

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2017–2018 гг.



ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ББК 22.25
Т78

Редакционная коллегия:

канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ),
канд. физ.-мат. наук, доц. *И. М. Аршипова* (отв. секретарь) (СПбГУ),
PhD, ass. prof. *Е. И. Атрощенко* (Университет Чили, Сантьяго),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),
канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. В. Воронкова* (СПбГУ),
д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (ВГТУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Ф. Жигалко* (ПГУПС),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Михасев* (БГУ, Беларусь),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. П. Помыткин* (СПб ГУАП),
д-р техн. наук, проф. *С. В. Сорокин* (Университет Ольборга, Дания),
д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик* (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ),
канд. физ.-мат. наук *Д. В. Франус* (НПО «УниШанс»),

*Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
Санкт-Петербургского государственного университета*

Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2016–2017 гг. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2019. — 87 с. + цв. вкл. 7 с.

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ББК 22.25

Семинар проводится

Санкт-Петербургским государственным университетом
совместно с Петербургским государственным университетом путей сообщения



Спонсор издания — некоммерческая организация
«Фонд содействия математическому образованию
и поддержки исследований в области точных наук “УниШанс”»
при финансовой поддержке инвестиционно-строительной группы «МАВИС»

Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

СО Д Е Р Ж А Н И Е

<i>Франус Д. В., Бауэр С. М., Колезжук У. Н.</i> Влияние формы склеральной оболочки на показатели внутриглазного давления	5
1. Введение	5
2. Влияние геометрических характеристик на показатели внутриглазного давления при апланационной тонометрии	6
3. Влияние соотношения полуосей эллипсоидальной склеральной оболочки на показатели внутриглазного давления	9
4. Результаты расчетов	11
5. Заключение	12
<i>Дзедзисашвили Г. Т.</i> Колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением	13
1. Введение	13
2. Колебания оболочки с жесткой заделкой на нижнем и верхнем краях	14
3. Колебания оболочки с жесткой заделкой на нижнем крае и шарнирной опорой на верхнем крае	21
4. Сравнение полученных результатов	27
5. Заключение	28
<i>Смирнов А. С., Смольников Б. А.</i> Оптимальное размещение шарнирной опоры в балочных конструкциях при действии различных нагрузок	30
1. Введение	30
2. Оптимизация расположения опоры при действии поперечных нагрузок	31
3. Оптимизация расположения опоры при действии продольных нагрузок	38
4. Заключение	44
<i>Бауэр С. М., Величко В. Е.</i> Деформация отражающей поверхности оптического зеркала под действием собственного веса	46
1. Введение	46
2. Постановка задачи	47

3. Применение теорий Тимошенко — Рейсснера и Паляя — Спиро.....	49
4. Результаты работы	57
5. Заключение.....	58
<i>Архипова И. М. Перевернутый n-звенный маятник на вибрирующем основании</i>	60
Резюме докладов, не вошедших в сборник.....	66
Хроника.....	71
Об авторах.....	73
Summaries	77
Рефераты.....	83

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ СКЛЕРАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ НА ПОКАЗАТЕЛИ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ

Д. В. ФРАНУС, С. М. БАУЭР, У. Н. КОЛЕЖУК

Рассматривается аналитическая механическая модель упругой тонкостенной корнеосклеральной оболочки глаза, состоящая из двух частей: 1) сферической роговой оболочки и 2) эллипсоидальной склеральной оболочки. Проводится сравнительный анализ влияния различных соотношений полуосей эллипсоидальной по форме склеральной оболочки на показатели истинного внутриглазного давления.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оценка показателей внутриглазного давления (ВГД) является важной характеристикой при наблюдении за пациентами до и после операций, проводимых на глазах по различным причинам.

Последние 50 лет активно развивается хирургия в области офтальмологии. В связи с проводимыми на глазу операциями в нем изменяются некоторые биомеханические характеристики различных элементов, поэтому из-за роста сложности хирургического вмешательства вопрос более точного определения значения истинного ВГД становится все более актуальным. Отметим, что при изменении этого показателя тонометром различают тонометрическое и истинное ВГД. Любой тонометр оказывает некоторое давление на глаз, деформируя его роговую оболочку и тем самым повышая ВГД. Фиксируемое тонометром повышенное значение ВГД называется тонометрическим.

Данная работа посвящена исследованию влияния эллипсоидальной формы склеральной оболочки на показатели истинного ВГД

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-01-00832).

Доклад на семинаре 5 сентября 2017 г.

© Д. В. Франус, С. М. Бауэр, У. Н. Колежук, 2019

при помощи построенной аналитической модели, которая позволяет изменять различные геометрические и механические характеристики.

2. ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ПОКАЗАТЕЛИ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ АППЛАНАЦИОННОЙ ТОНОМЕТРИИ

Аналитическая модель оценки истинного ВГД по тонометрическим данным при аппланационной тонометрии описана в работе [1].

Глазное яблоко моделируется тонкостенной упругой оболочкой, разделенной на два сферических сегмента (рис. 1). Составная оболочка до нагружения заполнена несжимаемой жидкостью под давлением p_0 . Сферический сегмент большего радиуса моделирует склеру (сегмент $A_0F_0B_0$ на рис. 1), и величины, характеризующие эту часть оболочки, обозначены индексом s . Сегмент меньшего радиуса (сегмент $A_0C_0D_0B_0$ на рис. 1) моделирует роговицу, и величины, характеризующие эту часть оболочки, обозначены индексом r .

Толщина, модуль Юнга и коэффициент Пуассона различных частей оболочки предполагаются различными.

Предполагается также, что линия действия приложенной к оболочке внешней силы (веса груза) проходит через центры обоих сфе-

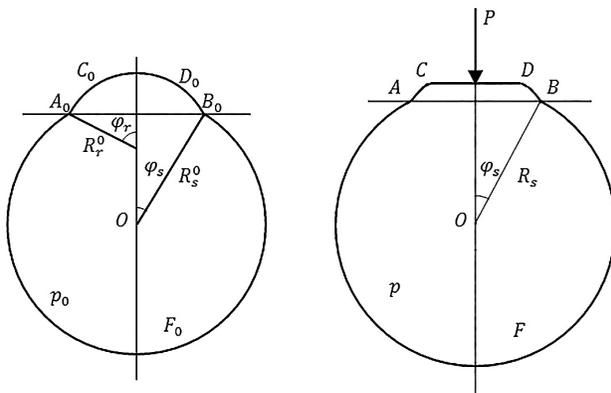


Рис. 1. Корнеосклеральная оболочка в случае до (слева) и после (справа) нагружения аппланационным тонометром

рических сегментов. Будем считать, что в результате действия груза склера деформируется так, что остается неизменным угол φ_s , под которым видна линия контакта из центра сферы, а сферический сегмент, моделирующий склеру, сохраняет свою сферическую форму, но у него изменяется радиус — R_s [1].

Известно также, что модуль Юнга роговицы много меньше модуля Юнга склеры ($E_s \gg E_r$) [2], поэтому роговица моделируется мягкой оболочкой (т. е. не сопротивляется изгибным деформациям). При принятых предположениях деформация части оболочки, моделирующей роговицу, будет существенной, и роговица примет форму, схематически представленную на рис. 1 справа.

Если груз имеет плоское основание, то на деформированной части роговицы под ним образуется плоский участок CD , представляющий собой круг диаметром d . В этом случае давление p внутри нагруженной сферы (тонометрическое давление):

$$p = \frac{P}{S}, \quad (1)$$

где $S = \pi \frac{d^2}{4}$, $d = CD$.

При решении задачи о деформации роговицы обозначим через s_0 длину дуги образующей оболочки в ненагруженном состоянии, отсчитываемой от оси симметрии, причем

$$0 < s_0 < s_0^b = R_r^0 \varphi_r. \quad (2)$$

Пусть s_0^d соответствует крайней точке D контакта оболочки с грузом в нагруженном состоянии. Запишем уравнения равновесия оболочки [3] и геометрические соотношения на участке DB , т. е. при $s_d \leq s_0 \leq s_b$ (значения физических параметров, относящихся к роговице, обозначим индексом r):

$$\begin{aligned} (r_0 T_1)' - T_2 \cos \varphi &= 0, \quad \varphi_0 = \frac{s_0}{R_r^0}, \quad r_0 = R_r^0 \sin \varphi_0, \\ -T_2 \sin \varphi - r_0 \varphi' T_1 + \lambda_1 r p &= 0, \quad \varepsilon_2 = \frac{r}{r_0} - 1, \\ T_2 &= \nu_r T_1 + E_r h_r \varepsilon_2 + T_0 (1 - \nu_r), \\ r' = \lambda_1 \cos \varphi, \quad \lambda_1 = 1 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 &= \frac{(T_1 - T_0)(1 - \nu_r^2)}{E_r h_r} - \nu_r \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь T_1 и T_2 — усилия в оболочке при наложении груза; T_0 — усилие в оболочке до приложения тонометра; ε_1 и ε_2 — соответственно дополнительные деформации оболочки, связанные с усилиями по формулам:

$$T_1 - T_0 = \frac{E_r h_r (\varepsilon_1 + \nu_r \varepsilon_2)}{1 - \nu_r^2}, \quad T_2 - T_0 = \frac{E_r h_r (\varepsilon_2 + \nu_r \varepsilon_1)}{1 - \nu_r^2}, \quad T_0 = \frac{p_0 R_r^0}{2}. \quad (4)$$

Далее: h_r — толщина роговицы, r и φ — соответственно расстояние до оси вращения и угол между нормалью к образующей и осью вращения при деформированном состоянии оболочки; штрихом обозначена производная по s_0 .

Основные неизвестные в системе (3) — величины T_1 , r и φ , а остальные параметры являются производными и выражаются через основные величины по формулам (3).

На участке под грузом ($0 \leq s_0 \leq s_d$) выполняются условия:

$$\varphi = 0, \quad (r_0 T_1)' - T_2 = 0, \quad r' = \lambda_1. \quad (5)$$

Для интегрирования систем (3) и (5) должны выполняться условия ограниченности решения при $s_0 = 0$, условия непрерывности функций T_1 , r и φ в точке D , в том числе равенство $r(s_d) = d/2$, и условие сопряжения в точке B :

$$r(s_b) = r_b, \quad r_b = R_s^0 \sin \varphi_s \left(1 + \frac{(1 - \nu_s) R_s^0 (p - p_0)}{2 E_s h_s} \right), \quad (6)$$

в котором величина r_b найдена из условий деформирования склеры, где h_s — ее толщина.

Для вычисления r_b найдем сначала уменьшение объема ΔV под сегментом $ACDB$ в результате действия груза:

$$\Delta V = \pi \int_0^{s_b} (r_0^2 \sin \varphi_0 - r^2 \lambda_1 \sin \varphi) ds_0. \quad (7)$$

Это уменьшение объема компенсируется растяжением склеры:

$$\Delta V = \Lambda (p - p_0), \quad \Lambda = \frac{3(1 - \nu_s) R_s^0}{2 E_s h_s} V_s + \frac{V_s + V_r}{K}, \quad (8)$$

где Λ — податливость глаза при повышении давления, K — модуль объемной жесткости внутриглазной жидкости (для несжимаемой жидкости $K = \infty$), V_s и V_r — объемы сегментов $A_0C_0D_0B_0$ и $A_0F_0B_0$ соответственно:

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{\pi R_s^3}{3} (2 + 3 \cos \varphi_s - \cos^3 \varphi_s), \\ V_r &= \frac{\pi R_r^3}{3} (2 - 3 \cos \varphi_r + \cos^3 \varphi_r). \end{aligned} \quad (9)$$

Итак, в системе (3), (5) заданы все геометрические и физические параметры оболочек и величины P , d и p . Величины p_0 , s_d и ΔV определяются в ходе решения.

