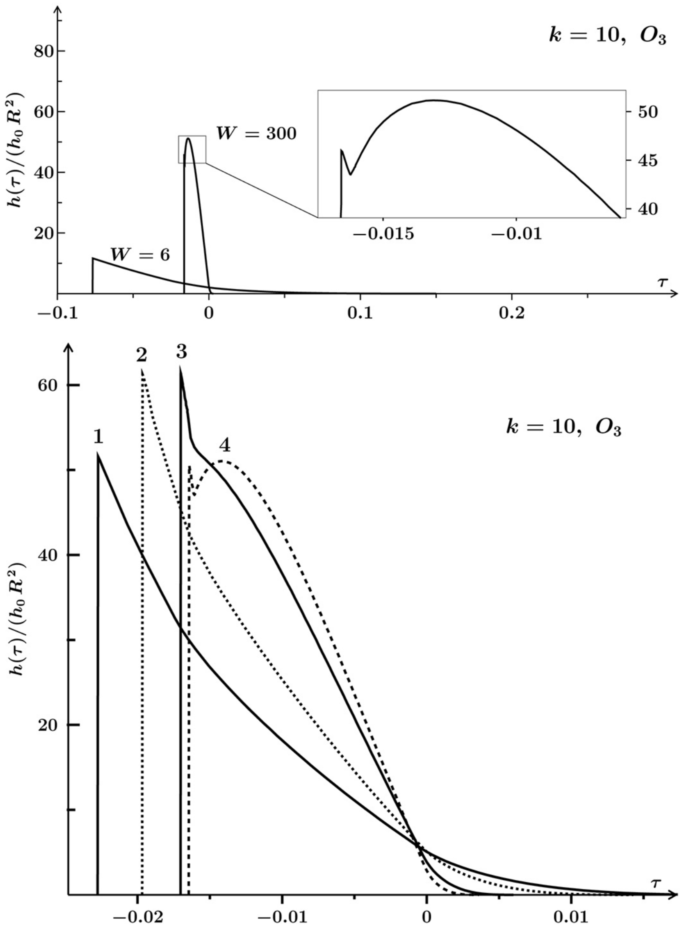


Рис. 7. Профили импульсов, отраженных в направлениях O_3.
На верхнем рисунке максимум профиля импульса при $W = 300$ дан также в увеличенном масштабе на вставке. На нижнем рисунке кривые 1–4 отвечают значениям W, равным соответственно 40, 63, 150 и 250

телем. Представим, что параметр W имеет значение порядка 1, а затем он начинает расти вследствие увеличения периода вращения источника P при неизменных радиусе шара R, расстоянии r_s и полном потоке излучения источника. Амплитуда отраженных импульсов при этом будет увеличиваться до некоторого максимального значения, превышающего начальное значение более чем на порядок; длительность импульсов при этом уменьшается. Это увеличение амплитуды импульсов происходит только за счет перераспределения моментов прихода к наблюдателю излучения разных площадок — полный поток, отраженный в соответствующем направлении (площадь под кривой профиля импульса), одинаков для всех W. После достижения максимума амплитуда импульсов медленно уменьшается по этой же причине. Длительность отраженного импульса в случае раскрученной спирали определяется в основном характерным временем t_1, а в случае нераскрученной — характерным временем t_2; см. (4) и (5). Из-за перераспределения моментов регистрации наблюдателем излучения от разных площадок, общая длительность импульса оказывается не равна $t_1 + t_2$, а может быть существенно меньше этой суммы (с соответствующим увеличением амплитуды профиля импульса). Отметим, что при изменении W также изменяется и время прихода к наблюдателю максимума профиля. Для наблюдателя O_3 указанные выше изменения профиля импульса при изменении значения W видны на рис. 7.

Еще один важный вывод из полученных результатов состоит в следующем. Вращение источника, облучающего экран, приводит к тому, что картина отраженных импульсов для наблюдателей O_2 и O_3 выглядит по-разному. В случае нераскрученной спирали импульсы, приходящие к этим наблюдателям, отличаются и формой профиля, и моментами прихода; в случае раскрученной спирали только моментами прихода. При этом разница между моментами прихода импульсов к наблюдателям O_2 и O_3 в соответствии с (8)–(11) определяется значениями W и k. Таким образом, эта разница между моментами прихода импульсов дает связь между периодом вращения источника (локатора), расстоянием до объекта и его размером. Дополнительные связи получаются, если использовать моменты прихода импульсов и для других направлений (помимо O_1, O_2 и O_3).

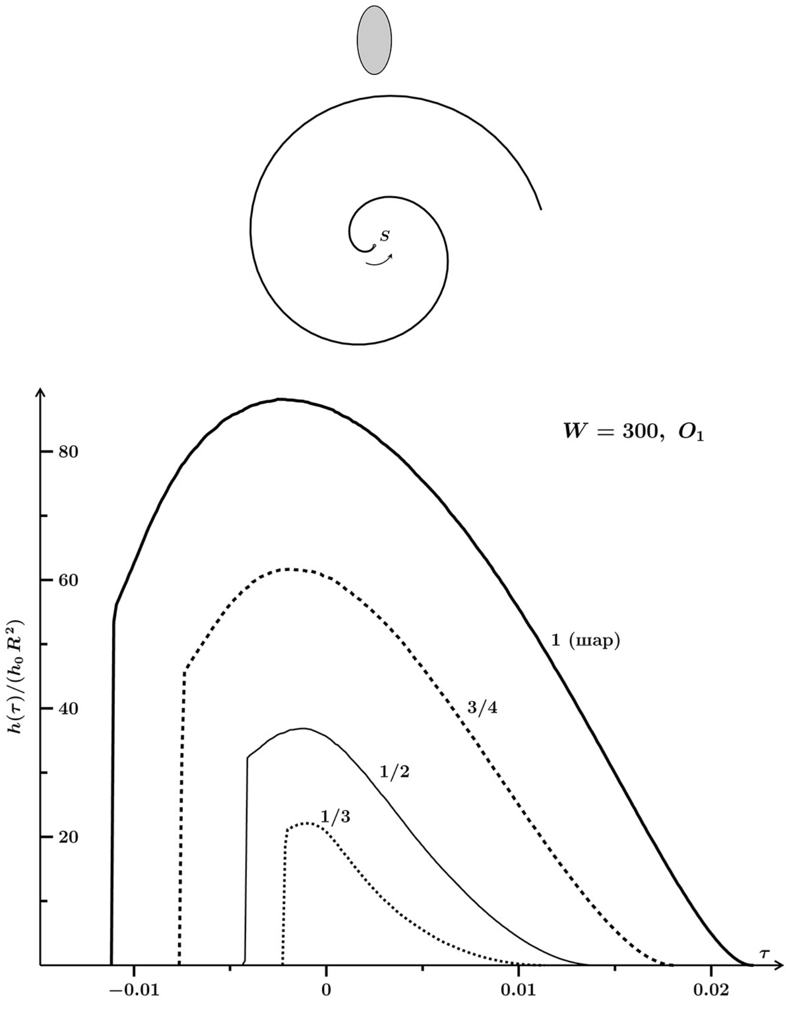


Рис. 8. Сверху: облучение отражающего экрана в виде эллипсоида вращения. Снизу: импульсы, отраженные в направлении O_1; числа у кривых — отношение малой и большой полуосей эллипсоида (в случае шара параметр $k = 10$)

Расчеты по аналогичной схеме были проведены также и для отражающего экрана в виде эллипсоида вращения, вытянутого большой полуосью в направлении на источник (см. рис. 8 сверху). Пример расчетов представлен на рис. 8 снизу, где приведены профили импульсов, отраженных в направлении O_1 для разных значений отношения b/a, где a и b — соответственно большая и малая полуоси эллипсоида вращения. Уменьшение амплитуды профиля импульса на рис. 8 легко объяснимо — с увеличением вытянутости эллипсоида уменьшается площадь его поверхности, отражающей излучение в направлении на источник (т. е. в направлении O_1).

6. Заключение

Рассмотрена задача об отражении излучения компактного вращающегося источника (аналогичного маяку) от экрана сферической или эллипсоидальной формы. Показано, что профили отраженных импульсов получаются качественно разными в зависимости от величины параметра Q, определяемого соотношением между характерными временами t_1 и t_2, см. (4)–(6). Также в зависимости от Q различаются моменты регистрации отраженных импульсов наблюдателем. Основные выводы следующие:

1) $Q \ll 1$ (полностью раскрученная спираль): уширение отраженного импульса определяется только временем t_1;
2) $Q \gg 1$ (нераскрученная спираль): уширение отраженного импульса определяется только временем t_2;
3) в случае промежуточных значений Q длительность отраженного импульса может оказаться существенно меньше, чем $t_1 + t_2$; его амплитуда при этом увеличивается;
4) условия облучения «левой» и «правой» частей экрана различаются, что дает возможность получать из наблюдения отраженных импульсов информацию о геометрических свойствах отражателя.

Литература

1. *Avni Y., Bahcall J.N.* Short-time optical variability of X-ray sources // Astrophys. J. 1974. Vol. 191. P. 221–230.
2. *Болотовский Б. М., Гинзбург В. Л.* Эффект Вавилова — Черенкова и эффект Допплера при движении источников со скоростью большей скорости света в вакууме // УФН. 1972. Т. 106. Вып. 4. С. 577–592.
3. *Дементьев А. В.* О некоторых особенностях отражения шарообразным экраном излучения источника, вращающегося вокруг своей оси // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1(59). С. 480–489.
4. *Dementyev A. V.* Specific features of the reflection effect in binary systems with compact source rotating about its axis // New Astron. 2015. Vol. 37. P. 52–63.

ОСОБЕННОСТИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАИЯ В COMSOL ЗАДАЧ БИОМЕХАНИКИ ГЛАЗА

Д. В. Франус

Рассматриваются особенности конечно-элементного моделирования корнеосклеральной оболочки глаза человека, находящейся под действием давления, создаваемого приложенной вакуумной присоской на примере использования программного пакета COMSOL. Подробно проанализированы аспекты построения геометрии упругой многослойной тонкостенной оболочки, состоящей из двух сферических частей: 1) роговой оболочки и 2) склеральной оболочки. Приводится описание особенностей использования криволинейной системы координат, параметров и переменных, настройки контактного взаимодействия.

1. Введение

Исследование внутриглазного давления (ВГД) имеет важное значение, т. к. уровень ВГД является основополагающим показателем в диагностике различных глазных заболеваний и аномалий. Известно, что кратковременное повышение ВГД является естественным физиологическим явлением [1]. При косоглазии человека ВГД увеличивается до 50 мм рт. ст., а при трении глаз рукой ВГД может подняться до 150–250 мм рт. ст.

Для определения уровня ВГД используются специальные приборы — тонометры. Тонометрия измеряет ВГД путем определения реакции роговицы на приложенное давление. То есть о ВГД судят по реакции структур глаза на применение тонометра. Давление, полученное таким образом, называется тонометрическим давлением. Понятно, что тонометры дают только приблизительное значение истинного давления. В начале XXI в. наступил новый период развития тонометрии, который связан с бурным развитием рефракционной хирургии, существенно изменяющей кривизну и толщину

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18–01–00832).

Доклад на семинаре 23 апреля 2019 г.

© Д. В. Франус, 2019

роговицы. Показания ВГД до и после операции по коррекции зрения существенно различаются [2].

LASIK (Laser-Assisted in Situ Keratomileusis) на сегодняшний день является одним из самых эффективных методов коррекции зрения. Суть операции в первую очередь заключается в вырезании роговичного лоскута. Затем производится лазерная абляция узконаправленными импульсами на основной слой роговицы. Этот процесс контролируется компьютером в соответствии с требуемым профилем роговицы [2]. Вакуумное компрессионное кольцо используется во время рефракционной хирургии (LASIK) для коррекции зрения с целью лучшего формирования роговичного лоскута. Вакуумное кольцо позволяет повысить ВГД до значений выше 65 мм рт. ст., применяя вакуум от 520 до 550 мм рт. ст. [3]. Увеличение ВГД до этих значений облегчает создание лоскута и делает более точным послойный разрез роговицы при рефракционной хирургии и позволяет повысить точность коррекции зрения.