3. ВЛИЯНИЕ СООТНОШЕНИЯ ПОЛУОСЕЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ СКЛЕРАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ НА ПОКАЗАТЕЛИ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ

Будем моделировать глазное яблоко двумя сегментами различной формы. Составная оболочка до нагружения заполнена несжимаемой жидкостью с давлением p_0 . Эллипсоидальный сегмент с полуосями a и b моделирует склеральную оболочку. Сферический сегмент радиуса R_r моделирует роговую оболочку.

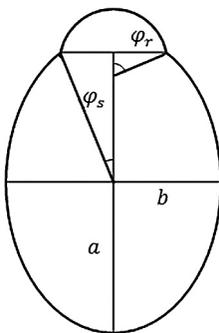


Рис. 2. Эллипсоидальная оболочка

Таблица 1. Параметры оболочек при эмметропии (в норме) и при аномалиях рефракции

Параметр	Мнопия	Эмметропия	Гиперметропия
Форма	Эллипсоидальная	Сферическая	Эллипсоидальная
R , мм	13,5	12,0	10,5
ПЗО, мм	28,0	23,5	19,0

Примечание: R — радиус в экваториальной зоне (плоскости, перпендикулярной оси вращения и проходящей через точку O на рис. 1); ПЗО (передне-задняя ось) — длина всей модели вдоль оси вращения до нагружения.

Исследуем, как меняются показатели ВГД при изменении формы глазного яблока (табл. 1). Объем эллипсоидального сегмента с полуосями a и b (рис. 2) равен

$$V_{\text{э.с.}} = \frac{\pi a^3 \beta^2}{3} \left(2 + \frac{3\beta \cos \varphi}{\sqrt{\beta^2 + (1 - \beta^2) \cos^2 \varphi}} - \frac{\beta^3 \cos^3 \varphi}{(\beta^2 + (1 - \beta^2) \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (10)$$

где

$$\varphi = \arcsin \frac{R_r^0 \sin \varphi_r}{\sqrt{a^2 \beta^2 - (\beta^2 - 1) R_r^0{}^2 \sin^2 \varphi_r}}, \quad (11)$$

$$\beta = b/a. \quad (12)$$

Примем этот объем равным объему сферического сегмента радиуса R_s^0 :

$$V_{\text{с.с.}}(R_s^0) = V_{\text{э.с.}}(a, \beta). \quad (13)$$

Из полученного соотношения найдем зависимость между β и a (при $R_s^0 = 12$ мм, $R_r^0 = 7,3$ мм, $\varphi_r = 38,0\pi/180,0$) (табл. 2).

Таблица 2. Соотношение параметров β и a

β	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	2
a , мм	20,19	16,18	12	9,91	10,32

При указанных соотношениях между β и a объем не изменяется. Теперь вычислим значение истинного ВГД при этих параметрах.

Соотношения (3)–(5), (7) остаются теми же. Изменяются формулы (6), (8), (9).

$$R_s^0 = \rho = \frac{a\beta}{\sqrt{1 + (\beta^2 - 1) \sin^2 \varphi}}, \quad (14)$$

$$r_b = R_r^0 \sin \varphi_r \left(1 + \frac{(1 - \nu_s) \rho (p - p_0)}{2E_s h_s} \right). \quad (15)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В результате проведенного расчета мы получили зависимость значений истинного ВГД от соотношения полуосей β (табл. 3) при $E_s = 12$ МПа, $E_r = 2,4$ МПа, $R_s = 12$ мм, $h_r = 0,5$ мм, $h_s = 0,5$ мм, и массе тонометра 5 г.

Таблица 3. Зависимость истинного ВГД (в миллиметрах рт. ст.) от соотношения полуосей β

d , мм	β				
	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	2
3,0	51,13	51,16	51,20	51,24	51,46
3,5	37,20	37,23	37,28	37,33	37,59
4,0	28,05	28,10	28,16	28,21	28,53
4,5	21,56	21,61	21,68	21,75	22,25

При этом $\beta = \frac{1}{2}$ соответствует близоруким глазам, а $\beta = 2$ — дальнозорким.

Одинаковой зоне контакта груза и роговицы в дальнозорких глазах соответствует чуть большее истинное ВГД (см. рис. 3 цв. вкл.), что способствует образованию глаукомы, чем в глазах с нормальным зрением, в близоруких глазах истинное ВГД понижается, что подтверждается офтальмологическими и биомеханическими исследованиями [4].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате построена аналитическая модель, описывающая зависимость значения истинного ВГД от объема эллипсоидальной корнеосклеральной оболочки при нагружении апланационным тонометром, которая позволяет варьировать соотношение полуосей, радиусы, толщины и модули упругости роговой и склеральной оболочек, длину передне-задней оси, а также массу тонометра.

Одинаковой зоне контакта груза и роговицы в глазах с укороченной передне-задней осью соответствует чуть большее значение истинного ВГД, чем в глазах с нормальным зрением, в глазах с удлинённой передне-задней осью истинное ВГД понижается.

Для глаз с большей длиной передне-задней оси (в случае близорукости) при одном и том же объеме глаза и при одинаковом размере зоны контакта между роговой оболочкой и тонометром истинное ВГД незначительно повышается с увеличением толщины роговицы.

При одинаковом размере зоны контакта апланационного тонометра и роговой оболочки в глазах с удлинённой ПЗО (при близорукости) большему радиусу роговой оболочки соответствует чуть меньшее значение истинного ВГД.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бауэр С. М., Любимов Г. А., Товстик П. Е.* Физический анализ измерения внутриглазного давления методом Маклакова // Сб. тр. IV межрегион. семинара «Биомеханика глаза 2004». М., 2004. С. 91–96.
2. *Иомдина Е. Н., Бауэр С. М., Котляр К. Е.* Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. М.: Реал Тайм, 2015. 208 с.
3. *Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., и др.* Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 388 с.
4. *Fransus D. V.* Changes in the stress-strained state of the corneoscleral shell of a human eye after the injection // Proc. of the Intern. Conf. on “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov, SCP 2015. St. Petersburg, 2015. P. 522–525.

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С КВАДРАТНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Г. Т. ДЗЕВИСАШВИЛИ

Рассматриваются свободные колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением при разных граничных условиях. Путем приближенного аналитического решения, а также методом Рэлея и методом конечных элементов найдены значения низших частот колебаний. Получены зависимости частот от размеров оболочки и констант материалов. Сделаны выводы о пригодности приближенных методов, исходя из полученных погрешностей расчета по ним.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной прикладной механике теория оболочек играет одну из ведущих ролей, находя применение в различных сферах науки и техники: проектирование строительных конструкций, изучение биомеханики глаза, исследование акустических систем и др.

При проектировании акустики малых помещений для звукозаписи широко применяются звукоизоляционные кабины, предназначенные для изоляции источника звука от остального помещения, чтобы уменьшить при звукозаписи вклад нежелательных шумов и реверберации, связанных с несовершенствами акустики исходного помещения. При этом важно учесть не только влияние резонансных частот, связанных с акустическими явлениями, обусловленными в том числе и геометрией кабины, но и влияние иных внешних сил, способных вызывать колебания стенок кабины. Естественным образом возникает задача о поиске резонансных частот самой кабины.

Упрощенной моделью звукоизоляционной кабины является цилиндрическая оболочка с квадратным поперечным сечением, нижний край которой заделан, а верхний край соединен с квадратной пластиной (крышкой). Толщина крышки влияет на краевые условия для уравнения колебаний оболочки. При наличии толстой

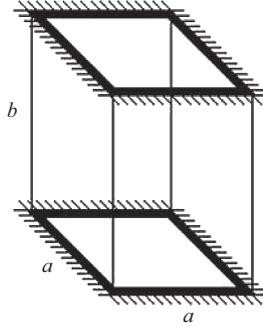


Рис. 1. Оболочка с жесткой заделкой на нижнем и верхнем краях (a и b — размеры, м)

крышки можно считать, что верхний край оболочки заделан (далее по тексту — З—З, заделка — заделка). Наличие тонкой крышки эквивалентно шарнирному опиранию этого края (далее по тексту — З—Ш, заделка — шарнир). Колебания цилиндрической оболочки с квадратным поперечным сечением в случае свободных и шарнирно открытых краев рассмотрены в работе [1].

2. КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ С ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКОЙ НА НИЖНЕМ И ВЕРХНЕМ КРАЯХ

Пусть имеется тонкая цилиндрическая оболочка с квадратным поперечным сечением, имеющая жесткую заделку на нижнем и верхнем краях (рис. 1).

Оболочка образована сопряжением под прямым углом четырех одинаковых прямоугольных пластин. Предположим, что деформации в плоскости каждой пластины пренебрежимо малы, изгибающие моменты в местах пересечения равны, а углы между сопряженными пластинами остаются прямыми при изгибах.

Прогиб k -й пластины описывается дифференциальным уравнением Лагранжа — Жермен [5]:

$$D\Delta\Delta w^{(k)} - \rho t w^{(k)} \omega^2 = 0, \quad k = 1 \dots 4, \quad (1)$$

где $w^{(k)} = w^{(k)}(x, y)$ — прогиб k -й пластины, зависящий от ло-

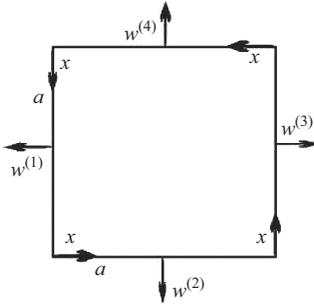


Рис. 2. Локальные координаты стенок оболочки

кальных координат x и y k -й пластины (рис. 2); $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$; $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ — жесткость на изгиб; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность пластины; t — толщина пластины; ω — собственная частота пластины.

С учетом предположений граничные условия для уравнения (1) имеют вид:

$$\begin{aligned} w^{(k)}(0, y) = w^{(k)}(a, y) &= 0, \\ w_x^{(k)}(a, y) = w_x^{(k+1)}(0, y), \\ w_{xx}^{(k)}(a, y) = w_{xx}^{(k+1)}(0, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где $k = 1 \dots 4$ — номер пластины (при этом $k + 1 = 1$, если $k = 4$).