В связи с этим задача применения вакуумного компрессионного кольца при рефракционной хирургии и создания моделей, позволяющих оценить влияние различных параметров глаза на ВГД, является актуальной.

2. Построение геометрической модели

Поскольку нормальный глаз представляет собой практически шарообразное тело, которое состоит из оболочек, окружающих внутреннее ядро глаза, то для моделирования задачи приложения нагрузки вакуумного кольца можно использовать наружную оболочку. Наружная оболочка — это плотная (по сравнению с внутренним ядром) фиброзная оболочка глазного яблока, к которой прикрепляются наружные мышцы глазного яблока и которая выполняет защитную функцию. Она состоит из передней прозрачной части — роговицы и задней непрозрачной части белесоватого цвета — склеры.

Для построения такой модели в программном пакете *COMSOL* необходимо выбрать механику твердого тела *Solid Mechanics* и стационарный (*Stationary*) тип решателя. В целях оптимизации време-

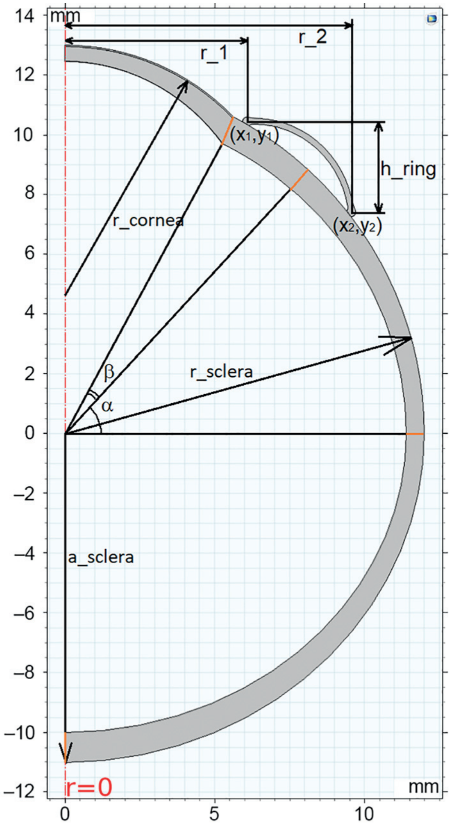


Рис. 1. Параметры, используемые при построении модели

ни расчета программы моделирование производится в двухмерной осесимметричной постановке.

В самом начале создания геометрической модели необходимо установить используемые единицы длины (мм) и угла (градусы). Глазное яблоко моделируется двумя сферическими сегментами переменной толщины, больший (с радиусом r_sclera) из которых моделирует склеру, а сегмент с меньшим радиусом r_cornea — роговицу; вакуумное кольцо также моделируется сферическим сегментом, имеющим три основных параметра — внутренний радиус r_1, внешний радиус r_2 и высоту h_ring (рис. 1). При этом значения геометрических характеристик необходимо задавать с помощью параметров в разделе глобальных определений *Global Definitions*, чтобы в последующем была возможность как изменять геометрию, так и в настройках решателя задавать диапазон значений определенного параметра. На рис. 2 приведены значения использованных параметров при построении модели.

Parameters

Name	Expression	Value	Description
r_sclera	12[mm]	0.012 m	радиус склеры
a_sclera	11[mm]	0.011 m	длина нижней полуоси склеры
r_cornea	7.8[mm]	0.0078 m	радиус роговицы
h_epithelium	0.043[mm]	4.3E-5 m	толщина эпителия
h_bowman	0.012[mm]	1.2E-5 m	толщина боуменовой мембраны
h_stroma	0.505[mm]	5.05E-4 m	толщина стромы
h_endothelium	0.01[mm]	1E-5 m	толщина эндотелия
h_sc_r	1[mm]	0.001 m	толщина склеры возле роговицы
h_sc_inter	0.8[mm]	8E-4 m	промежуточная толщина склеры
h_sc_cent	0.6[mm]	6E-4 m	толщина склеры на экваторе
alpha	50[deg]	0.87266 rad	угол сужения склеры
beta	12[deg]	0.20944 rad	угол перехода до роговицы
h_sc_b	1[mm]	0.001 m	толщина склеры в основании
p0	2000[Pa]	2000 Pa	начальное ВГД
r_1	6[mm]	0.006 m	внутренний радиус приложения присоски
r_2	9.5[mm]	0.0095 m	внешний радиус приложения присоски
h_ring	2.9[mm]	0.0029 m	высота места приложения присоски
r_rubber	0.1[mm]	1E-4 m	радиус присоски в точке косания
p_vac	-p_vac_mm*133.3224[Pa]	-66661 Pa	давление под присоской, Па
p_vac_mm	500	500	давление под присоской, мм рт.ст.
param	1	1	

Рис. 2. Таблица параметров используемых при построении КЭ модели

В данной таблице необходимо отдельно подчеркнуть параметр «param», который можно будет использовать при решении задачи в диапазоне значений в случае, если требуется их одновременное изменение.

Также удобным является использование переменных *Variables* (см. рис. 3), с помощью которых можно задавать переменные, рассчитываемые на осовании значений параметров, указанных в таблице на рис. 2. Так в данной модели используются координаты точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (см. рис. 1), определяющие местоположения соприкосновения вакуумного кольца и склеры.

Variables

Name	Expression	Unit	Description
x1	r_1+r_rubber/r_sclera*(sqrt(r_sclera^2-r_1^2))	m	X координата верхней точки касания присоски
y1	sqrt(r_sclera^2-r_1^2)+r_rubber/r_sclera*r_1	m	Y координата верхней точки касания присоски
x2	r_2+r_rubber/r_sclera*(sqrt(r_sclera^2-r_2^2))	m	X координата нижней точки касания присоски
y2	sqrt(r_sclera^2-r_2^2)+r_rubber/r_sclera*r_2	m	Y координата нижней точки касания присоски

Рис. 3. Таблица переменных, используемых при построении КЭ-модели

После построения корнеосклеральной оболочки необходимо использовать команду преобразования в твердое тело (Convert to Solid), и аналогично — после формирования геометрической модели вакуумного кольца. На конечном этапе создания модели *Form Union/Assembly* эта команда позволит сформировать два отдельных твердых тела в рамках одной модели; при этом в разделе «Action» необходимо выбрать «Form as assembly».

3. Криволинейная система координат

Замена прямоугольной (декартовой) системы координат может быть полезна для случая, когда существует необходимость задавать анизотропные свойства материалов и/или непрямоугольной геометрией расчетной области.

Так как оболочка глаза имеет форму близкую к сферической, то удобно использовать сферические либо криволинейные координаты. Особенность данной задачи заключается в том, что модули упругости в направлении толщины на порядок больше, чем в тангенциальном направлении. Более того, использование криволинейной системы координат, которая соответствует геометрии оболочки, позволяет нагрузке на каждом этапе расчета следовать в ортогональном направлении деформированному состоянию.

Таким образом, создается криволинейная система координат, в которой один из базисных векторов направлен по касательной к поверхности оболочки, а второй — перпендикулярно ей. Для этого используется специальный интерфейс криволинейных координат «Curvilinear Coordinates», с помощью которого создается векторное поле, отслеживающее форму геометрической оболочки, т. е. рассчитывается первый базисный вектор. Для его определения используется диффузионный метод «Diffusion Method», т. к. этот метод один из наиболее простых, вычислительно мало затратный.

Первый базисный вектор вычисляется через градиент скалярного поля, для которого решается уравнение Лапласа на заданной геометрии корнеосклеральной оболочки:

$$\Delta u = 0, \quad \overrightarrow{e_1} = -\nabla u. \tag{1}$$

На концах геометрической модели для задания направления векторов на границах используются условия «Inlet» и «Outlet».

В настройках криволинейной системы координат обязательно нужно поставить галочку в пункте «Create base vector system» (создать базовый вектор системы), для того чтобы в последующем можно было выбирать из списка доступных координатных систем вновь созданную криволинейную систему. Также для использования криволинейной системы координат ее сначала необходимо рассчитать. Для этого в настройках первого решателя «Study 1» нужно оставить только расчет криволинейных координат. А решение самой задачи уже осуществлять с помощью второго решателя «Study 2», в котором отключить решение криволинейной системы координат и подключить использование результатов решения первого решателя «Study 1».

4. Настройка механики модели и сетки конечных элементов

Для задания упругих констант материалов применяется «Linear Elastic Material», в настройках которого используется созданная криволинейная система координат для задания ортотропных свойств. Таким образом, модули упругости каждого материала

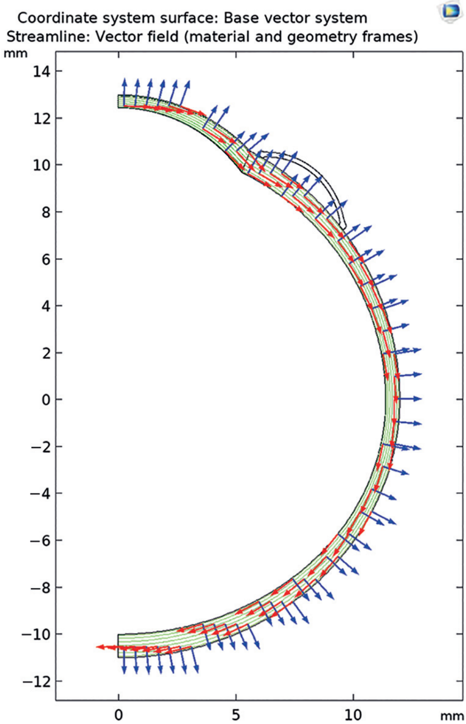


Рис. 4. Криволинейная система координат, построенная с помощью диффузионного метода с линиями тока

(слоя корнеосклеральной оболочки) задаются по базисным векторам криволинейной системы координат соответствующей геометрии оболочки на каждом шаге расчета.

В целях оптимизации КЭ-сетки и уменьшения расчетного времени боуменова мембрана не моделируется геометрически, а задается как тонкий упругий слой («Thin Elastic Layer») с изотропными свойствами. Благодаря такому подходу этот слой не имеет «своих» конечных элементов. В случае геометрического моделирования при толщине слоя $h\_bowman = 12$ мкм максимальный размер конечных элементов в слое был бы такого же размера. В дополнение пришлось бы сгущать сетку в этой области, что привело бы к существенному росту количества конечных элементов и увеличению расчетного времени.

В качестве граничных условий используется жесткая заделка («Fixed Constraint») в области касания вакуумного компрессионного кольца и склеры.

Задание нормального ВГД осуществляется с помощью функции «Boundary Load», в которой используется криволинейная система координат, чтобы нагрузка всегда была ортогональна деформированной внутренней поверхности корнеосклеральной оболочки.

В модели создается контактная пара склера–присоска, в которой склера выступает поверхностью типа «Destination», а присоска — «Source». Для предотвращения проникновения КЭ-сеток используется метод штрафов. Суть его заключается в том, что при проникновении сеток применяется штраф в виде жесткой пружины, которая на следующем подшаге растягивается на величину проникновения.

В настройках контакта задается нагрузка «Boundary Load» в криволинейных координатах, которая действует на внешнюю поверхность склеры, находящейся под вакуумным компрессионным кольцом. Таким образом, заданная нагрузка ортогональна деформированной поверхности на каждом шаге расчета.