Решение в виде

$$w^{(k)}(x, y) = (-1)^k W^{(k)}(y) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

где $m = 1, 2, \dots$ — число волн по ширине пластины, удовлетворяет граничным условиям (2). Ограничимся $m = 1$ и 2. Подставив полученное решение в исходное уравнение, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для расчета $W^{(k)}(y)$:

$$D \left(\frac{\partial^4 W^{(k)}}{\partial y^4} - 2 \frac{\pi^2 m^2}{a^2} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial y^2} + \frac{\pi^4 m^4}{a^4} W^{(k)} \right) - \rho t \omega^2 W^{(k)} = 0. \quad (3)$$

Поскольку верхний и нижний края имеют жесткую заделку, краевые условия для (3) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} W^{(k)}(0) = W^{(k)}(b) = 0, \\ \frac{\partial W^{(k)}}{\partial y}(0) = \frac{\partial W^{(k)}}{\partial y}(b) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Характеристическое уравнение для (3)

$$\gamma^4 - 2\frac{\pi^2 m^2}{a^2} \gamma^2 + \left(\frac{\pi^4 m^4}{a^4} - \frac{\rho t \omega^2}{D} \right) \gamma = 0 \quad (5)$$

имеет корни

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \pm \sqrt{\sqrt{\frac{\rho t \omega^2}{D} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2}}} = \pm \sigma_1, \\ \gamma_{3,4} &= \pm i \sqrt{\sqrt{\frac{\rho t \omega^2}{D} - \frac{\pi^2 m^2}{a^2}}} = \pm i \sigma_2, \end{aligned} \quad (6)$$

и тогда общее решение (3) ищется в виде:

$$W^{(k)}(y) = A \operatorname{ch} \sigma_1 y + B \operatorname{sh} \sigma_1 y + C \cos \sigma_2 y + D \sin \sigma_2 y, \quad (7)$$

где A , B , C и D — коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Обозначим $\lambda = \frac{\rho t \omega^2}{D}$. Подставив $W^{(k)}$ и $\frac{\partial W^{(k)}}{\partial y}$ в граничные условия, получаем линейную однородную систему относительно A , B , C и D :

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B \sigma_1 + D \sigma_2 = 0, \\ A \operatorname{ch} \sigma_1 b + B \operatorname{sh} \sigma_1 b + C \cos \sigma_2 b + D \sin \sigma_2 b = 0, \\ A \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_1 b + B \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_1 b - C \sigma_2 \sin \sigma_2 b + D \sigma_2 \cos \sigma_2 b = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$\sigma_1 \sigma_2 (1 - \cos \sigma_2 b \operatorname{ch} \sigma_1 b) + \frac{\pi^2 m^2}{a^2} \sin \sigma_2 b \operatorname{sh} \sigma_1 b = 0.$$

Таблица 1. Первые и вторые частотные параметры $f = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}$ при разных размерах

I частотный параметр				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	2,178	1,152	0,996	0,947
3	1,808	0,691	0,512	0,457
4	1,694	0,545	0,349	0,288
II частотный параметр				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	3,763	2,178	1,396	1,152
3	2,479	1,406	0,968	0,691
4	2,056	0,941	0,752	0,545

Полученное уравнение не имеет аналитического решения, однако его корни можно найти численными методами, если заданы ширина и высота пластины. В рамках настоящей работы для вычислений использовался пакет Mathematica. Зафиксируем m и пронумеруем корни уравнения в порядке возрастания. Тогда n -му корню уравнения соответствует форма колебаний с m волнами по ширине и n волнами по высоте. Расчеты показывают, что при $b > a$ для второй формы колебаний $m = 1, n = 2$ (рис. 3, см. цв. вкл.). В противном случае $m = 2, n = 1$ (рис. 4, см. цв. вкл.). В табл. 1 приведены первые и вторые частотные параметры $f = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}$ при разных размерах пластины.

Из системы уравнений (8) найдем константы:

$$\begin{cases} C = -A, \\ D = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} B, \\ A = -\frac{\operatorname{sh} \sigma_1 b - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sin \sigma_2 b}{\operatorname{ch} \sigma_1 b - \cos \sigma_2 b} B. \end{cases} \quad (9)$$

Для оценки частот в качестве материалов использовались ДСП, ЦСП и сталь (табл. 2) [2, 4]. Далее по тексту при подстановке констант материалов переходим к обычной частоте $\tilde{\nu} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda D}{\rho t}}$.

Таблица 2. Константы материалов

Материал	Модуль Юнга E , МПа	Кэфф. Пуассона, ν	Плотность ρ , кг/м ³	Толщина t , см
ДСП	1050	0,065	800	1,5
ЦСП	3000	0,200	1200	2,0
Сталь	20000	0,250	7800	0,5

Частоты для заданных материалов и разных размеров стенок, полученные аналитически, приведены в табл. 3. Сравним аналитические результаты с результатами, полученными методом конечных элементов. Для вычислений по МКЭ использовался пакет ANSYS. Оболочка моделировалась элементами SHELL63 с разбиением, равным 400 элементов/м². При увеличении разбиения в 2 раза получаемые значения изменялись после третьей значащей цифры.

Частотные параметры, полученные по МКЭ, приведены в табл. 4.

Первую частоту можно также найти по методу Рэлея — Ритца [3]. Форма колебаний ищется приближенно в виде ряда

$$W^{(k)}(x, y) = C_1 W_1^{(k)}(x, y) + C_2 W_2^{(k)}(x, y) + \dots, \quad (10)$$

где каждая из координатных функций $W_i^{(k)}(x, y)$ удовлетворяет геометрическим граничным условиям.

Частоты определяются из равенства нулю определителя системы (метод Ритца [3, 6]):

$$\frac{\partial n_0}{\partial C_K} - \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial C_K} = 0, \quad (11)$$

где

$$n_0 = \iint D \left(\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\left(\frac{d^2 w}{dxdy} \right)^2 - \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \right) dx dy$$

— потенциальная энергия деформации пластины при изгибе, интеграл берется по всей поверхности пластины. Для пластин постоянной толщины интеграл от второго слагаемого обращается в нуль;

Таблица 3. Частоты при заданных материалах и разных размерах

I частота, ДСП				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	10,828	5,726	4,954	4,708
3	8,986	3,436	2,545	2,271
4	8,424	2,707	1,736	1,432
II частота, ДСП				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	18,709	10,828	6,940	5,726
3	12,326	6,991	4,811	3,436
4	10,221	4,677	3,739	2,707
I частота, ЦСП				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	20,294	10,732	9,284	8,823
3	16,841	6,440	4,770	4,255
4	15,787	5,073	3,253	2,683
II частота, ЦСП				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	35,064	20,294	13,006	10,732
3	23,100	13,103	9,016	6,440
4	19,156	8,766	7,007	5,073
I частота, сталь				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	16,442	8,695	7,522	7,148
3	13,645	5,218	3,864	3,448
4	12,791	4,110	2,636	2,174
II частота, сталь				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	28,408	16,442	10,538	8,695
3	18,715	10,616	7,305	5,218
4	15,520	7,102	5,677	4,110

Таблица 4. Частотные параметры, полученные по МКЭ

I частотный параметр				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	2,176	1,151	0,996	0,947
3	1,807	0,691	0,512	0,457
4	1,694	0,545	0,349	0,288
II частотный параметр				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	3,763	2,178	1,397	1,152
3	2,479	1,406	0,968	0,691
4	2,056	0,941	0,752	0,544

$\widetilde{M} = \iint \rho t w^2 dx dy$ — максимальная кинетическая энергия пластины, интеграл берется по всей поверхности пластины.

Если в ряде (10) ограничиться одним слагаемым, то наименьшая частота определяется из соотношения Рэлея (метод Рэлея):

$$\omega = \sqrt{\frac{2n_0}{\widetilde{M}}}. \quad (12)$$

В силу симметрии достаточно рассмотреть две половины двух смежных стенок оболочки, поставив на разрезах граничные условия

$$\frac{\partial W_i^{(k)}}{\partial x} = \frac{\partial^3 W_i^{(k)}}{\partial x^3} = 0, \quad (13)$$

а на нижнем и верхнем крае — условия жесткой заделки:

$$W_i^{(k)} = \frac{\partial W_i^{(k)}}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad y = b. \quad (14)$$

Таким граничным условиям удовлетворяет функция

$$W = C \sin \frac{\pi x}{2\tilde{a}} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right), \quad (15)$$

где $\tilde{a} = \frac{a}{2}$ — половина ширины стенки.

Таблица 5. Первые частотные параметры $f = \tilde{\nu} \sqrt{\frac{\rho t}{D}}$ при разных размерах, полученные по методу Рэлея

Высота/Ширина	1	2	3	4
2	2,221	1,178	1,018	0,967
3	1,833	0,707	0,524	0,467
4	1,712	0,555	0,357	0,295

Вычисляя n_0 и \tilde{M} и переходя от циклической частоты ω к обычной ($\tilde{\nu} = \frac{\omega}{2\pi}$), находим, что:

$$n_0 = \frac{DC^2 \pi^4}{64\tilde{a}^3 b^3} (32\tilde{a}^2 b^2 + 256\tilde{a}^4 + 3b^4), \quad (16)$$

$$\tilde{M} = \frac{3}{2} \rho t C^2 \tilde{a} b, \quad (17)$$

$$\tilde{\nu} = \frac{\sqrt{3}\pi}{24\tilde{a}^2 b^2} \sqrt{D \frac{32\tilde{a}^2 b^2 + 256\tilde{a}^4 + 3b^4}{\rho t}}. \quad (18)$$

Частотные параметры $f = \tilde{\nu} \sqrt{\frac{\rho t}{D}}$ приведены в табл. 5.

3. КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ С ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКОЙ НА НИЖНЕМ КРАЕ И ШАРНИРНОЙ ОПОРОЙ НА ВЕРХНЕМ КРАЕ

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку с квадратным поперечным сечением, имеющую жесткую заделку на нижнем крае и шарнирную опору на верхнем крае (рис. 5).

Будем искать частоты колебаний, основываясь на предположениях, принятых в предыдущем разделе. Дифференциальное уравнение для расчета функции прогиба k -й стенки вдоль оси OY — $W^{(k)}(y)$ — записывается аналогично (3):

$$D \left(\frac{d^4 W^{(k)}}{dy^4} - 2 \frac{\pi^2 m^2}{a^2} \frac{d^2 W^{(k)}}{dy^2} + \frac{\pi^4 m^4}{a^4} W^{(k)} \right) - \rho t \omega^2 W^{(k)} = 0. \quad (19)$$

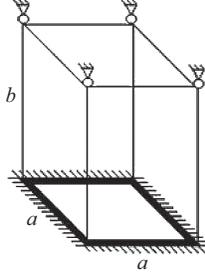


Рис. 5. Оболочка с жесткой заделкой на нижнем крае и шарнирной опорой на верхнем крае расчета

Краевые условия для (19) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} W^{(k)}(0) = \frac{\partial W^{(k)}}{\partial y}(0) &= 0, \\ W^{(k)}(b) = \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial y^2}(b) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение также ищется в виде суммы (7). Подставим $W^{(k)}(y)$, $\frac{\partial W^{(k)}(y)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 W^{(k)}(y)}{\partial y^2}$ в граничные условия (20) и запишем полученную относительно неизвестных коэффициентов A , B , C и D систему:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B\sigma_1 + D\sigma_2 = 0, \\ A \operatorname{ch} \sigma_1 b + B \operatorname{sh} \sigma_1 b + C \cos \sigma_2 b + D \sin \sigma_2 b = 0, \\ A\sigma_1^2 \operatorname{ch} \sigma_1 b + B\sigma_1^2 \operatorname{sh} \sigma_1 b - C\sigma_2^2 \cos \sigma_2 b - D\sigma_2^2 \sin \sigma_2 b = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$\sigma_1 \sin \sigma_2 b \operatorname{ch} \sigma_1 b = \sigma_2 \cos \sigma_2 b \operatorname{sh} \sigma_1 b.$$

Полученное уравнение можно решить численно, зная размеры a и b . Зафиксируем m и пронумеруем корни уравнения в порядке возрастания аналогично тому, как это сделано в предыдущем разделе. В табл. 6 приведены первые и вторые частотные параметры $f = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}$ при разных размерах пластины.

Таблица 6. Первые и вторые частотные параметры $f = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}$ при разных размерах

I частотный параметр				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	2,056	0,941	0,752	0,690
3	1,773	0,620	0,418	0,352
4	1,681	0,514	0,305	0,235
II частотный параметр				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	3,427	2,056	1,220	0,941
3	2,366	1,236	0,914	0,620
4	2,007	0,857	0,653	0,514

Из системы уравнений (21) найдем константы:

$$\begin{cases} C = -A, \\ D = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} B, \\ A = -\frac{(1+\sigma_1^2) \operatorname{sh} \sigma_1 b - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \sigma_1 \sigma_2\right) \sin \sigma_2 b}{(1+\sigma_1^2) \operatorname{ch} \sigma_1 b - (1-\sigma_2^2) \cos \sigma_2 b} B. \end{cases} \quad (22)$$

Частотные параметры, полученные по МКЭ и по приближенному аналитическому методу при заданных материалах и разных размерах стенок, приведены в табл. 7 и 8.

Найдем первую частоту методом Рэля аналогично случаю 3–3, рассмотрев две половины двух смежных стенок оболочки, поставив на разрезах граничные условия (13), а на верхнем и нижнем крае — условия (20). Взяв функцию

$$W = C \sin \frac{\pi x}{2\tilde{a}} \left(y^4 - \frac{5b}{2} y^3 + \frac{3b^2}{2} y^2 \right) \quad (23)$$

в качестве координатной функции, получим:

$$n_0 = \frac{DC^2 b^5}{80640 \tilde{a}^3} (1728 \pi^2 \tilde{a}^2 b^2 + 72576 \tilde{a}^4 + 19\pi^4 b^4), \quad (24)$$

Таблица 7. Частотные параметры, полученные по МКЭ

I частотный параметр				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	2,055	0,941	0,752	0,690
3	1,772	0,620	0,418	0,352
4	1,680	0,514	0,305	0,235
II частотный параметр				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	3,427	2,056	1,220	0,941
3	2,366	1,236	0,914	0,620
4	2,007	0,857	0,653	0,514

$$\tilde{M} = \frac{19}{2520} \rho t C^2 \tilde{a} b^9, \quad (25)$$

$$\tilde{\nu} = \frac{\sqrt{19}}{152\pi \tilde{a}^2 b^2} \sqrt{\frac{D(1728\pi^2 \tilde{a}^2 b^2 + 72\,576\tilde{a}^4 + 19\pi^4 b^4)}{\rho t}}. \quad (26)$$

Частотные параметры $f = \tilde{\nu} \sqrt{\frac{\rho t}{D}}$ приведены в табл. 9.

Поскольку указанная в исходной задаче крышка имеет в данном случае толщину t_0 , значительно меньшую, чем толщина стенок, ее первая частота будет сравнима с частотами стенок, и поэтому данную частоту следует учесть, найдя ее приближенно методом Рэлея. Крышку можно рассматривать как квадратную пластину, заделанную по всему периметру.

Возьмем координатную функцию $W = C(1 - \cos \frac{2\pi x}{a})(1 - \cos \frac{2\pi y}{a})$. Она удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{aligned} W^{(k)} &= \frac{\partial W^{(k)}}{\partial x} = 0, & x = 0, x = a, \\ W^{(k)} &= \frac{\partial W^{(k)}}{\partial y} = 0, & y = 0, y = a. \end{aligned} \quad (27)$$

В результате вычислений получаем

$$n_0 = 2abC^2 D_0 \pi^4 \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right), \quad (28)$$

Таблица 8. Частоты при заданных материалах и разных размерах

I частота, ДСП				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	10,221	4,677	3,739	3,428
3	8,815	3,081	2,079	1,748
4	8,355	2,555	1,517	1,169
II частота, ДСП				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	17,038	10,221	6,064	4,677
3	11,762	6,146	4,541	3,081
4	9,975	4,259	3,245	2,555
I частота, ЦСП				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	19,156	8,766	7,007	6,425
3	16,520	5,775	3,896	3,276
4	15,659	4,789	2,842	2,191
II частота, ЦСП				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	31,931	19,156	11,364	8,766
3	22,043	11,519	8,511	5,775
4	18,695	7,983	6,081	4,789
I частота, сталь				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	15,520	7,102	5,677	5,205
3	13,385	4,679	3,156	2,654
4	12,687	3,880	2,303	1,775
II частота, сталь				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	25,870	15,520	9,207	7,102
3	17,859	9,332	6,896	4,679
4	15,147	6,468	4,927	3,880

Таблица 9. Первые частотные параметры $f = \tilde{\nu} \sqrt{\frac{\rho t}{D}}$ при разных размерах, полученные по методу Рэлея

Высота/Ширина	1	2	3	4
2	2,066	0,942	0,753	0,690
3	1,781	0,622	0,419	0,352
4	1,687	0,516	0,306	0,236

$$\tilde{M} = \frac{9}{4} abC^2 \rho t_0, \quad (29)$$

Для частоты $\tilde{\nu}$ имеем:

$$\tilde{\nu} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4}} \sqrt{\frac{D_0}{\rho t_0}}. \quad (30)$$

Частотный параметр крышки $f = \tilde{\nu} \sqrt{\frac{\rho t_0}{D_0}}$, таким образом, равен $\frac{5,924}{a^2}$.

Сравнение частотных параметров стенки и крышки приведено в табл. 10.

Таблица 10. Сравнение частотного параметра стенки и частотного параметра крышки

Среднее значение I частотного параметра стенки при фиксированной ширине, Гц	1,837	0,692	0,492	0,425
a	1	2	3	4
t_0 , % толщины стенки	30			
I частотный параметр крышки (метод Рэлея)	5,924	1,481	0,658	0,370
I частотный параметр крышки (МКЭ)	5,718	1,431	0,636	0,358
Относительная погрешность	0,036	0,035	0,035	0,034

Как можно видеть из табл. 10, если ограничиться толщиной в 30 %, частотный параметр крышки превосходит среднее значение I частотного параметра стенки при фиксированной ширине не более чем в 3,5 раза. При увеличении стороны поперечного сечения частотный параметр крышки становится сравнимым со средним значением частотного параметра стенки при фиксированной ширине.

4. СРАВНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обратимся повторно к найденным частотным параметрам и проведем сравнение для обоих случаев, когда на верхнем крае заданы условия жесткой заделки и когда на нем заданы условия шарнирного опирания. Вычислим разности соответствующих частот при разных граничных условиях. Результаты приведены в табл. 11.

Можно заметить, что с увеличением высоты стенки при фиксированной ширине стенки и разных граничных условиях соответствующие частотные параметры мало отличаются друг от друга.

Таблица 11. Разности соответствующих частот при разных граничных условиях

Разность I частотных параметров при разных граничных условиях				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	0,122	0,211	0,244	0,257
3	0,034	0,071	0,094	0,105
4	0,014	0,031	0,044	0,053
Разность II частотных параметров при разных граничных условиях				
Высота/Ширина	1	2	3	4
2	0,336	0,122	0,176	0,211
3	0,113	0,170	0,054	0,071
4	0,049	0,084	0,099	0,031

Таблица 12. Средняя относительная погрешность МКЭ

Заделка—заделка		Заделка—шарнир	
Средняя погрешность по первым частотам, %	-0,017	Средняя погрешность по первым частотам, %	-0,024
Средняя погрешность по вторым частотам, %	-0,043	Средняя погрешность по вторым частотам, %	-0,040
Общая средняя погрешность, %	-0,030	Общая средняя погрешность, %	-0,032

Выясним среднюю относительную погрешность определения I и II частот при использовании МКЭ. Результаты отражены в табл. 12 и в номограммах на рис. 6 (см. цв. вкл.). Из полученных результатов видно, что метод конечных элементов дает очень точные результаты.

Найдем среднюю относительную погрешность определения I частоты при использовании метода Рэлея. Результаты отражены в номограммах на рис. 7 (см. цв. вкл.). Средняя относительная погрешность составляет 2,016 % для случая З—З и 0,247 % для случая З—Ш соответственно, и общая средняя погрешность составляет 1,131 %. Таким образом, формулы (18) и (26) можно использовать для приближенного определения первой частоты.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена задача о колебаниях цилиндрической оболочки с квадратным поперечным сечением для случаев, когда оба края имеют жесткую заделку и когда нижний край имеет жесткую заделку, а верхний край — шарнирное соединение.

Получены значения частотных параметров, не отнесенных к конкретному материалу, для разных размеров стенок. Выяснилось, что с увеличением высоты стенки при фиксированной ширине и разных граничных условиях частотные параметры мало различа-

ются. Также получено, что в случае З—Ш частотный параметр крышки не более чем в 3,5 раза превышает среднее значение I частотного параметра стенки при фиксированной ширине. При увеличении стороны поперечного сечения частотный параметр крышки приближается к среднему значению частотного параметра стенки при фиксированной ширине.

Проведено сравнение точности разных методов при вычислении первой частоты. МКЭ для рассмотренных вариантов граничных условий работает достаточно точно, демонстрируя среднюю погрешность $-0,031\%$, в то время как метод Рэлея имеет погрешность $1,131\%$. Улучшить результат можно, если использовать метод Ритца. Однако проводимые при этом вычисления весьма громоздки при использовании даже двух координатных функций и не позволяют получить относительно простые формулы для приближенного нахождения низшей частоты, в отличие от метода Рэлея.

Для некоторых материалов уточнены численные результаты, согласно которым низшие частоты лежат в инфразвуковом диапазоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L.* Free vibrations of square elastic tubes with a free end // *Mech. Res. Communications*. 2000. Vol. 27, iss. 4. P. 457–464.
2. *Бадьин Г. М.* Справочник технолога-строителя. СПб.: БХВ-Петербург, 2015. 400 с.
3. *Биргер И. А., Пановко Я. Г.* Прочность. Устойчивость. Колебания. В 3 томах. Т. 3 / под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
4. ГОСТ 10632–2007. Плиты древесно-стружечные. Технические условия. М.: Стандартинформ, 2007. 16 с.
5. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
6. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1985. 474 с.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ШАРНИРНОЙ ОПОРЫ В БАЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАЗЛИЧНЫХ НАГРУЗОК

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

В работе обсуждаются методы определения местоположения дополнительной шарнирной опоры в различных балочных конструкциях, цель установки которой — выполнение некоторых оптимизационных требований. Основной объект исследования — консольная балка, хотя предлагаемые рассуждения можно применить и для балок с другими краевыми условиями. При этом учитываются различные типы внешнего нагружения балки: сосредоточенные и распределенные, продольные и поперечные силы. Когда действуют поперечные нагрузки, в качестве критерия оптимизации выбирается минимизация максимального прогиба и максимального изгибающего момента, а для продольных нагрузок — максимизация критической силы, при которой теряется устойчивость балки. Поставленная задача решается аналитическими методами статики балочных конструкций, что приводит к достаточно громоздким конечным выражениям, не поддающимся лишь одному аналитическому исследованию. Тем не менее качественный характер полученных решений несложно установить путем их графической интерпретации, основанной на результатах компьютерного расчета. В ходе решения задачи показано, что при действии сосредоточенных нагрузок оптимальным является размещение опоры на свободном конце балки, а при действии распределенных нагрузок — во внутренних точках. Проведенное исследование демонстрирует, что таким путем можно заметно снизить максимальные значения прогиба и изгибающего момента балки или существенно повысить критическую силу.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной строительной механике довольно большое внимание уделяется вопросам оптимизации геометрии стержневых и балочных конструкций при разных видах их нагружения [1–3]. В качестве критерия качества при этом наиболее часто выбирается минимизация общего веса конструкции при некоторых заданных огра-

Доклад на семинаре 26 сентября 2017 г.

© А. С. Смирнов, Б. А. Смольников, 2019

нениях [4, 5]. Решения этих и подобных им задач строительной механики строятся преимущественно методами линейного и нелинейного программирования, и они хорошо представлены в технической литературе [6]. В настоящей же статье на примере анализа консольной балки ставится вопрос об оптимальном размещении шарнирной опоры классическими методами поиска оптимального решения. Далее будет показано, что это решение оказалось достаточно интересно и заслуживает практического применения в реальных конструкциях.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОРЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНЫХ НАГРУЗОК

Рассмотрим консольную балку длиной l и жесткостью на изгиб EJ , на которую действует сосредоточенная или распределенная поперечная нагрузка. Ясно, что при этом максимальный прогиб $|v|_{\max}$ и максимальный изгибающий момент $|M|_{\max}$ могут достигать весьма больших значений. Возникает естественный вопрос: в каком месте балки следует поставить промежуточную шарнирную опору, чтобы значения $|v|_{\max}$ и $|M|_{\max}$ стали минимально возможными? То есть необходимо определить оптимальное значение параметра a , характеризующего расстояние от заделки до промежуточной опоры, или, что более удобно, безразмерного параметра $\alpha = a/l$.