Сетка конечных элементов формируется с помощью свободных треугольников «Free Triangular», в настройках размеров которого используется высококачественная разбивка («Extremely fine») с максимальным размером элементов не более 0,03 мм.

С целью повышения точности расчета момента наступления контакта внутренняя поверхность вакуумной присоски разбивается функцией «Refine» в один слой. Это позволяет разбить каждый конечный элемент внутреннего слоя на две части.

Вакуумное компрессионное кольцо моделируется как абсолютно твердое тело («Rigid Domain»), которое жестко закреплено («Fixed Constraint»).

5. Результаты расчетов

После проведения решения производится построение различных графиков, таблиц, используются инструменты графической визуализации. Так, например, на рис. 5 приведен график зависимости максимальных напряжений на внешней поверхности склеры под вакуумным кольцом от уровня применяемого вакуума для модулей упругости склеры в диапазоне от 3 до 8 MPa, а на рис. 6 аналогичный график для перемещений.

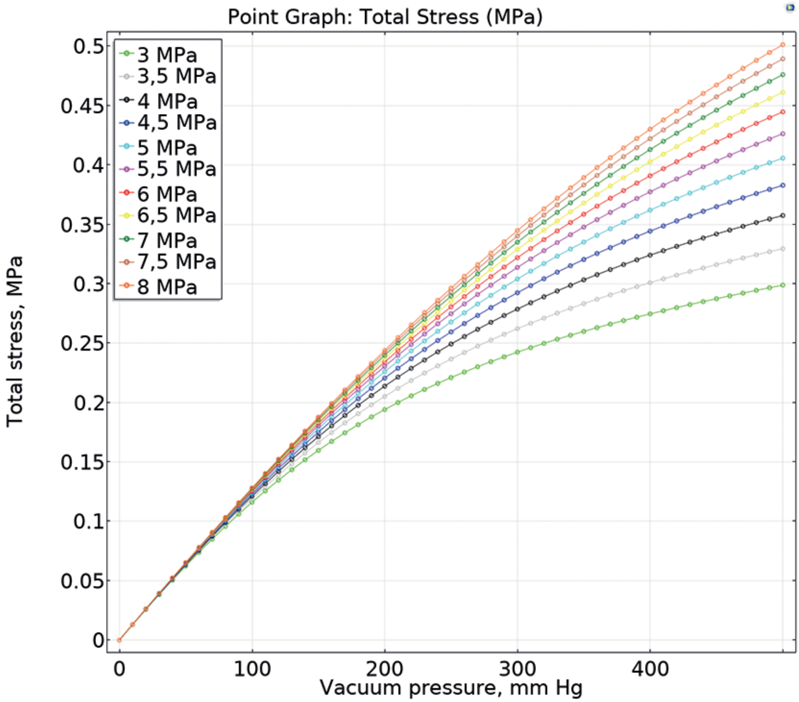


Рис. 5. Максимальные напряжения на внешней поверхности склеры под вакуумным компрессионным кольцом для различных значений модуля упругости склеры

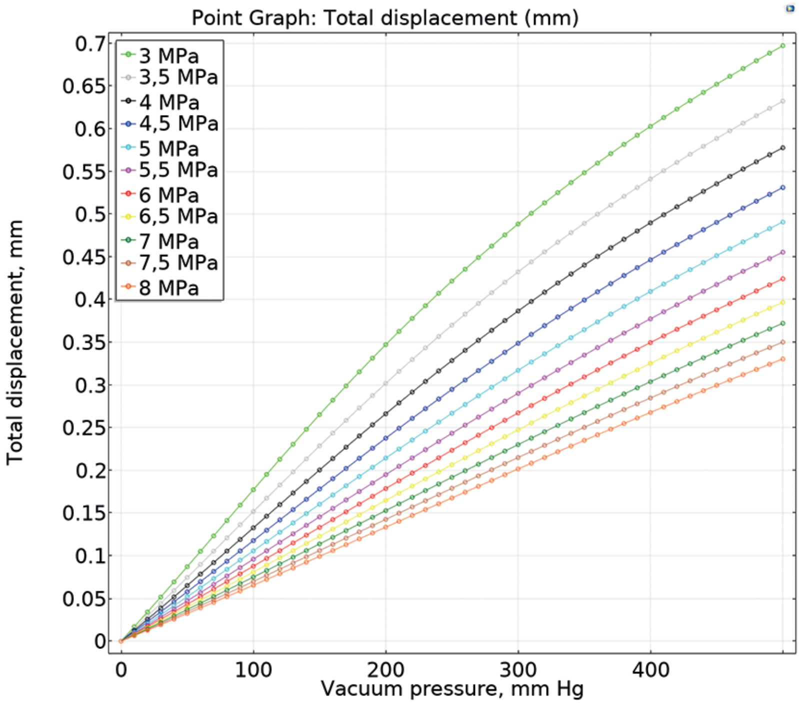


Рис. 6. Максимальные перемещения на внешней поверхности склеры под вакуумным компрессионным кольцом для различных значений модуля упругости склеры

6. Заключение

В результате построена параметрическая конечно-элементная модель, описывающая нагружение многослойной корнеосклеральной оболочки глаза вакуумным компрессионным кольцом и позволяющая проводить широкий анализ получаемых данных. *Comsol* позволяет исользовать широкий спектр инструментов постобработки, а в сочетании с расчетами, производимыми в диапазоне необходимых параметров, представляет значительно больший интерес по сравнению с более известными программами конечно-элементного моделирования.

В результате моделирования выявлено нелинейное влияние модуля упругости склеры на перемещения и напряжения склеральной оболочки под действием вакуумного компрессионого кольца.

Литература

1. *Elias R. M., Wald J. T., Kallmes D. F.* Diagnosis of carotid artery stenosis with oculopneumoplethysmography alone and in combination with MRA // Vascular Health and Risk Management. Vol. 88. P. 631–639, 2012.
2. *Иомдина Е. Н., Бауэр С. М., Котляр К. Е.* Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. М.: Реал Тайм, 2015. 208 с.
3. *Chaorong Chen, Reed J. F., Rice D. C., Gee D. W., Updike P., Salathe E. P.* Biomechanics of Ocular Pneumoplethysmography // Journal Biomechanics Eng. 115(3). P. 231–238, 1993.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ИЗБЫТОЧНЫХ КООРДИНАТАХ

В. И. Петрова, М. П. Юшков

В работе предлагается видоизмененный вывод специальной формы дифференциальных уравнений движения системы соединенных твердых тел. Их можно назвать и уравнениями движения системы твердых тел в избыточных координатах. Такие уравнения удобно использовать, например, при изучении движения нагруженной платформы Стюарта.

1. Введение

В учебнике по аналитической механике [1] было показано, что математический аппарат теоретической механики, разработанный применительно к системе материальных точек, может быть применен и к механическим системам, которые состоят из твердых тел. Это означает, что при исследовании динамики системы твердых тел могут быть использованы уравнения Лагранжа как первого, так и второго рода.

Особо отметим то обстоятельство, что уравнения Лагранжа первого рода, составленные для случая системы, которая состоит из конечного числа материальных точек, будут иметь простейшую и притом одинаковую структуру по всем координатам, если эти координаты являются декартовыми координатами точек системы. Существенно также, что в данном случае уравнения Лагранжа первого рода являются уравнениями, разрешенными относительно вторых производных от искомых координат. Все это говорит о том, что обсуждаемые уравнения имеют форму, удобную для решения их на компьютере. В связи с этим возникает вопрос об отыскании такой формы записи уравнений движения системы твердых тел, которая также была бы удобной для применения компьютеров. Дело в том, что уравнения движения системы твердых тел, например манипу-

---

Доклад на семинаре 1 октября 2019 г.
© В. И. Петрова, М. П. Юшков, 2019

лятора, записанные в форме уравнений Лагранжа второго рода, при большом количестве тел являются настолько сложными, что оказывается затруднительным не только их проинтегрировать, но даже записать.

Задача отыскания простейших по форме уравнений Лагранжа первого рода для системы твердых тел, как будет видно из дальнейшего, сводится к отысканию новой формы записи уравнений движения одного твердого тела. Одна из возможных таких форм была предложена в статье [2]. Предложим изложение этого метода с несколько иных позиций и более подробно.

2. Специальная форма уравнений движения твердого тела

Введем неподвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$ и подвижную систему $Cxyz$ с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, направленными по главным центральным осям инерции тела. Точка C — центр масс твердого тела. Пусть $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OC}$.

Положение твердого тела относительно неподвижной системы определяется заданием четырех векторов: $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Предположение о том, что тело при движении не деформируется, т. е. является абсолютно твердым, означает, что векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ при движении тела остаются ортогональными и единичными. Условия ортогональности и единичности векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ будем рассматривать как некоторые абстрактные идеальные связи, наложенные на движение твердого тела и задаваемые уравнениями

$$\begin{gathered} f^1 = \mathbf{i}^2 - 1 = 0\,, \quad f^2 = \mathbf{j}^2 - 1 = 0\,, \quad f^3 = \mathbf{k}^2 - 1 = 0\,, \\ f^4 = \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0\,, \quad f^5 = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0\,, \quad f^6 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Проекции векторов $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ на оси неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ примем за исходные координаты свободного твердого тела. Общее число этих координат, равное двенадцати, в два раза больше, чем число степеней свободы твердого тела. Именно поэтому эти координаты называются избыточными. Применительно к механической системе, состоящей из конечного числа материальных точек, избыточными при наличии голономных связей являются декартовы координаты точек системы.

Отметим, что в некоторых курсах по теоретической механике уравнениями Лагранжа первого рода принято называть только уравнения, записанные в декартовых координатах и содержащие множители Лагранжа. Уравнения же движения голономной механической системы в обобщенных лагранжевых координатах при избыточном их числе называются иногда уравнениями Лагранжа с множителями. В [1] было показано, что уравнения Лагранжа первого и второго рода можно рассматривать как две взаимные системы линейных алгебраических уравнений относительно реакций связей. В соответствии с этим общим подходом к уравнениям Лагранжа первого рода для любой механической системы относятся те уравнения, каждое из которых содержит, вообще говоря, все множители Лагранжа.

Вернемся к вопросу об отыскании уравнений движения свободного твердого тела в избыточных координатах. Составим выражение для кинетической энергии. В соответствии с определением имеем

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau} v^2 \mu\, d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau} (\dot{\boldsymbol{\rho}} + x\,\dot{\mathbf{i}} + y\,\dot{\mathbf{j}} + z\,\dot{\mathbf{k}})^2 \mu\, d\tau\,.$$

Здесь τ — объем тела, $d\tau = dxdydz$, μ — плотность, x, y, z — текущие координаты точки твердого тела $Cxyz$.