В случае когда на балку в концевой точке действует сосредоточенная сила P (рис. 1), ответ очевиден: шарнирную опору следует поместить в эту точку, и тогда балка не будет деформироваться. Поэтому здесь оптимальное значение есть $\alpha_* = 1$.

Рассмотрим теперь консольную балку под действием распределенной нагрузки q (рис. 2).

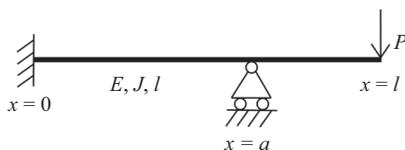


Рис. 1. Балка с сосредоточенной поперечной силой

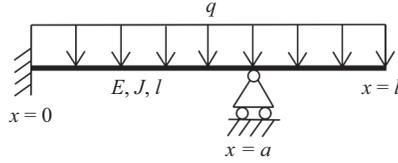


Рис. 2. Балка с распределенной поперечной нагрузкой

Используя модель балки Бернулли — Эйлера, запишем уравнение равновесия этой системы [7]:

$$EJv^{IV} = q, \quad (1)$$

где v — прогиб балки. Уравнение (1) следует дополнить граничными условиями в заделке $x = 0$ и на свободном конце $x = l$:

$$v(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad Q(l) = 0, \quad M(l) = 0, \quad (2)$$

где $\theta = v'$ — угол поворота, $M = EJv''$ — изгибающий момент, $Q = EJv'''$ — перерезывающая сила; а также условиями сопряжения в промежуточной опоре:

$$\begin{aligned} 1) & v(a-0) = v(a+0) = 0, \\ 2) & \theta(a-0) = \theta(a+0), \\ 3) & Q(a-0) = Q(a+0) + R, \\ 4) & M(a-0) = M(a+0), \end{aligned} \quad (3)$$

означающими непрерывность прогиба, угла поворота и изгибающего момента при переходе через опору, равенство нулю прогиба на опоре, а также то, что скачок перерезывающей силы в точке $x = a$ равен реакции R в опоре. Интегрируя уравнение (1) на каждом из участков балки $0 \leq x \leq a$ и $a \leq x \leq l$ (которые здесь и далее обозначены в решении индексами 1 и 2 соответственно), получаем следующее решение:

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{24} \begin{cases} z^4 + A_1 z^3 + B_1 z^2 + C_1 z + D_1, & 0 \leq z \leq \alpha, \\ (z - \alpha)^4 + A_2 (z - \alpha)^3 + B_2 (z - \alpha)^2 + \\ \quad + C_2 (z - \alpha) + D_2, & \alpha \leq z \leq 1, \end{cases} \quad (4)$$

где в нем для удобства введены следующие безразмерные величины:

$$z = \frac{x}{l}, \quad \bar{v} = \frac{v}{ql^4/EJ}.$$

Их физический смысл очевиден: z — безразмерная координата вдоль балки, а \bar{v} — безразмерный прогиб последней. Подчиняя (4) условиям (2) и (3), приходим к следующей системе линейных уравнений относительно неизвестных констант интегрирования A_k , B_k , C_k и D_k , где $k = 1, 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = 0, \\ C_1 = 0, \\ 6(1 - \alpha)^2 + 3A_2(1 - \alpha) + B_2 = 0, \\ 4(1 - \alpha) + A_2 = 0, \\ \alpha^4 + A_1\alpha^3 + B_1\alpha^2 = 0, \\ D_2 = 0, \\ 4\alpha^3 + 3A_1\alpha^2 + 2B_1\alpha = C_2, \\ 6\alpha^2 + 3A_1\alpha + B_1 = B_2. \end{array} \right.$$

Разрешая эту систему, определяем искомые константы, которые будут зависеть только от параметра α :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2\alpha} [6(1 - \alpha)^2 - 5\alpha^2], & B_1 &= \frac{3}{2} [\alpha^2 - 2(1 - \alpha)^2], \\ C_1 &= 0, & D_1 &= 0, \\ A_2 &= -4(1 - \alpha), & B_2 &= 6(1 - \alpha)^2, \\ C_2 &= -\frac{\alpha}{2} [\alpha^2 - 6(1 - \alpha)^2], & D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя третье условие в (3), можно также найти реакцию R в опоре, но для нас она не представляет интереса.

Прежде чем решать оптимизационную задачу, интересно проанализировать полученное выражение (4) с учетом представлений для констант (5). Ясно, что на интервале $0 < z < \alpha$ безразмерный прогиб $\bar{v}(z)$ имеет по крайней мере одну точку экстремума, однако на этом интервале их может быть и две. Поэтому имеет смысл определить число этих точек в зависимости от α . Дифференцируя выражение (4) для случая $0 < z < \alpha$ и учитывая, что $C_1 = 0$, приходим к уравнению

$$4z^3 + 3A_1z^2 + 2B_1z = 0,$$

корень $z = 0$ которого очевиден и соответствует равенству нулю угла поворота в заделке, а два других являются корнями квадратного трехчлена $f(z) = 4z^2 + 3A_1z + 2B_1$ и, очевидно, имеют вид:

$$z_1 = \frac{-3A_1 - \sqrt{9A_1^2 - 32B_1}}{8}, \quad z_2 = \frac{-3A_1 + \sqrt{9A_1^2 - 32B_1}}{8} \quad (6)$$

Выясним, когда эти корни удовлетворяют условиям $0 < z_{1,2} < \alpha$. Для этого должны выполняться следующие условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} D = 9A_1^2 - 32B_1 > 0, \\ 0 < z_0 = -\frac{3A_1}{8} < \alpha, \\ f(0) = B_1 > 0, \\ f(\alpha) = 4\alpha^2 + 3A_1\alpha + 2B_1 > 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Их смысл ясен: дискриминант D трехчлена $f(z)$ должен быть положительным, вершина параболы z_0 должна лежать между точками 0 и α , а значения трехчлена $f(z)$ в этих точках должны быть положительными. Разрешая систему (7), получим

$$0,589 \approx 2 - \sqrt{2} < \alpha < \frac{6 - \sqrt{6}}{5} \approx 0,717.$$

В этом диапазоне значений α между заделкой и опорой имеются две экстремальные точки z_1 и z_2 . Аналогично устанавливается, что если $\alpha < 2 - \sqrt{2}$, то между заделкой и опорой будет одна экстремальная точка $z = z_2$, а если $\alpha > (6 - \sqrt{6})/5$ — то одна точка $z = z_1$.

Перейдем теперь к анализу диапазона $\alpha < z < 1$. Ясно, что точки экстремума в этом диапазоне, если они существуют, определяются из кубического уравнения

$$f(z) = 4(z - \alpha)^3 + 3A_2(z - \alpha)^2 + 2B_2(z - \alpha) + C_2 = 0,$$

которое, как видно, имеет весьма сложную структуру. Тем не менее если записать производную от функции $f(z)$ с учетом представлений для констант A_2 и B_2 согласно (5), то легко заметить, что эта производная всюду больше нуля:

$$f'(z) = 12[(z - \alpha) - (1 - \alpha)]^2 > 0,$$

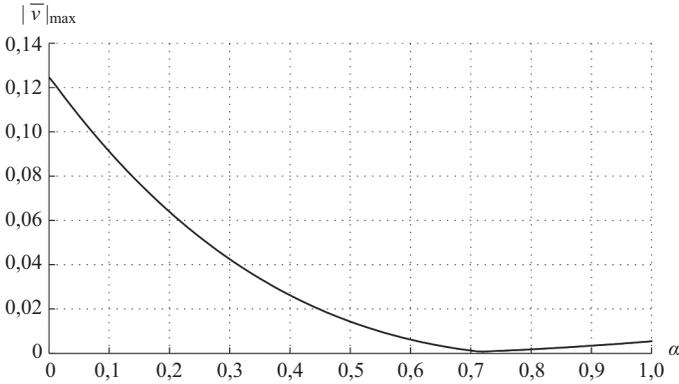


Рис. 3. Зависимость максимального прогиба от положения опоры

т. е. функция $f(z)$ строго возрастает. Поэтому при $\alpha < z < 1$ имеем $f(\alpha) < f(z) < f(1)$. Отсюда ясно, что функция $\bar{v}(z)$ будет иметь внутренний экстремум $z = z_3$ в этом диапазоне, если $f(\alpha) < 0$, а $f(1) > 0$, причем из возрастания функции $f(z)$ следует, что этот экстремум единственный. Разрешая эти уравнения, получим

$$0,717 \approx \frac{6 - \sqrt{6}}{5} < \alpha < \alpha_0 \approx 0,747,$$

где α_0 — корень кубического уравнения $3\alpha^3 - 12\alpha^2 + 18\alpha - 8 = 0$.

Теперь посредством выражений (4) и (5) можно для любого значения α из промежутка $0 \leq \alpha \leq 1$ определить максимальный прогиб $|\bar{v}|_{\max}$. Ясно, что для этого нужно при каждом значении α сравнить значения $|\bar{v}(z)|$ в точке $z = z_2$ и концевой точке $z = 1$, а также в точках $z = z_1$ и $z = z_3$, если они существуют. Компьютерное исследование в программе MATLAB показывает, что график зависимости $|\bar{v}|_{\max}(\alpha)$ имеет внутренний минимум при $\alpha = \alpha_*$ (рис. 3).

При $0 < \alpha < \alpha_*$ максимальный прогиб достигается на свободном конце балки $z = 1$, а при $\alpha_* < \alpha < 1$ максимальный прогиб достигается в точке $z = z_1$. Таким образом, выражение для $|\bar{v}|_{\max}(\alpha)$ имеет

вид:

$$|\bar{v}|_{\max} = \frac{1}{24} \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \alpha) [6(1 - \alpha)^2 - \alpha^3], & 0 < \alpha < \alpha_*, \\ z_1^2 (z_1^2 + A_1 z_1 + B_1), & \alpha_* < \alpha < 1, \end{cases} \quad (8)$$

где выражения для констант через α имеют вид (5), а величина z_1 определяется через них согласно (6). Конкретное значение α_* можно определить, приравнявая друг другу два выражения в (8) — в этой точке прогибы при $z = z_1$ и $z = 1$ одинаковы. Решая полученное уравнение при помощи численных методов, находим, что $\alpha_* = 0,715$.

Представляет интерес сравнить максимальный прогиб \bar{v}_* при постановке опоры в оптимальную точку $\alpha = \alpha_*$ с максимальным прогибом \bar{v}_l при постановке опоры на правый конец $\alpha = 1$ и максимальным прогибом \bar{v}_0 при отсутствии опоры, т. е. для консольной балки. Ясно, что последняя из этих ситуаций фактически реализуется при $\alpha \rightarrow 0$, т. е. при приближении опоры к заделке. Поэтому все эти значения можно взять непосредственно из (8):

$$\bar{v}_* = 7,233 \cdot 10^{-4}, \quad \bar{v}_l = 5,416 \cdot 10^{-3}, \quad \bar{v}_0 = 1,25 \cdot 10^{-1}.$$

Отсюда видно, что $\bar{v}_l/\bar{v}_* = 7,49$, $\bar{v}_0/\bar{v}_* = 172,3$. Таким образом, установка опоры в оптимальную точку позволяет снизить максимальный прогиб балки более чем в 170 раз. По сравнению же с установкой опоры на правый конец оптимальное ее размещение снижает максимальный прогиб почти в 7,5 раза.

Рассмотренный критерий, основанный на минимизации максимального прогиба, является геометрическим. Представляет интерес рассмотреть и силовой критерий, приняв в его качестве минимизацию $|M|_{\max}$. Этот критерий также является минимаксным. Согласно (4) и дифференциальной связи $M = EJv''$, можно записать выражение для безразмерного изгибающего момента $\bar{M} = M/ql^2$:

$$\bar{M}(z) = \frac{1}{12} \begin{cases} 6z^2 + 3A_1z + B_1, & 0 \leq z \leq \alpha, \\ 6(z - \alpha)^2 + 3A_2(z - \alpha) + B_2, & \alpha \leq z \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Проанализируем это выражение. Ясно, что на первом участке может существовать внутренний экстремум, равный $z_1 = -A_1/4$,

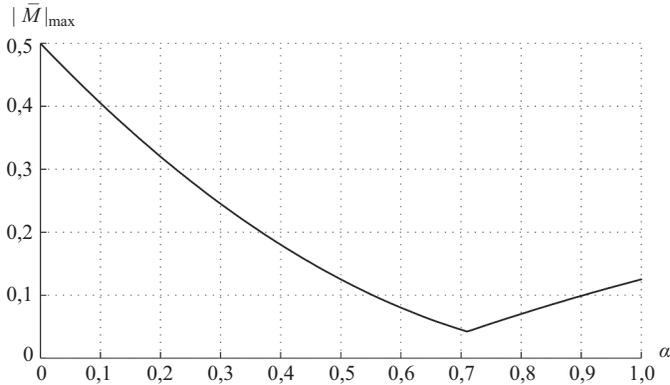


Рис. 4. Зависимость максимального момента от положения опоры

причем исходя из требования $0 < z_1 < \alpha$ он имеет место при $0,523 \approx 6 - \sqrt{30} < \alpha < 1$. Что же касается второго участка, то точка минимума $\overline{M}(z)$ достигается здесь на свободном конце $z = 1$, на котором момент равен нулю. Остается проанализировать изменение момента при переходе через точку опоры $z = \alpha$. Нетрудно вычислить в этой точке односторонние производные от (9), которые в силу разрыва перерезывающей силы будут различными:

$$\frac{d\overline{M}}{dz}(\alpha - 0) = \frac{3}{8\alpha} [2(1 - \alpha)^2 + \alpha^2] > 0, \quad \frac{d\overline{M}}{dz}(\alpha + 0) = -3(1 - \alpha) < 0,$$

откуда видно, что эти производные имеют разные знаки при любом α . Это значит, что в точке $z = \alpha$ функция $\overline{M}(z)$ имеет зубцовый максимум. Поэтому при поиске максимального изгибающего момента для каждого α следует сравнивать его значения в заделке $z = 0$, во внутренней точке $z = z_1$, если она существует, а также в точке $z = \alpha$. Компьютерное исследование показывает, что график зависимости $|\overline{M}|_{\max}(\alpha)$ имеет вид, показанный на рис. 4, и он также имеет внутренний минимум при некотором значении $\alpha = \alpha_*$. При $0 < \alpha < \alpha_*$ максимальный момент достигается в точке дополнительной опоры $z = \alpha$, а при $\alpha_* < \alpha < 1$ он достигается в заделке

$z = 0$. Таким образом, выражение для $|\overline{M}|_{\max}(\alpha)$ имеет вид:

$$|\overline{M}|_{\max} = \frac{1}{24} \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2, & 0 < \alpha < \alpha_*, \\ \frac{1}{8} [\alpha^2 - 2(1 - \alpha)^2], & \alpha_* < \alpha < 1. \end{cases} \quad (10)$$

Конкретное значение α_* в этом случае также можно определить, приравняв друг другу два выражения в (10). Получившееся при этом уравнение легко решается и имеет корень

$$\alpha_* = (6 - \sqrt{6})/5 \approx 0,710.$$

Интересно отметить, что это значение практически не отличается от полученного при минимизации максимального прогиба.

Сравним также максимальный момент \overline{M}_* при постановке опоры в оптимальную точку $\alpha = \alpha_*$ с максимальным моментом \overline{M}_l при постановке опоры на правый конец $\alpha = 1$ и максимальным моментом \overline{M}_0 при отсутствии опоры:

$$\overline{M}_* = 4,205 \cdot 10^{-2}, \quad \overline{M}_l = 1,25 \cdot 10^{-1}, \quad \overline{M}_0 = 5,0 \cdot 10^{-1}.$$

Видно, что $\overline{M}_l/\overline{M}_* = 2,97$, $\overline{M}_0/\overline{M}_* = 11,89$. Поэтому установка опоры в оптимальную точку снижает максимальный момент балки почти в 12 раз, а оптимальное ее размещение (по сравнению с установкой опоры на правый конец) снижает максимальный прогиб почти в 3 раза. И хотя эти значения существенно меньше, чем в первом критерии, тем не менее имеет место значительное снижение и максимального момента.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОРЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПРОДОЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Рассмотрим теперь случай, когда на балку действуют продольная нагрузка. Если продольная сила P сосредоточена (рис. 5), то уравнение равновесия имеет вид [8, 9]:

$$EJv^{IV} + Pv'' = 0. \quad (11)$$

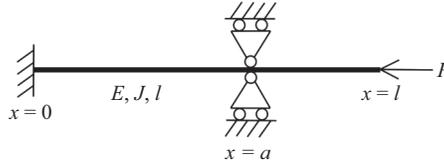


Рис. 5. Балка с сосредоточенной продольной силой

Решение уравнения (11) можно представить в виде [11, 12]

$$v(z) = \begin{cases} A_1 \sin \lambda z + B_1 \cos \lambda z + C_1 z + D_1, & 0 \leq z \leq \alpha, \\ A_2 \sin \lambda z + B_2 \cos \lambda z + C_2 z + D_2, & \alpha \leq z \leq 1, \end{cases} \quad (12)$$

где, как и прежде, $z = x/l$, а безразмерный параметр λ определяется по формуле $\lambda^2 = Pl^2/EJ$. Граничные условия и условия сопряжения сохраняют вид (2) и (3), как и выражения $\theta = v'$ и $M = EJv''$, однако теперь $Q = EJv''' + Pv'$ [10]. Удовлетворяя решение (12) этим условиям, получим систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных констант:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 + D_1 = 0, \\ A_1 \lambda + C_1 = 0, \\ A_2 \sin \lambda(1 - \alpha) + B_2 \cos \lambda(1 - \alpha) = 0, \\ C_2 = 0, \\ A_1 \sin \lambda \alpha + B_1 \cos \lambda \alpha + C_1 \alpha + D_1 = 0, \\ B_2 + D_2 = 0, \\ A_1 \lambda \cos \lambda \alpha - B_1 \lambda \sin \lambda \alpha + C_1 = A_2 \lambda, \\ A_1 \sin \lambda \alpha + B_1 \cos \lambda \alpha = B_2. \end{array} \right.$$

Эту систему легко свести к более простой системе двух уравнений относительно A_1 и B_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 [\sin \lambda - \sin \lambda(1 - \alpha)] + B_1 \cos \lambda = 0, \\ A_1 (\sin \lambda \alpha - \lambda \alpha) + B_1 (\cos \lambda \alpha - 1) = 0. \end{array} \right.$$

Существование нетривиального решения этой системы определяется равенством нулю ее определителя. Это требование приводит к характеристическому уравнению

$$(2 - \cos \lambda \alpha) \sin \lambda(1 - \alpha) - \sin \lambda + \lambda \alpha \cos \lambda = 0. \quad (13)$$

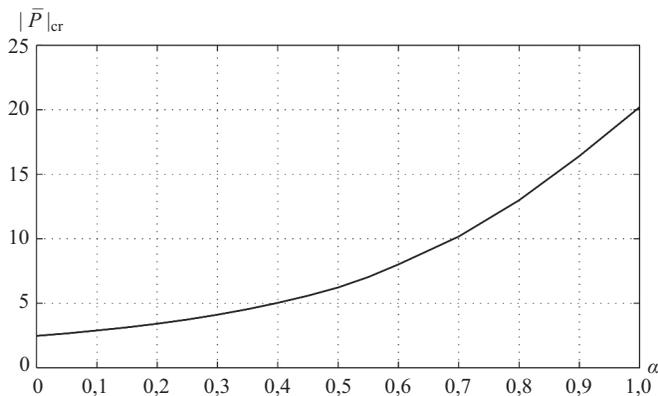


Рис. 6. Зависимость критической силы от положения опоры

Решая полученное трансцендентное уравнение при помощи численных методов, можно определить его первый положительный корень при каждом значении α из диапазона $0 \leq \alpha \leq 1$. Ясно, что этот корень $\lambda_{\text{кр}}$ соответствует критической силе, при которой теряется устойчивость балки. Построим график зависимости безразмерной критической силы

$$\bar{P}_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{EJ/l^2} = \lambda_{\text{кр}}^2$$

от параметра α (рис. 6).

Из построенного графика видно, что он не имеет внутренних экстремумов на промежутке $0 < \alpha < 1$ и его максимум $\bar{P}_{\text{кр}}(\alpha)$ достигается на правом конце этого промежутка при $\alpha_* = 1$, т. е. при постановке опоры на правый конец. В этом случае безразмерная критическая сила при постановке опоры в оптимальную точку и при отсутствии опоры будет соответственно равна

$$\bar{P}_{\text{кр}*} = \bar{P}_{\text{кр}l} = 20,2, \quad \bar{P}_{\text{кр}0} = 2,47.$$

Отсюда видно, что $\bar{P}_{\text{кр}*}/\bar{P}_{\text{кр}0} = 8,18$, т. е. при оптимальном размещении шарнирной опоры критическая сила увеличивается более чем в 8 раз.

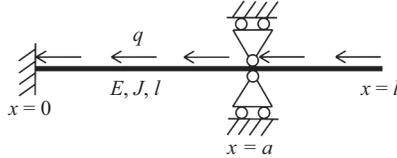


Рис. 7. Балка с распределенной продольной нагрузкой

В заключение рассмотрим наиболее интересную задачу, когда продольная сила, действующая на балку, равномерно распределена по ее длине с интенсивностью q (рис. 7).