Так как оси Cx, Cy, Cz являются главными центральными осями инерции тела, то

$$\int\limits_{\tau} x\mu\, d\tau = \int\limits_{\tau} y\mu\, d\tau = \int\limits_{\tau} z\mu\, d\tau = $$
$$= \int\limits_{\tau} xy\mu\, d\tau = \int\limits_{\tau} yz\mu\, d\tau = \int\limits_{\tau} zx\mu\, d\tau = 0\,,$$

и потому

$$T = \frac{M\dot{\boldsymbol{\rho}}^2}{2} + \frac{I_x\dot{\mathbf{i}}^2}{2} + \frac{I_y\dot{\mathbf{j}}^2}{2} + \frac{I_z\dot{\mathbf{k}}^2}{2}\,. \tag{2}$$

Здесь M — масса тела и

$$I_x = \int\limits_\tau x^2 \mu\, d\tau\,, \quad I_y = \int\limits_\tau y^2 \mu\, d\tau\,, \quad I_z = \int\limits_\tau z^2 \mu\, d\tau\,. \tag{3}$$

Пусть к телу в точках $N_\nu = (x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ приложены силы $\mathbf{F}_\nu$. Возможную элементарную работу этих сил можно записать в виде

$$\begin{gathered} \delta A = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot (\delta\boldsymbol{\rho} + x_\nu \delta\mathbf{i} + y_\nu \delta\mathbf{j} + z_\nu \delta\mathbf{k}) = \\ = \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\rho}} \cdot \delta\boldsymbol{\rho} + \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} \cdot \delta\mathbf{i} + \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} \cdot \delta\mathbf{j} + \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{k}\,, \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\rho}} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu\,, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} = \sum_\nu x_\nu \mathbf{F}_\nu\,, \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} = \sum_\nu y_\nu \mathbf{F}_\nu\,, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \sum_\nu z_\nu \mathbf{F}_\nu\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Рассматривая выражения для кинетической энергии и элементарной работы, а также форму записи уравнений связей (1), видим, что целесообразно уравнения движения, соответствующие трем компонентам каждого из векторов $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, представить в виде

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\rho}}\,, \qquad \varkappa = \overline{1,6}\,, \\ [3pt]\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{i}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{i}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f^\varkappa}{\partial \mathbf{i}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{i}} + 2\Lambda_1 \mathbf{i} + \Lambda_4 \mathbf{j} + \Lambda_6 \mathbf{k}\,, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{j}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{j}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f^\varkappa}{\partial \mathbf{j}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{j}} + 2\Lambda_2 \mathbf{j} + \Lambda_5 \mathbf{k} + \Lambda_4 \mathbf{i}\,, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{k}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{k}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} + \Lambda_\varkappa \frac{\partial f^\varkappa}{\partial \mathbf{k}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} + 2\Lambda_3 \mathbf{k} + \Lambda_6 \mathbf{i} + \Lambda_5 \mathbf{j}\,, \end{gathered} \tag{5}$$

где принято обозначение

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial}{\partial a_x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial a_y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial a_z}\,\mathbf{k}\,, \\ \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}\,. \end{gathered}$$

Отметим, что это обозначение удобно тем, что при его использовании векторы, входящие в выражения (1) и (2), можно формально рассматривать как скалярные величины. Уравнения (5) при учете этого простого правила, а также обозначений (4) запишутся в виде

$$M\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}\,, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} I_x\ddot{\mathbf{i}} &= \sum_{\nu} x_{\nu}\mathbf{F}_{\nu} + 2\Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_4\mathbf{j} + \Lambda_6\mathbf{k}\,, \\ I_y\ddot{\mathbf{j}} &= \sum_{\nu} y_{\nu}\mathbf{F}_{\nu} + 2\Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_5\mathbf{k} + \Lambda_4\mathbf{i}\,, \\ I_z\ddot{\mathbf{k}} &= \sum_{\nu} z_{\nu}\mathbf{F}_{\nu} + 2\Lambda_3\mathbf{k} + \Lambda_6\mathbf{i} + \Lambda_5\mathbf{j}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что уравнение (6) является уравнением движения центра масс твердого тела.

Используя уравнения связей, исключим из уравнений Лагранжа первого рода (7) множители Лагранжа. С этой целью продифференцируем дважды по времени уравнения связей (1) и получим выражения

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{i}}^2 = -\ddot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{i}\,, \quad \dot{\mathbf{j}}^2 = -\ddot{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{j}\,, \quad \dot{\mathbf{k}}^2 = -\ddot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{k}\,, \\ 2\dot{\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{j}} + \ddot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{i}\cdot\ddot{\mathbf{j}} = 0\,,\ 2\dot{\mathbf{j}}\cdot\dot{\mathbf{k}} + \ddot{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{k} + \mathbf{j}\cdot\ddot{\mathbf{k}} = 0\,, \\ 2\dot{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{i}} + \ddot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{i} + \mathbf{k}\cdot\ddot{\mathbf{i}} = 0\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Подставив в выведенные соотношения (8) вторые производные по времени из уравнений (7), запишем формулы для множителей Лагранжа $\Lambda_{\varkappa}$:

$$\begin{aligned} 2\Lambda_1 &= -\sum_{\nu} x_{\nu}\mathbf{F}_{\nu}\cdot\mathbf{i} - I_x\dot{\mathbf{i}}^2, \\ 2\Lambda_2 &= -\sum_{\nu} y_{\nu}\mathbf{F}_{\nu}\cdot\mathbf{j} - I_y\dot{\mathbf{j}}^2, \\ 2\Lambda_3 &= -\sum_{\nu} z_{\nu}\mathbf{F}_{\nu}\cdot\mathbf{k} - I_z\dot{\mathbf{k}}^2, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Lambda_4 = -\frac{2I_xI_y}{I_x+I_y}\dot{\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{j}} - \frac{I_y}{I_x+I_y}\sum_\nu x_\nu \mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{j} - \frac{I_x}{I_x+I_y}\sum_\nu y_\nu \mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{i}\,,$$

$$\Lambda_5 = -\frac{2I_yI_z}{I_y+I_z}\dot{\mathbf{j}}\cdot\dot{\mathbf{k}} - \frac{I_z}{I_y+I_z}\sum_\nu y_\nu \mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{k} - \frac{I_y}{I_y+I_z}\sum_\nu z_\nu \mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{j}\,,$$

$$\Lambda_6 = -\frac{2I_zI_x}{I_z+I_x}\dot{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{i}} - \frac{I_x}{I_z+I_x}\sum_\nu z_\nu \mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{i} - \frac{I_z}{I_z+I_x}\sum_\nu x_\nu \mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{k}\,.$$

Если теперь выражения (9) подставить в систему (5), то получим:

$$M\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu\,,$$

$$\ddot{\mathbf{i}} = -\dot{\mathbf{i}}^2\mathbf{i} - \frac{2I_y}{I_x+I_y}(\dot{\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{j}})\mathbf{j} - \frac{2I_z}{I_z+I_x}(\dot{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{i}})\mathbf{k} + \frac{L_z}{I_x+I_y}\mathbf{j} - \frac{L_y}{I_z+I_x}\mathbf{k}\,,$$

$$\ddot{\mathbf{j}} = -\dot{\mathbf{j}}^2\mathbf{j} - \frac{2I_z}{I_y+I_z}(\dot{\mathbf{j}}\cdot\dot{\mathbf{k}})\mathbf{k} - \frac{2I_x}{I_x+I_y}(\dot{\mathbf{i}}\cdot\dot{\mathbf{j}})\mathbf{i} + \frac{L_x}{I_y+I_z}\mathbf{k} - \frac{L_z}{I_x+I_y}\mathbf{i}\,,$$

$$\ddot{\mathbf{k}} = -\dot{\mathbf{k}}^2\mathbf{k} - \frac{2I_x}{I_z+I_x}(\dot{\mathbf{k}}\cdot\dot{\mathbf{i}})\mathbf{i} - \frac{2I_y}{I_y+I_z}(\dot{\mathbf{j}}\cdot\dot{\mathbf{k}})\mathbf{j} + \frac{L_y}{I_z+I_x}\mathbf{i} - \frac{L_x}{I_y+I_z}\mathbf{j}\,. \tag{10}$$

Здесь L_x, L_y, L_z — проекции главного момента активных сил

$$\mathbf{L} = \sum_\nu (x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j} + z_\nu\mathbf{k})\times\mathbf{F}_\nu.$$

Уравнения (10) будем называть *уравнениями движения твердого тела в избыточных координатах*, или *специальной формой уравнений динамики твердого тела* [2].

Отметим, что, т. к. три последних уравнения системы (10) эквивалентны динамическим уравнениям Эйлера, то тем самым они описывают вращение твердого тела вокруг центра масс.

3. Получение дифференциальных уравнений Эйлера

Чтобы убедиться в справедливости уравнений (10), покажем, что из них вытекают динамичекие уравнения Эйлера. Воспользуемся формулами

$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = r\mathbf{j} - q\mathbf{k}\,, \qquad \dot{\mathbf{i}} \cdot \dot{\mathbf{j}} = -pq\,, \qquad \dot{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{i}} = -rp\,,$$
$$-\dot{\mathbf{i}}^2\mathbf{i} = -(q^2 + r^2)\mathbf{i}\,,$$
$$\ddot{\mathbf{i}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{i}} = \dot{r}\mathbf{j} - \dot{q}\mathbf{k} - (q^2 + r^2)\mathbf{i} + pq\mathbf{j} + pr\mathbf{k}\,.$$

Тогда при проектировании второго уравнения из системы (10) на ось x получим тождество, а при проектировании на ось y — соотношение

$$\dot{r} + p\,q = \frac{2I_y}{I_x + I_y}p\,q + \frac{L_z}{I_x + I_y}\,.$$

Учитывая, что согласно обозначениям (3) можно написать $A = I_y + I_z,\ B = I_z + I_x,\ C = I_x + I_y$, отсюда имеем третье динамическое уравнение Эйлера

$$C\dot{r} - (A - B)\,p\,q = L_z\,.$$

При проектировании того же векторного уравнения на ось z приходим ко второму уравнению Эйлера

$$B\dot{q} - (C - A)\,r\,p = L_y\,.$$

Аналогично из третьего уравнения системы (10) могут быть получены третье и первое уравнения Эйлера, а четвертое уравнение системы (10) дает второе и первое динамические уравнения Эйлера.

Отметим, что если на векторы **i**, **j**, **k** не накладывать связей (1), то рассматриваемое тело становится по терминологии Дж. Кейси псевдотвердым [3]. Динамику этого континуума Дж. Кейси, опираясь на аппарат монографии Труделла [4], описывает так же уравнениями Лагранжа, число которых равно двенадцати.

4. Случай цепочки твердых тел

Рассмотрим теперь систему твердых тел, последовательно связанных друг с другом шаровыми шарнирами. Предположим, что число шарниров s равно числу подвижных тел. Трением в шарнирах пренебрегаем, т. е. связи считаем идеальными. Пусть шарнир с номером σ связывает тело $\sigma - 1$ с телом σ. При этом уравнения связей запишутся в виде

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\rho}_\sigma + x_\sigma^\sigma\, \mathbf{i}_\sigma + y_\sigma^\sigma\, \mathbf{j}_\sigma + z_\sigma^\sigma\, \mathbf{k}_\sigma - \\ -\boldsymbol{\rho}_{\sigma-1} - x_{\sigma-1}^\sigma\, \mathbf{i}_{\sigma-1} - y_{\sigma-1}^\sigma\, \mathbf{j}_{\sigma-1} - z_{\sigma-1}^\sigma\, \mathbf{k}_{\sigma-1} = 0\,, \\ \sigma = \overline{1, s}\,.\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь векторы $\mathbf{i}_\sigma$, $\mathbf{j}_\sigma$, $\mathbf{k}_\sigma$, соответствующие телу σ, имеют тот же смысл, что и выше, x_ρ^σ, y_ρ^σ, z_ρ^σ — координаты шарнира с номером σ в системе $C_\rho x_\rho y_\rho z_\rho$. Нулевым считается неподвижное тело. Обозначим через $\mathbf{R}_\sigma$ силу, приложенную через шарнир к телу σ со стороны тела $\sigma - 1$. Воспользуемся принципом освобождаемости. При этом уравнения движения тела σ будут содержать реакции $\mathbf{R}_\sigma$ и $\mathbf{R}_{\sigma+1}$. Отметим, что к телу s приложена одна реакция $\mathbf{R}_s$. Продифференцируем систему (11) дважды по времени, а затем исключим вторые производные, используя для каждого тела найденную новую форму уравнений его движения. При этом получим систему s уравнений относительно s неизвестных реакций $\mathbf{R}_\sigma$. Уравнение, соответствующее произвольному σ, неравному 1 и s, содержит реакции $\mathbf{R}_{\sigma-1}$, $\mathbf{R}_\sigma$, $\mathbf{R}_{\sigma+1}$. При $\sigma = 1$ и при $\sigma = s$ имеем уравнения соответственно относительно $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, и $\mathbf{R}_{s-1}$, $\mathbf{R}_s$. Из сказанного следует, что данная система уравнений имеет структуру, удобную для ее решения на компьютере методом последовательного исключения искомых реакций. Определив реакции и подставив их в уравнения движения, получим систему дифференциальных уравнений движения рассматриваемой цепочки тел. Эта система разрешена относительно вторых производных, т. е. подготовлена для интегрирования ее на компьютере.