Уравнение равновесия этой системы имеет вид [13, 14]

$$EJv^{IV} + [q(l-x)v']' = 0, \quad (14)$$

и, как видно, оно является линейным, но имеет переменные коэффициенты. Интегрируя уравнение (14) 1 раз, находим

$$EJv''' + q(l-x)v' = N, \quad (15)$$

где $N = \text{const}$ — константа интегрирования. Для решения уравнения (15) сделаем замену переменной, перейдя к новой безразмерной переменной z по формуле [13]

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EJ}} (l-x)^3. \quad (16)$$

Выразим производные от v по координате x через производные по z , принимая во внимание (16):

$$\begin{aligned} v' &= - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{q}{EJ}\right)^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} \frac{dv}{dz}, \\ v'' &= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{q}{EJ}\right)^{\frac{2}{3}} \left(z^{\frac{2}{3}} \frac{d^2v}{dz^2} + \frac{1}{3} z^{-\frac{1}{3}} \frac{dv}{dz} \right), \\ v''' &= -\frac{3}{2} \frac{q}{EJ} \left(z \frac{d^3v}{dz^3} + \frac{d^2v}{dz^2} - \frac{1}{9z} \frac{dv}{dz} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя теперь соотношения (17) в уравнение (15), после преобразований приходим к неоднородному уравнению Бесселя порядка $\frac{1}{3}$ относительно $y = dv/dz$:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right) y = \frac{C}{z}, \quad C = -\frac{2N}{3q}. \quad (18)$$

Общим решением однородного уравнения, соответствующего (14), являются функции Бесселя $J_{\frac{1}{3}}(z)$ и $J_{-\frac{1}{3}}(z)$ [15]. Что касается частного решения, соответствующего неоднородному уравнению, то его легко найти по методу вариации произвольных постоянных и представляет собой функцию Ломмеля [16]:

$$S_{0, \frac{1}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(J_{\frac{1}{3}}(z) \int_0^z J_{-\frac{1}{3}}(s) ds - J_{-\frac{1}{3}}(z) \int_0^z J_{\frac{1}{3}}(s) ds \right).$$

Как и функции Бесселя, функцию Ломмеля можно представить в виде бесконечного ряда [17]. Таким образом, общее решение уравнения (18) имеет вид

$$y = \frac{dv}{dz} = AJ_{\frac{1}{3}}(z) + BJ_{-\frac{1}{3}}(z) + CS_{0, \frac{1}{3}}(z). \quad (19)$$

Интегрируя (19) и записывая решение отдельно для каждого участка, получаем окончательно

$$v(z) = \begin{cases} A_1 f(z) + B_1 g(z) + C_1 h(z) + D_1, & u_0 \leq z \leq u, \\ A_2 f(z) + B_2 g(z) + C_2 h(z) + D_2, & 0 \leq z \leq u_0, \end{cases} \quad (20)$$

где функции $f(z)$, $g(z)$ и $h(z)$ определяются выражениями

$$f(z) = \int_0^z J_{\frac{1}{3}}(s) ds, \quad g(z) = \int_0^z J_{-\frac{1}{3}}(s) ds, \quad h(z) = \int_0^z S_{0, \frac{1}{3}}(s) ds.$$

Здесь также введены безразмерные величины

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EJ}} l^3, \quad \alpha = \frac{a}{l}$$

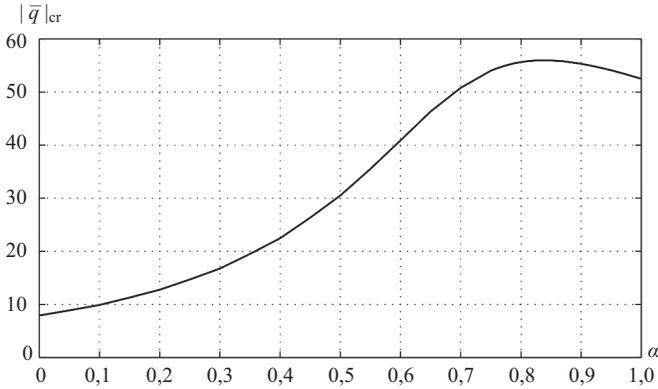


Рис. 8. Зависимость критической нагрузки от положения опоры

и учтено, что значению $x = 0$ соответствует $z = u$, значению $x = a$ соответствует $z = u_0 = u(1 - \alpha)^{\frac{3}{2}}$, а значению $x = l$ соответствует $z = 0$.

Остается удовлетворить граничным условиям (2) и условиям сопряжения (3), учитывая, что теперь перерезывающая сила есть $Q = EJv''' + q(l - x)v'$ [18]. Используя (17), (19) и (20), эти условия нетрудно переписать и для производных по переменной z , после чего прийти к системе линейных однородных уравнений относительно неизвестных констант:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 f(u) + B_1 g(u) + C_1 h(u) + D_1 = 0, \\ A_1 J_{\frac{1}{3}}(u) + B_1 J_{-\frac{1}{3}}(u) + C_1 S_{0, \frac{1}{3}}(u) = 0, \\ A_2 = 0, \\ C_2 = 0, \\ A_1 f(u_0) + B_1 g(u_0) + C_1 h(u_0) + D_1 = 0, \\ B_2 g(u_0) + D_2 = 0, \\ A_1 J_{\frac{1}{3}}(u_0) + B_1 J_{-\frac{1}{3}}(u_0) + C_1 S_{0, \frac{1}{3}}(u_0) = B_2 J_{-\frac{1}{3}}(u_0), \\ A_1 J'_{\frac{1}{3}}(u_0) + B_1 J'_{-\frac{1}{3}}(u_0) + C_1 S'_{0, \frac{1}{3}}(u_0) = B_2 J'_{-\frac{1}{3}}(u_0). \end{array} \right.$$

Для существования нетривиального решения определитель этой системы, как и ранее, должен обращаться в нуль.

Определяя его первый корень u_{cr} в зависимости от α , построим график зависимости безразмерной критической нагрузки

$$\bar{q}_{cr} = \frac{q_{cr}}{EJ/l^3} = \frac{9}{4}u_{cr}^2$$

от этого параметра (рис. 8), из которого видно, что существует внутренний максимум зависимости $\bar{q}_{cr}(\alpha)$, достигающийся при $\alpha_* = 0,835$. В этом случае безразмерная критическая нагрузка при постановке опоры в оптимальную точку, а также при ее размещении на свободном конце балки и при ее отсутствии принимают значения соответственно

$$\bar{q}_{cr*} = 55,98, \quad \bar{q}_{crl} = 52,50, \quad \bar{q}_{cr0} = 7,91. \quad (21)$$

Отсюда видно, что $\bar{q}_{cr*}/\bar{q}_{crl} = 1,07$, $\bar{q}_{cr*}/\bar{q}_{cr0} = 7,08$. Поэтому при установке опоры в оптимальную точку критическая сила увеличивается почти в 7 раз. По сравнению же с установкой опоры на правый конец оптимальное ее размещение незначительно увеличивает критическую нагрузку — всего на 7%. Тем не менее здесь внутренний экстремум существует, хотя его ценность не столь велика, как в задаче с распределенной поперечной нагрузкой.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из результатов проведенного исследования можно заключить, что при действии на консольную балку продольных и поперечных сосредоточенных нагрузок оптимальным положением дополнительной шарнирной опоры будет правый конец балки, соответствующий значению $\alpha_* = 1$. Однако при действии продольных и поперечных распределенных нагрузок отчетливо проявляется существование внутреннего экстремума, когда опору целесообразно размещать внутри консоли, а не на ее свободном конце. Так, в случае поперечной нагрузки оптимальному расположению опоры соответствуют значения $\alpha_* = 0,710$ или $\alpha_* = 0,715$ в зависимости от выбора критерия качества. В случае продольной нагрузки оптимальным будет значение $\alpha_* = 0,835$. При этом в результате установки опоры в оптимальную точку заметно снижаются максимальные значения прогиба и момента или значительно возрастает критическая сила, что и является целью оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ольков Я. И., Холопов И. С.* Оптимальное проектирование металлических предварительно напряженных ферм. М.: Стройиздат, 1985. 155 с.
2. *Радциг Ю. А.* Статически неопределимые фермы наименьшего веса. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1969. 287 с.
3. *Сейранян А. П.* Оптимальное проектирование балок при ограничении по прогибам // Известия АН Арм. ССР. Механика. 1976. № 6. С. 24–33.
4. *Сейранян А. П.* Упругие пластины и балки минимального веса при наличии нескольких видов изгибающих нагрузок // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1973. № 5. С. 95–101.
5. *Гольдштейн Ю. Б., Соломещ М. А.* Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 208 с.
6. *Баннчук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
7. Прочность, устойчивость, колебания. В 3 т. Т. 1 / под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.
8. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 442 с.
9. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
10. Прочность, устойчивость, колебания. В 3 т. Т. 3 / под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
11. *Меркин Д. Р., Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Смольников Б. А.* Теория устойчивости в примерах и задачах. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 208 с.
12. *Рясницын А. Р.* Теория составных стержней строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1948. 192 с.
13. *Динник А. Н.* Устойчивость упругих систем. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 183 с.
14. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
15. *Гаврилов В. С., Денисова Н. А., Калинин А. В.* Функции Бесселя в задачах математической физики: учеб.-метод. пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородск. ун-та, 2014. 40 с.
16. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
17. *Корнев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 287 с.
18. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.

ДЕФОРМАЦИЯ ОТРАЖАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ОПТИЧЕСКОГО ЗЕРКАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

С. М. БАУЭР, В. Е. ВЕЛИЧКО

Рассматривается задача изгиба пластины переменной толщины, расположенной на точечных опорах и находящейся под действием собственного веса. Задача решается с применением теории пластин Тимошенко — Рейсснера и теории оболочек средней толщины Палия — Спиро. Данная задача применяется для описания напряженно-деформированного состояния главных зеркал больших оптических телескопов, находящихся под действием собственного веса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Зеркала оптических телескопов чувствительны к незначительным отклонениям от первоначально заданной формы отражающей поверхности. Это может происходить из-за их деформации под действием собственного веса и температуры. Оптические приборы имеют различные допуски на отклонение рабочих поверхностей с учетом их формы, расположения и назначения [1]. Отклонения отражающей поверхности зеркала обычно характеризуют двумя величинами: 1) размахом (PV) и 2) среднеквадратическим отклонением (RMS) волнового фронта. PV представляет собой разницу между максимумом и минимумом оптического пути волнового фронта. С поперечным перемещением отражающей поверхности w она связана следующей формулой [2]:

$$PV = 2 (\max w - \min w), \quad (1)$$

RMS — более общее понятие измерения отклонения волнового фронта. Оно позволяет учитывать отклонение всей поверхности:

$$RMS = 2 \sqrt{\frac{1}{S} \iint_S w^2 dS}, \quad (2)$$

Часто оптическое качество поверхности определяют по критерию Рэлея, согласно которому должны выполняться следующие ограничения:

$$PV < \frac{\lambda}{4}, \quad RMS < \frac{\lambda}{14},$$

где λ — длина волны излучения [1]. Из-за того что длина волны оптического диапазона — порядка 1 мкм, этот критерий становится жестким ограничением на отклонение оптической поверхности от изначально заданного положения.

Чтобы уменьшить влияние температурного расширения и силы тяжести на оптическую поверхность зеркал, используют точечные опоры, сила реакции которых прикладывается нормально к поверхности, не участвующей в приеме излучения. Обычно это задняя поверхность зеркала. Само зеркало представляет собой пластину переменной толщины, причем средняя поверхность пластины не плоская, и пластина не симметрична относительно этой поверхности. Чтобы обеспечить достаточную жесткость, изготавливают пластину большой толщины, и поэтому зеркало, как правило, нельзя рассматривать как тонкую пластину. Отношение толщины зеркала к его диаметру h/D для больших зеркал (диаметром порядка 1 м и более) обычно изменяется от $\frac{1}{20}$ до $\frac{1}{3}$. Следовательно, зеркало можно рассматривать как пластину средней толщины [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим сплошное зеркало переменной толщины, расположенное на трех точечных опорах (рис. 1). Сила тяжести направлена параллельно оси зеркала z . Температурные деформации в зеркале не рассматриваются. Наружный диаметр зеркала — 1 м, внутренний — 0,2 м. Высота нижней и верхней части профиля зеркала — 0,2 и 0,3 м соответственно. Получается, что отношение максимальной толщины пластины к диаметру равно 0,3. Изменение толщины пластины задано по ближайшему параболоиду. Задняя поверхность — плоская и является поверхностью приведения (ПП) пластины. На ней и расположены точечные опоры, расстояние от которых до центра r_{sup} выбирается так, чтобы PV и RMS были минимальны. Криволинейную отражающую поверхность зеркала, на которой важны

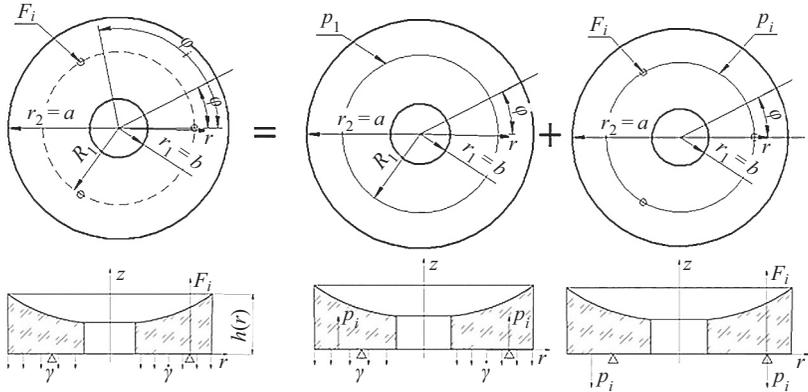


Рис. 1. Кольцевая пластина переменной толщины и прикладываемые к ней внешние нагрузки.