Отметим, что теорию векторных уравнений Лагранжа первого рода наряду с классическим подходом, использованным, например, в работах [5, 6], удобно применить при изучении движения нагруженной платформы Стюарта.

Литература

1. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. М.: Юрайт, 2015. 592 с.
2. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Специальная форма уравнений динамики системы твердых тел // Докл. АН СССР, 1989. Т. 309. № 4. С. 805–807.
3. *Casey J.* Pseudo-rigid continua: basic theory and a geometrical derivation of Lagrage's equations // Proceedings of the Royal Society. London, 2004. Vol. A460. P. 2021–2049.
4. *Truesdell C.* A first course in rational continuum mechanics. Academic Press, Inc. 1991 или *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
5. *Леонов Г. А., Зегжда С. А., Кузнецов Н. В., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Юшков М. П.* Движение твердого тела, управляемое шестью стержнями переменной длины // Докл. РАН, 2014. Т. 455. № 3. С. 282–286.
6. *Леонов Г. А., Зегжда С. А., Зуев С. М., Ершов Б. А., Казунин Д. В., Костыгова Д. М., Кузнецов Н. В., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Юшков М. П.* Динамика платформы Стюарта и управление ее движением // Докл. РАН, 2014. Т. 458. № 1. С. 36–41.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК

Свободные колебаний кольцевых пластин

А. Л. Смирнов

Доклад на семинаре 4 сентября 2018 г.

Тонкие пластины различной формы используются как структурные элементы во многих инженерных приложениях, в которых критически важны высокая прочность, жесткость и малый вес материалов. Целью данного исследования является анализ свободных поперечных колебаний тонких кольцевых пластин. Такие пластины широко используются не только в технике, но и при моделировании биологических структур. При решении задачи использовались аналитические асимптотические и численные методы. Основной целью было нахождение простых асимптотических формул, описывающих влияние малого центрального отверстия на спектр частот свободных колебаний пластины.

Исследование возможностей программного пакета COMSOL для решения задач деформирования тел из сплавов с памятью формы

Т. А. Лапина

Доклад на семинаре 11 сентября 2018 г.

Практическое применение сплавов с памятью формы (СПФ) часто связано с необходимостью решения задач о деформировании тел сложной формы, испытывающих большие деформации, а также при сложных краевых условиях. Такие задачи в большинстве случаев не имеют аналитического решения. Выходом из этой ситуации является применение численных методов. Одним из наиболее используемых является метод конечных элементов, который позволяет решить большой круг инженерных задач.

В настоящей работе в программном пакете COMSOL Multiphysics исследованы возможности:

• Внутренних моделей материалов для решения задач деформирования тел из СПФ;

• Добавления пользовательского материала;

• Встроенных моделей СПФ в последней версии COMSOL Multiphysics 5.3a

Моделирование функционально-механического поведения сплавов с памятью формы на основе CuAlNi

Т. Ю. Чернышева

Доклад на семинаре 25 сентября 2018 г.

Сплавы с памятью формы на основе меди (например, CuAlNi), обладающие узким температурным гистерезисом и демонстрирующие полный возврат деформации, находят применение при изготовлении приводов и виброзащитных устройств. При этом моделей, описывающих их механическое поведение, известно немного. Это обусловливает актуальность данного исследования. В работе выполнено моделирование функционально-механических свойств сплавов с памятью формы на основе CuAlNi. Учтена анизотропия упругих постоянных в аустенитной фазе, записаны матрицы упругих постоянных и упругих податливостей.

Рассчитана матрица деформации для мартенситного превращения β_1(DO3)-β_1'(18R) и определен кристаллографический ресурс. Выполнено моделирование изотермического деформирования монокристаллов различных ориентаций в аустенитном состоянии, когда сплав с памятью формы демонстрирует эффект псевдоупругости. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с имеющимися в литературе.

Время релаксации вращательной энергии колебательно-возбужденных молекул

А. И. Бечина

Доклад на семинаре 2 октября 2018 г.

Моделирование неравновесных течений газов важно для аэрокосмических приложений, исследования атмосфер планет, решения задач экологии. При построении описания неравновесных течений возникает необходимость расчета тепловых и диффузионных потоков, тензора напряжений. В кинетической теории газов в рамках метода Энскога — Чепмена для расчета конкретных коэффициентов переноса (коэффициентов теплопроводности, диффузии, сдвиговой и объемной вязкости, релаксационного давления) необходимы сведения о времени релаксации вращательной энергии, входящей в выражение для интегральных скобок.

В работе изучено влияние колебательного уровня молекулы на время релаксации вращательной энергии в приближении поуровневой кинетики. Вращательные уровни молекул описаны моделью нежесткого ротатора; взаимодействие молекул описано моделью переменной мягкой сферы. По этой модели рассчитаны сечения столкновений $N_2 - N$, $O_2 - O$, $NO - O$ для разных колебательных и вращательных уровней молекул. В широком диапазоне температур проведен численный расчет времен релаксации и сравнение с временем релаксации, полученным по известной формуле Паркера. Проведен анализ влияния различных многоквантовых вращательных переходов на точность расчета времени вращательной релаксации.

Прогнозирование некоторых типов отказа в командных деталях и узлах специальных тепловых машин

В. Н. Кулёв

Доклад на семинаре 16 октября 2018 г.

Надежное проектирование, обеспечивающее работоспособность (выполнение заданных функций) на всем этапе жизненного цикла изделия, — сложная техническая задача. В ходе эксплуатации могут возникать как параметрические, так и функциональные отказы.

Под параметрическим отказом понимают изменение заданных параметров работы за недопустимые пределы. Такой отказ приводит к аварийному режиму работы, при котором важно обеспечить неразрушение машины.

Усталостное разрушение понимают как функциональный отказ. Оно может быть связано как с сохранением общей циклической прочности, так и с ее потерей в ходе высокой динамики возникновения нагрузки. Кроме того, усталостное разрушение может приводить к образованию и развитию усталостных трещин, ведущих к полному разрушению металлоконструкций. Поэтому основной задачей прогнозирования отказа изделий является анализ усталости металлоконструкции.

Современные требования и подходы к созданию электромагнитных насосов для жидкометаллических систем реакторов на быстрых нейтронах

В. С. Федеряева

Доклад на семинаре 27 ноября 2018 г.

В докладе рассмотрены современные требования и подходы к разработке и созданию электромагнитных насосов для быстрых реакторов на примере насоса, разработанного для встроенной холодной фильтр-ловушки РУ БН-1200. Приводятся результаты исследований и опытно-конструкторских работ по созданию термо-жаростойких электротехнических материалов для обеспечения требуемого ресурса электромагнитных насосов при высоких температурах перекачиваемого металла и исследований, направленных на оптимизацию конструкции и подтверждение ее заданных характеристик. Сформулированы задачи по совершенствованию технологии изготовления вышеупомянутых электротехнических материалов.

Численное моделирование гидродинамического и акустического поля при течении воды в трубе с препятствиями

В. В. Комаров

Доклад на семинаре 26 февраля 2019 г.

При течении жидкости в различных каналах и запорной арматуре могут возникать гидродинамический шум, вибрация и шум вблизи устройства. Процесс возникновения гидродинамического шума в самой жидкости сложен и связан с наличием завихренности. В случае, когда поток отрывается от стенки, образуются вихри и неравномерное поле давления, но это поле само по себе не является звуком, т. к. возмущения распространяются со скоростью потока. Существующие вихри ударяются об упругие стенки канала, вызывая их колебания, которые будут являться уже источником звука и распространяться со скоростью звука в жидкости. В связи с этим сложную задачу определения гидродинамического шума и виброшумовых характеристик можно рассматривать отдельно.

В работе исследуется нестационарное гидродинамическое поле при течении воды в трубе круглого сечения с распоркой. В результате гидродинамического расчета определяются нестационарные распределения давления вдоль стенок трубы и нестационарные картины обтекания балки. Производится преобразование Фурье нестационарного поля давления на стенках, и эти данные являются источниками для расчета виброакустической задачи.

Интегралы столкновений заряженных частиц

И. А. Захаров

Доклад на семинаре 9 апреля 2019 г.

В современной молекулярно-кинетической теории газов для расчета коэффициентов переноса (таких как теплопроводность? вязкость, коэффициенты диффузии) требуется вычислять Ω-интегралы. Через них выражаются коэффициенты систем уравнений, с помощью которых вычисляют вышеупомянутые коэффициенты переноса. Целью работы являлось написание программного модуля в рамках кафедрального проекта Kappa, вычисляющего интегралы столкновений (Ω-интегралы) для столкновения заряженных и нейтральных частиц. Основная область применения разрабатываемого модуля — расчет тепловых потоков у поверхности высокоскоростных летательных аппаратов.

ХРОНИКА

Первая международная конференция по механике современных материалов и конструкций (ICMAMS 2018)

С 17 по 20 июня 2018 г. в Турине проходила Первая международная конференция по механике современных материалов и конструкций (ICMAMS 2018), организованная Политехническим университетом Турина (Politecnico di Torino). Оргкомитет возглавляли известные ученые J. N. Reddy (College Station, Texas) и E. Carrera (Politecnico di Torino).

Доклады проходили в замке Валентино (Castello del Valentino) — одной из главных достопримечательностей Турина. Замок, построенный в XVI в. на берегу реки По, являлся одной из туринских резиденций Савойского дома. В 1860 г. он перешел в распоряжение инженерного факультета Туринского университета. В 1997 г. замок Валентино был включен ЮНЕСКО в список объектов всемирного наследия. На конференции было организовано 15 секций,

Замок Валентино (Castello del Valentino)

посвященных наноструктурам и нанотехнологиям, моделированию композитных материалов, биомеханике, неклассическим теориям деформируемых твердых тел, теориям стержней, пластин и оболочек, задачам, связанным с разрушением, и другим современным направлениям механики. В программу ICMAMS 2018 вошло 159 докладов.

На секции 12 «Стержни, пластины и оболочки» активные участники семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» сделали следующие доклады:

1. С. Б. Филиппов “Asymptotic analysis of ring-stiffened cylindrical shells buckling”.

2. С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова, К. А. Минина “On the unsymmetrical buckling of the nonuniform shallow spherical shells under internal pressure”.

3. А. Л. Смирнов, Е. А. Долгова “Vibrational spectra of thin elliptic plates”.

Проф. М. В. Шитикова (ВГТУ), проф. С. Б. Бауэр, проф. С. Б. Филиппов и доц. А. Л. Смирнов (СПбГУ) с участниками секции “Beam, plate and shell structures” на Первой международной конференции по механике современных материалов и конструкций в Турине, июнь 2018

Вторая международная конференция по механике современных материалов и конструкций (ICMAMS 2019) пройдет в Китае в г. Нанкин 19–22 октября 2019 г.

С. Б. Филиппов

Седьмая международная конференция по вычислительным методам в динамике конструкций и сейсмоинженерии

24–26 июня 2019 г. в г. Херсониссос на о. Крит (Греция) состоялась Седьмая международная конференция по вычислительным методам в динамике конструкций и сейсмоинженерии (COMPDYN 2019), которая является одной из тематических конференций Европейского общества по вычислительным методам в прикладных науках (ECCOMAS) и специализированной конференцией Международной ассоциации по вычислительной механике (IACM). Конференция была также поддержана Европейским комитетом по вычислительной механике конструкций и твердых тел (ECCSM). С 2007 г.

Конференц-центр Creta Maris — место проведения COMPDYN 2019

конференции COMPDYN проводятся каждые 2 года на одном из греческих островов. Основным организатором конференции выступает Национальный технический университет Афин. Председатель оргкомитета — проф. М. Пападракакис. Начиная с 2009 г. участники семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» участвуют с докладами в работе COMPDYN.

В этом году в рамках конференции проводился минисимпозиум “Thin-walled structures: strength, vibration and stability”, организаторами которого стали проф. П. Е. Товстик и доц. А. Л. Смирнов (СПбГУ). Минисимпозиум открывался основным докладом “Linear 2D models of anisotropic plates in the high approximations”

Доц. А. Л. Смирнов, доц. Г. В. Павилайнен, к.ф.-м.н. Д. В. Франус и проф. С. Б. Филиппов (СПбГУ) на Седьмой международной конференции по вычислительным методам в динамике конструкций и сейсмоинженерии (COMPDYN 2019) на Крите, июнь 2019

(П. Е. Товстик и др.), после чего на двух сессиях было сделано еще 10 докладов, авторами которых были сотрудники СПбГУ, ИПМаш РАН, Технического университета Дрездена (Германия) и Римского университета Сапиенца. В обсуждении докладов минисимпозиума принял участие известный ученый Prof. Isaac Elishakoff (Florida Atlantic University).

Статьи, написанные по материалом докладов, включены в Труды конференции (https://2019.compdyn.org/proceedings/).

С. М. Бауэр

ОБ АВТОРАХ

Бечина Анна Ильинична — студентка I курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: молекулярно-кинетическая теория жидкости и газа. Научный руководитель — проф. Е. В. Кустова.

Даль Юрий Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф. Научные интересы: теория упругости. E-mail: ymdahl@yandex.ru

Дементьев Андрей Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры астрофизики математико-механического факультета СПбГУ. Научные интересы: теория переноса излучения, физическая кинетика. E-mail: adem13@mail.ru

Захаров Илья Андреевич — студент I курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета СПбГУ. Научные интересы: молекулярно-кинетическая теория газов, расчет тепловых потоков. Научный руководитель — проф. Е. В. Кустова.

Игушева Людмила Александровна — студентка I курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: динамика деформирования и разрушения твердых тел. Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАН, Ю. В. Петров.

Комаров Вячеслав Вадимович — студент I курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета СПбГУ. Научные интересы: вычислительная гидродинамика, гидроакустика. Научный руководитель — доц. А. Г. Карпенко.

Кулёв Валентин Николаевич — студент I курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: механика разрушений. Руководитель проекта — доц. С. А. Мешков. Научный руководитель — доц. Б. Н. Семенов.

Лапина Татьяна Андреевна — студентка I курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: математическое моделирование, механика сплавов с памятью формы, краевые задачи. Научный руководитель — доц. М. Е. Евард.

Морщинина Алина Алексеевна — канд. физ.-мат. наук, начальник отдела технологического и математического обеспечения НТЦ перспективного развития НТК ЖАТ ОАО «Радиоавионика». Научные интересы: теория упругости, теория надежности. E-mail: morshinina_alina@mail.ru

Морщинина Диана Алексеевна — канд. физ.-мат. наук, ведущий специалист НТЦ перспективного развития НТК ЖАТ ОАО «Радиоавионика». Научные интересы: теория упругости, теория надежности. E-mail: diana_morshinina@mail.ru

Петрова Виктория Игоревна — студентка IV курса кафедры прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: движение твердых тел, устойчивость, теория управления. Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф. М. П. Юшков. E-mail: vikkka97@mail.ru

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, стажер-исследователь Института проблем машиноведения РАН. Область научных интересов: аналитическая механика, теория механических колебаний, динамика твердого тела, устойчивость равновесия и движения, оптимизация механических систем. E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

Смирнов Андрей Леонидович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ, автор публикаций по вопросам механики тонкостенных конструкций.

Смольников Борис Александрович — проф. кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов: общая механика, биомеханика и робототехника, движение космических объектов, теория управления. Автор четырех книг и многочисленных статей по вопросам динамики твердого тела, робототехники и механики управляемых космических объектов. E-mail: smolnikovba@yandex.ru

Фазлыева Камилла Маратовна — студентка II курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: неголономная механика, задачи оптимального управления. Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф. М. П. Юшков. E-mail: flora666@yadex.ru

Федеряева Валерия Святославовна — студентка I курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: вычислительная гидродинамика, высокотемпературные неорганические материалы.

Франус Дмитрий Валерьевич — канд. физ.-мат. наук, выпускник кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: теория оболочек, биомеханика. Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф. С. М. Бауэр. E-mail: franus@mavis.ru

Чернышева Татьяна Юрьевна — студентка I курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: исследование и математическое моделирование функциональных свойств сплавов с памятью формы. Научный руководитель — канд. физ.-мат. наук, доц. М. Е. Евард.

Шугайло Тимофей Сергеевич — студент II курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: неголономная механика, задачи оптимального управления. Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф. М. П. Юшков. E-mail: shugaylotis@gmail.com

Юшков Михаил Петрович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, автор публикаций по вопросам теории колебаний, аналитической механики, теории управления.

УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА, ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ в 2017–2019 гг.

Каштанова Станислава Викторовна — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2017. Научный руководитель — проф., акад. РАН Н. Ф. Морозов.

Боярская Мария Леонидовна — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2017. Научный руководитель — проф. С. Б. Филиппов.

Ермолаева Надежда Николаевна — доктор физ.-мат. наук, СПбГУ, 2017.

SUMMARIES

Smirnov A. S., Smolnikov B. A. **Energy-time criterion in the Homan problem**

It's given a new formulation of the classical problem of astrodynamics — the Homan problem — on the optimization of the two-pulse transition of a spacecraft between two coplanar circular orbits. The energy-time quality indicator equal to the product of the total increase in the characteristic velocity for the duration of the transition is adopted as optimization criterion. The detailed solution of this problem is given, as a result of which the dependence of the optimal value of the dimensionless initial velocity on the ratio between the radii of the initial and final orbits is established. The numerical estimates of the efficiency of the proposed interorbital transition regime are made based on the solution and their comparison with similar estimates for the Homan regime is made. It can be concluded as a result of these estimates that the energy-time criterion should also be used in other problems of orbital space navigation, characterized by a high and even superhigh duration of the planned transition.

MSC class: 70F15

Keywords: spacecraft, Homan semi-ellipse, two-pulse transition, energy-time optimization criterion.

References

1. *Duboshin G. N.* Reference Guide to Celestial Mechanics and Astrodynamics. Moscow, Nauka, 1971. P. 584 [in Russian].
2. *Levantovsky V. I.* The mechanics of space flight in an elementary presentation. Moscow, Nauka, 1980. P. 512 [in Russian].
3. *Seyfert G.* Space technology. Moscow, Nauka, 1969. P. 728 [in Russian].
4. *Erike K.* Space flight. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1971. P. 584 [in Russian].
5. *Okhotsimsky D. E., Sikharulidze Yu. G.* Fundamentals of the mechanics of space flight. Moscow, Nauka, 1990. P. 448 [in Russian].
6. *Mirer S. A.* The mechanics of space flight. Orbital motion. Moscow, Resolit, 2007. P. 270 [in Russian].
7. *Moiseev N. N.* Mathematical problems of system analysis. Moscow, Nauka, 1981. P. 488 [in Russian].

8. *Smolnikov B. A.* Problems of mechanics and robot optimization. Moscow, Nauka, 1991. P. 232 [in Russian].
9. *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Optimal damping of free oscillations in linear mechanical systems // Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie. No 3, 2017. P. 8 [in Russian].
10. *Ventsel E. S.* Elements of dynamic programming. Moscow, Nauka, 1964. P. 176 [in Russian].
11. *Merkin D. R., Smolnikov B. A.* Applied problems of the dynamics of a rigid body. St. Petersburg, St. Petersburg University, 2003. P. 534 [in Russian].
12. *Markeev A. P.* Theoretical mechanics. Moscow, Izhevsk, RCD, 2007. P. 592 [in Russian].
13. *Grodzovsky G. L., Ivanov Yu. N., Tokarev V. V.* The mechanics of space flight. Optimization problems. Moscow, Nauka, 1975. P. 702 [in Russian].
14. *Novoselov V. S.* Analytical theory of optimization in gravitational fields. Leningrad, Leningrad University, 1972. P. 317 [in Russian].
15. *Louden D. F.* Optimal trajectories for space navigation. Moscow, Mir, 1966. P. 152 [in Russian].

Igusheva L. A. **Rod dynamic fracture in the Klein — Gordon field**

The interaction model of a constant cross-section rod with an elastic environment is considered. The directly proportional to the displacement resistance forces impacted on the rod.

The equation of longitudinal vibrations of the rod interacting with the elastic medium is obtained. This equation is well-known Klein — Gordon equation. The solution of this equation is found. Displacements and stresses arising in the rod under dynamic loading are calculated.

The wave propagation and reflection from the free boundary of a finite-length rod are considered. The possibility of the effect of spall fracture is shown. Fracture phenomenon is predicted by the incubation time criterion. In several special cases, the dependence of the threshold value of the load amplitude on the critical time of the rod fracture and on the duration of the load is found. With a small coefficient of environment resistance, a range of optimal frequencies load for rod fracture is found.

With an increase in the resistance coefficient of the environment, it is noted that the rod fracture occurred with the direct propagation of

the wave along the rod. It is shown that there are optimal frequencies of load when the rod fracture occurred.

MSC class: 74R15, 74K10

Keywords: dynamic fracture, spall fracture, incubation time criterion.

References

1. *Slepyan L. I.* Non-stationary elastic waves. Leningrad: Publishing house Shipbuilding, 1972 [in Russian].
2. *Nikitin L. V.* Statics and dynamics of solids with external dry friction. Mosk.: Mosk. Lyceum, 1998 [in Russian].
3. *Bazhenov V. G., Kotov V. L., Krylov S. V., Balandin V. V., Bragov A. M., Tsvetkova E. V.* Experimental and theoretical analysis of non-stationary process of interaction of deformable projectiles with a dirt medium. Applied mechanics and technical physics. 2001. Vol. 42, No. 6 [in Russian].
4. *Allen A., Earle B. M., Harvey L. M.* Dynamics of a Projectile Penetrating Sand William. Journal of Applied Physics. Vol. 28. P. 370, 1957.
5. *Averin V. V., Zheltkov V. I.* Penetration speed of the elastic rod in the soil // Izvestiya tulgu. Technical Sciences. 2016. issue. 11. part 2 [in Russian].
6. *Petrov Y. V.* On the breakaway analysis from the standpoint of structural fracture mechanics. DAN USSR. T. 313. No. 2. 1990. P. 276–279.
7. *Rabotnov Y. N.* Mechanics of deformable solids. Science. 1988. P. 187–190 [in Russian].
8. *Smirnov V. I.* Course of higher mathematics. Vol. 2. Science. 1974. P. 573–583 [in Russian].
9. *Polyanin A. D.* Handbook of linear equations of mathematical physics. M.: FIZMATLIT, 2001. P. 261 [in Russian].
10. *Petrov Y. V.* Structural-temporal approach to modeling of fracture dynamics in brittle media. London: Rock Dynamics and Applications — State of the Art, 2013. P. 101–110.

Dahl Yu. M., Morshchinina A. A., Morshchinina D. A. **Some of the problems of bending and stability of elastic beams and plates**

The problem of the stress-strain state of a curved beam loaded with an arbitrary transverse load is considered. The integration of the differential bending equation is made by using the operating method.

The connection of this method with the method of initial parameters is determined.

The stability of prismatic bars is investigated by the operational method. The physical meaning of the “completely indefinite” numerical factor in the theoretical works of the authors describing the forms of stability loss of bars is determined. The local loss of stability of thin-walled elements of engineering structures is analyzed. The results of some theoretical studies of this problem are presented.

The features of deformation of thick plates and thin plates with elliptical cut are presented. It is noted that the stress concentration coefficient is a function which depends on the deformed cut configuration.

The results of laboratory experiments on stretched polymer films with a circular hole and a system of rectilinear cuts are presented.

MSC class: 74K25

Keywords: theory of elasticity, the operating method, stability of bars, plate with elliptical cut.

References

1. *Timoshenko S. P.* Kurs teorii uprugosti [The course of theory of elasticity]. Kiev, “Naukova Dumka” Publ., 1972. 501 p.
2. *Rabotnov Yu. N.* Soprotivlenie materialov [Resistance of materials]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 456 p.
3. *Lavrentev M. A. Shabat B. V.* Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of complex variable]. Moscow, “Nauka” Publ., 1965. 736 p.
3. *Sommerfeld A.* Über die Knicksicherheit der Stege von Walzprofiln. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1906. Bd. 54, H. 2. S. 113–153.
4. *Papkovich P. F.* Stroitelnaia mekhanika korablia [Structural mechanics of a ship]. Vol. II. Leningrad, Sudpromgiz Publ. 1941. 960 p.
5. *Dahl Yu. M.* About stresses in elastic stripe under normal forces on longitudinal borders // Vestnik St. Petersburg Univ. 2001. Ser. 1, 6(64). Issue 3. P. 73–78 (in Russian).
6. *Dahl Yu. M.* Vliianie maloi geometricheskoi nelineinosti na kharakter napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia u vershiny treshchiny [Influence of small geometric nonlinearity on the character of stress-strain state at the crack tip] // Izvestiia AN SSSR, MTT, 1980. No 2. P. 130–137 (in Russian).

Fazlyeva K. M., Shugailo T. S. **Vibration damping control of a three-mass system while horizontal motion**

Calculating the vibration damping of a mechanical system by constructing an optimal control force that transfers mechanical system for a given time from the one phase state with predetermined initial generalized coordinates and velocities to another phase state with given coordinates and speeds is considering. Such a problem is the central problem of control theory. To solve it, a relatively new method based on the application of generalized Gauss principle from the theory of nonholonomic systems is used. Calculations results are compared with the results obtained using Pontryagin maximum principle from the classical control theory.

MSC class: 70Q05, 70F25

Keywords: control theory, optimal control, vibration control, vibration damping, Pontryagin maximum principle, hight order nonholonomic constraints, generalized Gauss principle.

References

1. *Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P.* Teoreticheskaya mekhanika [Theoretical mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola, 2000. 592 p. [in Russian].

2. *Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.* The mathematical theory of optimal processes. Inc. New York — London, Interscience Publishers John Wiley and Sons, 1962. 360 p.

3. *Chernousko F. L., Akulenko D., Sokolov B. N.* Upravlenie kolebaniyami [Control of oscillations]. Moscow, Nauka, 1980. 384 p. [in Russian].

3. *Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* Negolonomnaya mekhanika: teoriya i prilozheniya [Nonholonomic mechanics: theory and application]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 343 p. [in Russian].

4. *Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* Mechanics of nonholonomic systems. A New Class of control systems. Berlin, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 329 p.

5. *Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P.* Obobschenie principa Gaussa na sluchai negolonomnyh sistem visshih poryadkov [Generalization of Gauss's principle to nonholonomic systems of higher orders] // Doklady AN SSSR, No 269. Issue 6, 1983. P. 1328–1330 [in Russian].

Morshchinina A. A., Morshchinina D. A. **Analysis of reliability and safety of automated control systems**

In this article automated control systems are considered. Mathematical models of their functioning, taking into account the features of the structure of hardware and software, are constructed. The analysis of the reliability and safety of the automated control system as a whole and its functional blocks, which are redundant or non- redundant system with recovery, is made. On the basis of the theory of Markov processes formulas of availability function, availability factor, failure rate are obtained. The ways of control and checking information flows including different functional blocks of the system are investigated. Expressions for calculating the probability of a dangerous failure are founded by Fault Tree Analysis.

The presented models allow to assess the reliability and safety of automated control systems of different configurations. The influence of the system structure on the values of reliability and safety indicators is analyzed.

MSC class: 60J28, 60K10.

Keywords: automated control system, theory of reliability, reliability, the theory of Markov processes, Fault Tree Analysis.

References

1. *Stefani E. P.* Osnovy postroeniya ASU TP [Fundamentals of automated process control systems]. Moscow, Energoizdat Publ., 1982. 352 p.
2. *Fedorov Yu. N.* Spravochnik inzhenera po ASUTP: proektirovanie i razrabotka. [Engineer's guide to automated process control systems: Design and development]. 2nd ed. Moscow, Infa-Inzheneriia Publ., 2016. 484 p.
3. *Lavrenyuk I. V.* Avtomatizirovannye sistemy upravleniya na zheleznodorozhnom transporte [Automated control systems for railway transport]. Moscow, UMTS ZHDT Publ., 2017. 242 p.
4. *Piavchenko T. A., Finaev V. I.* Avtomatizirovannye informatsionno-upravliaiushchie sistemy [Automated information and control systems]. Taganrog, TRTU Publ., 2007. 271 p.
5. *Fedotov A. V.* Avtomatizatsiia upravleniia v proizvodstvennykh sistemakh [Automation of control in production systems]. Omsk, OmGTU Publ., 2001. 354 p.

6. *Sapozhnikov V. V.* Metody postroeniia bezopasnykh mikroprotsessornykh sistem zheleznodorozhnoi avtomatiki [Methods of construction of safe microprocessor systems of railway automation] / V. V. Sapozhnikov, Vl. V. Sapozhnikov, H. A. Hristov, D. V. Gavzov; ed. by Vl. V. Sapozhnikova. Moscow, Transport Publ., 1995. 272 p.
7. *Sapozhnikov V. V.* Sertifikatsiia i dokazatelstvo bezopasnosti sistem zheleznodorozhnoi avtomatiki [Certification and proof of safety of railway automation systems] / V. V. Sapozhnikov, Vl. V. Sapozhnikov, V. I. Talalaev, etc.; Edited by Vl. V. Sapozhnikova. Moscow, Transport Publ., 1997. 288 p.
8. *Polovko A. M.* Osnovy teorii nadezhnosti [Fundamentals of reliability theory] / A. M. Polovko, S. V. Gurov. 2nd ed., SPb, BKHV-Peterburg Publ., 2006. 704 p.
9. *Ostreikovskii V. A.* Teoriia nadezhnosti [Reliability theory]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 2003. 463 p.
10. *Belyaev Yu. K.* Nadezhnost tekhnicheskikh sistem [Reliability of technical systems] / Yu. K. Belyaev, V. A. Bogatyrev, V. V. Bolotin and others; edited by I. A. Ushakov. Moscow. Radio i sviaz Publ., 1985. 608 p.
11. *Bryleev A. M.* Osnovy zheleznodorozhnoi avtomatiki i telemekhaniki [Fundamentals of railway automatics and telemechanics]. 2nd ed. / A. M. Bryleev, A. S. Pereborov, Vl. V. Sapozhnikov, A. V. Smirnova, A. A. Euler. Moscow, Transport Publ., 1977. 376 p.
12. *Pereborov A. S.* Osnovy zheleznodorozhnoi avtomatiki i telemekhaniki [Fundamentals of railway automatics and telemechanics]. 3rd ed. / A. S. Pereborov, A. M. Pylaev, V. V. Sapozhnikov and others; edited by A. S. Pereborov. Moscow, Transport Publ., 1984. 384 p.
13. *Venttsel E. S.* Issledovanie operatsii [Research of operations] / E. S. Venttsel. Moscow, “Sovetskoe radio” Publ., 1972. 552 p.
14. *Feller V.* Vvedenie v teoriiu veroiatnostei i ee prilozheniia [Introduction to probability theory and its applications] / V. Feller. In 2 volumes. Vol. 1. Russ. ed. Moscow, Mir Publ., 1984. 528 p.
15. *Morshchinina A. A., Morshchinina D. A.* K voprosu o funktsionalnoi nadezhnosti slozhnykh sistem [To the question of the functional reliability of complex systems] // Electronic complexes of multi-purpose: collection of scientific papers. Anniversary issue. 1991–2016 / Radioavionica Corporation. SPb. Politekhnika Publ., 2016. P. 255–264 (in Russian).

Dementyev A. V. **Specific features of the reflection by the radiation of a compact highly focused rotating source**

The location is based on the fact that the analysis of the properties of the reflected signal provides opportunity to get information about the surface of the studied or revealed object. In the case of the location

of farther objects and in larger solid angle two methods can be used: 1) to send the high energetic flux of the radiant energy (electromagnetic, acoustic etc.) at once on all possible directions by the short impulses; 2) to concentrate this flux in the narrow ray and scan different directions by it. Given the finite value of the speed of propagation of the signals the irradiation of one and the same object by these two methods may result in the substantially different pictures of the reflection for one and the same remote observer.

In this research the reflection by the screen of the spherical and ellipsoidal form of the electromagnetic radiation of the compact source uniformly rotating about its axis and radiating in the limited solid angle is considered. The profiles of the reflected impulses are calculated, as well as the moments of their arrival at the remote observer. The conditions are determined under which the above methods of the irradiation of the screen give the reflected impulses with substantially different parameters.

MSC class: 78A05, 78-04

Keywords: rotating source, reflection of radiation, location.

References

1. *Avni Y., Bahcall J. N.* Short-time optical variability of X-ray sources // Astrophys. J. 1974. Vol. 191. P. 221–230.
2. *Bolotovskiĭ B. M., Ginzburg V. L.* The Vavilov — Cherenkov effect and the Doppler effect in the motion of sources with superluminal velocity in vacuum // Sov. Phys. Uspekhi. 1972. Vol. 15. Issue 2. P. 184–192.
3. *Dementyev A. V.* On some features of reflection of radiation of the source rotating about its axis by the spherical screen // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. 2014. Vol. 1(59). P. 480–489 [in Russian].
4. *Dementyev A. V.* Specific features of the reflection effect in binary systems with compact source rotating about its axis // New Astron. 2015. Vol. 37. P. 52–63.

Franus D. V. **Features of finite-element modeling of eye biomechanic's problems in COMSOL**

The features of finite-element modeling of the corneoscleral shell of human eye under the pressure of applied vacuum compression ring

on the example of the COMSOL software package are considered. The aspects of building the geometry of an elastic multilayer thin-walled shell consisting of two spherical parts: 1) the corneal and 2) the scleral shell are considered in detail. The features of the use of a curvilinear coordinate system, parameters and variables, contact pair settings are described.

As a result of modeling, the nonlinear relation between modulus of elasticity of the sclera and both displacement and stress of the scleral shell under the load of a vacuum compression ring is revealed.

MSC class: 74S05, 74K25

Keywords: corneoscleral shell, intraocular pressure, vacuum comression ring, FE modeling, LASIK.

References

1. *Elias R. M., Wald J. T., Kallmes D. F.* Diagnosis of carotid artery stenosis with oculopneumoplethysmography alone and in combination with MRA // Vascular Health and Risk Management. Vol. 88, P. 631–639, 2012.
2. *Iomdina E. N., Bauer S. M., Kotliar K. E.* Biomechanics of the eye: theoretical aspects and clinical applications. M.: Real Time, 2015. 208 p.
3. *Chaorong Chen, J. F. Reed, D. C. Rice, W. Gee D., P. Updike, E. P. Salathe.* Biomechanics of Ocular Pneumoplethysmography // Journal Biomechanics Eng. 115(3). P. 231–238, 1993.

Petrova V. I., Yushkov M. P. **On the motion equations for a system of rigid bodies in redundant coordinates**

It is convenient to use a special form of differential motion equations to describe the motion of a solid body. The position of the solid body is characterized by the vectors determining the position of the mass center and three unit vectors of the associated coordinate system. The vector form of the Lagrange equations is written using the above “coordinates”. 12 equations are obtained in the scalar form and found 12 projections of the introduced vectors. This is twice the number of degrees of freedom, so the resulting differential equations are called the motion equations in redundant coordinates.

Such equations are convenient to use, in particular, in studying the motion of the loaded Stewart platform and in the preparation of equations of motion of interconnected solids.

MSC: 70E55, 70E60

Keywords: motion equations of a system of solids, Lagrange equations, holonomic constraints.

References

1. *Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P.* Theoretical Mechanics. Moscow, Yurait, 2015, 592 p. [in Russian].
2. *Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P.* Special form of dynamics equations of a system of solids // Dokladi Akademii Nauk SSSR, 1989. Vol. 309. No 4. P. 805–807 [in Russian].
3. *Casey J.* Pseudo-rigid continua: basic theory and a geometrical derivation of Lagrage's equations // Proceedings of the Royal Society. London, 2004. Vol. A460. P. 2021–2049.
4. *Truesdell C.* A first course in rational continuum mechanics. Academic Press, Inc. 1991.
5. *Leonov G. A., Zegzhda S. A., Kuznetsov N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Yushkov M. P.* Motion of a solid driven dy six rods of variable length // Doklady Physics, 2014. Vol. 59. No 3. P. 153–157 [in Russian].
6. *Leonov G. A., Zegzhda S. A., Zuev S. M., Ershov B. A., Kazunin D. V., Kostygova D. M., Kuznetsov N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Yushkov M. P.* Dynamics and control of the Stewart platform // Doklady Physics, 2014. Vol. 59. No 9. P. 405–410 [in Russian].

РЕФЕРАТЫ

УДК 523.2

Смирнов А. С., Смольников Б. А. **Энерго-временной критерий оптимизации в задаче Гомона** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2018–2019 гг. С. 6–20.

Дается новая постановка классической задачи астродинамики — задачи Гомана — об оптимизации двухимпульсного перехода космического летательного аппарата между двумя компланарными круговыми орбитами. В качестве критерия оптимизации принят энерго-временной показатель качества, равный произведению суммарного прироста характеристической скорости и длительности перехода. Приводится подробное решение этой задачи, в результате которого установлена зависимость оптимального значения величины безразмерной начальной скорости от соотношения между радиусами начальной и конечной орбит. На основе построенного решения сделаны численные оценки эффективности предложенного режима межорбитального перехода и проведено их сопоставление с аналогичными оценками для гомановского режима. В результате данных оценок можно сделать вывод о целесообразности использования энерго-временного критерия и в других задачах орбитальной космической навигации, характерных высокой и даже сверхвысокой длительностью планируемого перехода.

Библиогр. 15 назв. Ил. 6

Ключевые слова: космический летательный аппарат, гомановский полуэллипс, двухимпульсный переход, энерго-временной критерий оптимизации.

УДК 539.3:539.42

Игушева Л. А. **Динамическое разрушение стержня в волновом поле Клейна — Гордона** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2018–2019 гг. С. 21–38.

Рассматривается модель взаимодействия стержня постоянного поперечного сечения с упругой окружающей средой. Со стороны среды на стержень действуют силы сопротивления прямо пропорциональные перемещению. В рамках задачи об ударе рассмотрены распространение и отражение волны от свободной границы стержня конечной длины. В задаче отражения волны от свободного конца стержня показана возможность эффекта откольного разрушения. В нескольких частных случаях найдены зависимости порогового значения амплитуды возмущающей силы от критического времени разрушения стержня и от длительности воздействия внешней силы. Обнаружен целый диапазон оптимальных частот воздействия, при которых происходит откольное разрушение стержня.

Библиогр. 10 назв. Ил. 10

Ключевые слова: динамическое разрушение, откольное разрушение, инкубационное время разрушения.

УДК 539.3

Даль Ю. М., Морщинина А. А., Морщинина Д. А. **Некоторые задачи изгиба и устойчивости упругих балок и пластин** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2018–2019 гг. С. 39–53.

Рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии изогнутой балки, загруженной произвольной поперечной нагрузкой. Интегрирование дифференциального уравнения изгиба выполнено операционным способом. Установлена связь этого способа с методом начальных параметров.

Операционным методом исследована устойчивость призматических стержней. Выявлен физический смысл «совершенно неопределенного» числового сомножителя в теоретических работах авторов, описывающих формы потери устойчивости стержней. Проанализирована локальная потеря устойчивости тонкостенных элементов инженерных конструкций. Приведены результаты некоторых теоретических исследований данной проблемы.

Изложены особенности деформирования толстых плит и тонких пластин с эллиптическим вырезом. Отмечено, что так называемый коэффициент концентрации напряжений является функцией, зависящей от деформированной конфигурации выреза.

Показаны результаты лабораторных экспериментов над растянутыми полимерными пленками с круговым отверстием и системой прямолинейных разрезов.

Библиогр. 11 назв. Ил. 11

Ключевые слова: теория упругости, операционный метод, устойчивость стержней, пластина с эллиптическим вырезом.

УДК 531.3

Фазлыева К. М., Шугайло Т. С. **Управление гашением колебаний трехмассовой системы при горизонтальном движении** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2018–2019 гг. С. 54–64.

Работа посвящена расчету гашения колебаний механической системы при помощи нахождения оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему за требуемое время из одного фазового состояния, в котором заданы начальные обобщенные координаты и скорости, в другое фазовое состояние с заранее заданными обобщенными координатами и скоростями. Такая задача является одной из центральных задач теории управления. Для ее решения используется сравнительно новый метод, опирающийся на применение обобщенного принципа Гаусса из теории неголономных систем. Результаты расчетов сравниваются с результатами, полученными применением классической теории управления — принципом максимума Понтрягина.

Библиогр. 6 назв. Ил. 5

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, обобщенный принцип Гаусса, неголономные связи высоких порядков, оптимальное управление.

УДК 519.873

Морщинина А. А., Морщинина Д. А. **Анализ надежности и безопасности автоматизированных систем управления** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2018–2019 гг. С. 65–79.

В данной статье рассмотрены автоматизированные системы управления. Построены математические модели их функционирования, учитывающие особенности структуры аппаратных средств и программного обеспечения. Произведен анализ надежности и безопасности автоматизированной системы управления в целом и входящих в нее функциональных блоков, представляющих собой резервированную или нерезервированную систему с восстановлением. На основе теории марковских случайных процессов выведены зависимости для определения функции готовности, коэффициента готовности, интенсивности отказов. Исследованы пути потоков управляющей и контрольной информации, включающие различные функциональные блоки системы. Методом анализа дерева неисправностей получены формулы для вычисления вероятности опасного отказа.

Представленные модели позволяют производить оценку надежности и безопасности автоматизированных систем управления различной конфигурации. Проанализировано влияние структуры системы на значения показателей надежности и безопасности.

Библиогр. 15 назв. Ил. 9. Табл. 2

Ключевые слова: автоматизированная система управления, теория надежности, показатели надежности, теория марковских случайных процессов, анализ дерева неисправностей.

УДК 535.3, 51-7

Дементьев А. В. **Особенности отражения излучения компактного узконаправленного вращающегося источника** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2018–2019 гг. С. 80–96.

Локация основана на том, что анализ свойств отраженного сигнала дает возможность получать информацию о поверхности исследуемого или обнаруживаемого объекта. При этом для локации более далеких объектов и в большем телесном угле можно использовать два способа: 1) посылать высокоэнергичный поток излучения (электромагнитного, акустического и т. д.) сразу по всем возможным направлениям короткими импульсами; 2) сосредоточить этот поток в узком луче и сканировать им по различным направлениям. В связи с конечностью скорости распространения сигналов облучение одного и того же объекта этими двумя способами может давать существенно разные картины отражения для одного и того же удаленного наблюдателя.

В работе рассмотрено отражение экраном сферической и эллипсоидальной формы электромагнитного излучения компактного источника, равномерно вращающегося вокруг своей оси и излучающего в ограниченном телесном угле. Рассчитаны профили отраженных импульсов и их моменты прихода к удаленному наблюдателю. Определены условия, при которых указанные способы облучения экрана дают отраженные импульсы с существенно различающимися параметрами.

Библиогр. 4 назв. Ил. 8

Ключевые слова: вращающийся источник, отражение излучения, локация.

УДК 531/534: [57+61]

Франус Д. В. **Особенности конечно-элементного моделирования в COMSOL задач биомеханики глаза** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2018–2019 гг. С. 97–107.

С использованием программного пакета COMSOL рассматриваются особенности конечно-элементного моделирования корнеосклеральной оболочки глаза человека под действием давления, создаваемого приложенной вакуумной присоской. Подробно проанализированы аспекты построения геометрии упругой многослойной тонкостенной оболочки, состоящей из двух сферических частей: роговой оболочки и склеральной оболочки. Приводится описание особенностей использования криволинейной системы координат, параметров и переменных, настройки контактного взаимодействия.

В результате моделирования выявлено нелинейное влияние модуля упругости склеры на перемещения и напряжения склеральной оболочки под действием вакуумного компрессионого кольца.

Библиогр. 3 назв. Ил. 6.

Ключевые слова: корнеосклеральная оболочка, вакуумное компрессионное кольцо, внутриглазное давление, конечно-элементное моделирование, LASIK.

УДК 531.8

Петрова В. И., Юшков М. П. **Об уравнениях движения системы твердых тел в избыточных координатах** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2018–2019 гг. С. 108–115.

В работе предлагается видоизмененный вывод специальной формы дифференциальных уравнений движения системы соединенных твердых тел. Их можно назвать и уравнениями движения системы твердых тел в избыточных координатах. Такие уравнения удобно использовать, например, при изучении движения нагруженной платформы Стюарта.

Библиогр. 6 назв.

Ключевые слова: уравнения движения системы твердых тел, уравнения Лагранжа, голономные связи.

Научное издание

ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2018–2019 гг.

Редактор *И. В. Петрова*
Корректор *Н. Е. Абарникова*
Компьютерная верстка *Е. М. Воронковой*
Обложка *Е. А. Соловьевой*

Подписано в печать 00.00.2019. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 00,00.
Тираж 000 экз. Заказ № .

Издательство Санкт-Петербургского университета.
199004, Санкт-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11.
Тел./факс +7(812) 328-44-22
publishing@spbu.ru

publishing.spbu.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5.

Книги Издательства СПбГУ можно приобрести
по издательским ценам в Доме университетской книги СПбГУ

Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5

Тел. (812)329-24-71

Часы работы: 10.00–20.00 пн. — сб.,

а также на сайте publishing.spbu.ru

Книги **Издательства СПбГУ** можно

ЗАКАЗАТЬ

на сайте издательства: **publishing.spbu.ru**
в интернет-магазинах: **ozon.ru**; **bookvoed.ru**; **URSS.ru**

ПРИОБРЕСТИ

в книжных магазинах СПбГУ ***Дом университетской книги***

Менделеевская линия, д. 5
6-я линия В. О., д. 15
Университетская наб., д. 11

А также в магазинах

Санкт-Петербурга:	Сеть книжных магазинов «Буквоед» Санкт-Петербургский Дом книги, Невский пр., д. 28 «Подписные издания», Литейный пр., д. 57
Москвы:	«Библио-Глобус», ул. Мясницкая, д. 6/3 «Фаланстер», М. Гнездниковский пер., д. 12/27
Перми:	«Пиотровский», ул. Ленина, д. 54