Разделение задачи на осесимметричную и циклично-симметричную

значения поперечных перемещений, будем называть лицевой поверхностью. Материал, из которого изготовлено зеркало — Zerodur. Он изотропен и имеет модуль Юнга $E = 9,1 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,24$ и плотность $\rho = 2530$ кг/м³ [3].

Для удобства решения задача разбивается на две.

Первая — осесимметричная задача для кольцевой пластины, к которой прикладываются нагрузка, распределенная по ПП, имитирующая силу тяжести, и противоположная ей нагрузка, распределенная по кольцу, где были расположены точечные опоры. Интегральные значения каждой из нагрузок дают вес пластины:

$$q(r, \varphi) = q(r) = -\gamma + p_0 \delta(r - r_s), \quad (3)$$

где распределенные нагрузки по поверхности и кольцу соответственно равны

$$\gamma(r) = \rho h(r)g, \quad p_0 = \frac{\iint_S \gamma(r) dS}{2\pi r_s}. \quad (4)$$

Вторая — циклично-симметричная задача для кольцевой пластины, в которой сохраняются точечные усилия, имитирующие опо-

ры, а вместо силы тяжести прикладывается та же самая по значению распределенная нагрузка, что и в первой задаче, но уже направленная вдоль оси вращения пластины:

$$q(r, \varphi) = q(r) = -p_0 \delta(r - r_s) + \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{r_s} \delta(r - r_s, \varphi - \varphi_s), \quad (5)$$

где n — число опор, а на каждую опору действует сосредоточенная сила

$$F_i = \frac{\iint_S \gamma(r) dS}{n}. \quad (6)$$

В сумме решения первой и второй задач дают полное решение основной задачи (рис. 1).

3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИЙ ТИМОШЕНКО — РЕЙССНЕРА И ПАЛИЯ — СПИРО

Обозначения сил, моментов, перемещений и углов поворота поверхности приведения пластины приведены на рис. 2. Решение ищется в виде разложения в ряд Фурье по следующим формулам [2]:

$$Q(r, \varphi) = \sum_n \left[Q_n^{(1)}(r) \sin n\varphi + Q_n^{(2)}(r) \cos n\varphi \right]$$

для $q, T_1, T_2, N_1, M_1, M_2, u, w, \vartheta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varkappa_1, \varkappa_2,$

$$Q(r, \varphi) = \sum_n \left[Q_n^{(1)}(r) \cos n\varphi - Q_n^{(2)}(r) \sin n\varphi \right]$$

для $T_{12}, N_2, M_{12}, v, \psi, \omega_1, \omega_2, \tau_1, \tau_2.$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varkappa_1, \varkappa_2, \omega_1, \omega_2, \tau_1, \tau_2.$ — деформации и кривизны ПП пластины.

Будем рассматривать задачу в общей анизотропной постановке. Примем, что $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}, G_{12}, G_{23}, G_{31}$ — модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига в различных направлениях. Для решения используются две неклассические теории пластин: теория пластин Тимошенко — Рейсснера (ТР) и теория оболочек средней толщины Палия — Спиро (ПС).

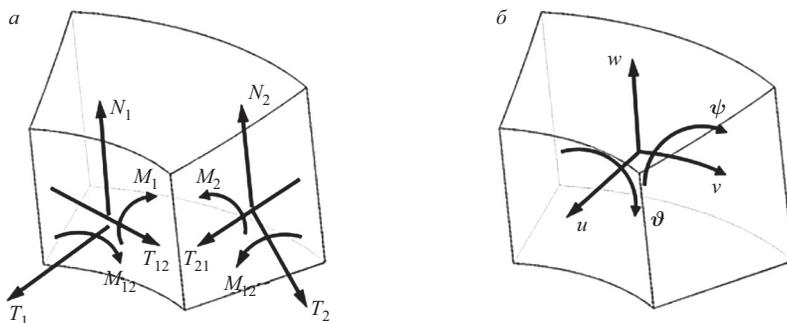


Рис. 2. Принятые обозначения: силы и моменты (а), перемещения и углы поворотов на ПП (б)

Теория ТР основана на следующих гипотезах [4]:

- прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее поверхности приведения до деформации, остаются после деформации также прямолинейными;
- длина прямолинейного волокна оболочки не изменяется;
- напряжения обжатия по толщине σ_{33} малы, и ими можно пренебречь.

Математическая формулировка этих гипотез сводится к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} u^* &= u + z\vartheta, & v^* &= v + z\psi, & w^* &= w, \\ \vartheta &= \vartheta_0 + \gamma_1, & \psi &= \psi_0 + \gamma_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Теория ПС основана на следующих гипотезах [5]:

- как и в теории Тимошенко — Рейсснера, предполагается, что прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее ПП до деформации, остаются после деформации также прямолинейными;
- учитывается изменение длины прямолинейного волокна оболочки;
- напряжения обжатия по толщине σ_{33} изменяются по линейному закону.

Математическая формулировка этих гипотез сводится к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} u^* &= u + z\vartheta, & v^* &= v + z\psi, & w^* &= w + F(z), \\ \vartheta &= \vartheta_0 + \gamma_1, & \psi &= \psi_0 + \gamma_2. \end{aligned} \quad (8)$$

где $F(z)$ — функция, характеризующая изменение прогиба по толщине оболочки с учетом σ_{33} :

$$F(z) = \int_0^z \frac{\sigma_{33}}{E_{33}^*} dz - (\mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2)z - (\mu_1 \varkappa_1 + \mu_2 \varkappa_2) \frac{z^2}{2}, \quad (9)$$

где

$$\mu_1 = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \mu_2 = \frac{\nu_{32} + \nu_{21}\nu_{31}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{33}^* = \frac{E_3}{1 - \mu_1\nu_{13} - \mu_2\nu_{23}}.$$

Как видно, различие гипотез в теориях ПС и ТР сводится к учету напряжений σ_{33} и изменению длины прямолинейного элемента. Это позволяет находить поперечные перемещения не только на поверхности приведения, но также и на искривленной поверхности пластины, которая является отражающей поверхностью зеркала. В теории ТР поперечные перемещения равны между собой по всей толщине пластины.

Применение теории ТР к расчету зеркал оптических телескопов дано в монографии [6] и используется авторами в настоящей статье. Приведенные уравнения теории ПС для пластины получены по работе [5].

Путем разложения в ряд Фурье системы уравнений теорий ТР и ПС сводятся к $n + 1$ системам обыкновенных дифференциальных уравнений 10-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{dQ_i}{dr} = \sum_{f=1}^5 a_{if} u_f + \sum_{g=1}^5 b_{ig}^* Q_g + a_{i0}, & i = 1, 2, 3, 4, 5, \\ \frac{du_j}{dr} = \sum_{f=1}^5 a_{jf}^* u_f + \sum_{g=1}^5 b_{jg} Q_g + b_{j0}, & j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases} \quad (10)$$

Таблица 1. Неизвестные в системе (10)

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
T_1	T_{12}	N_1	M_1	M_{12}	u	v	w	ϑ	ψ

Список неизвестных, используемых в системе уравнений (10), приведен в табл. 1.

Различие систем уравнений теории ТР и ПС состоит в коэффициентах a_{if} , b_{ig}^* , a_{i0} , a_{jf}^* , b_{jg} , b_{j0} , значения которых для

Таблица 2. Значение свободных коэффициентов a_{i0} и b_{j0} из системы уравнений (10) в теориях ТР и ПС

a_{i0}^*		
i	Теория ТР	Теория ПС
1	0	$\frac{(E_{11}\mu_2 - E_{12}\mu_1)(h_1q_3^+ - h_2q_3^-)}{E_{11}r}$
2	0	$-\frac{n(E_{11}\mu_2 - E_{12}\mu_1)(h_1q_3^+ - h_2q_3^-)}{E_{11}r}$
3	$q_3^- - q_3^+$	$q_3^- - q_3^+$
4	0	$\frac{(E_{11}\mu_2 - E_{12}\mu_1)(h_1^2q_3^+ + h_2^2q_3^-)}{2E_{11}r}$
5	0	$-\frac{n(E_{11}\mu_2 - E_{12}\mu_1)(h_1^2q_3^+ + h_2^2q_3^-)}{2E_{11}r}$
b_{j0}^*		
j	Теория ТР	Теория ПС
1	0	$\frac{\mu_1(-h_1^3q_3^+ + h_1^2h_2(q_3^+ + 4q_3^-) + h_2^2(-4h_1q_3^+ + (h_2 - h_1)q_3^-))}{E_{11}(h_1 + h_2)^3}$
2	0	0
3	0	0
4	0	$-\frac{6\mu_1h_1h_2(q_3^+ + q_3^-)}{E_{11}(h_1 + h_2)^3}$
5	0	0

Таблица 3. Значения коэффициентов $a_{i,f}$ и $b_{i,g}^*$ из системы уравнений (10) в теории ПС

		$a_{i,f}$				
		f				
i		1	2	3	4	5
1		$\frac{(E_{12} - E_{11})}{E_{11}r}$	$\frac{n}{r}$	0	0	0
2		$-\frac{E_{12}n}{E_{11}r}$	$-\frac{2}{r}$	0	0	0
3		0	0	$-\frac{1}{r}$	0	0
4		0	0	1	$\frac{E_{12} - E_{11}}{E_{11}r}$	$\frac{n}{r}$
5		0	0	0	$-\frac{E_{12}n}{E_{11}r}$	$-\frac{2}{r}$
		$b_{i,g}^*$				
		g				
i		1	2	3	4	5
1		$\frac{(E_{11}E_{22} - E_{12}^2)(h_1 + h_2)}{E_{11}r^2}$	$\frac{(E_{12}^2 - E_{11}E_{22})(h_1 + h_2)n}{E_{11}r^2}$	0	$\frac{(E_{11}E_{22} - E_{12}^2)(h_1^2 - h_2^2)}{2E_{11}r^2}$	$\frac{(E_{12} - E_{11}E_{22})(h_1^2 - h_2^2)}{2E_{11}r^2}$
2		$\frac{(E_{12}^2 - E_{11}E_{22})(h_1 + h_2)n}{E_{11}r^2}$	$\frac{(E_{11}E_{22} - E_{12}^2)(h_1 + h_2)n^2}{E_{11}r^2}$	0	$\frac{(E_{12} - E_{11}E_{22})(h_1^2 - h_2^2)}{2E_{11}r^2}$	$\frac{(E_{11}E_{22} - E_{12}^2)n^2}{2E_{11}r^2}$
3		0	0	$\frac{G_{23}(h_1 + h_2)n^2}{r^2}$	0	$\frac{G_{23}(h_1 + h_2)n}{r}$
4		$\frac{(E_{11}E_{22} - E_{12}^2)(h_1^2 - h_2^2)}{2E_{11}r^2}$	$\frac{(E_{12} - E_{11}E_{22})(h_1^2 - h_2^2)n}{2E_{11}r^2}$	0	$\frac{(E_{11}E_{22} - E_{12}^2)(h_1^3 + h_2^3)}{3E_{11}r^2}$	$\frac{(E_{12} - E_{11}E_{22})(h_1^3 + h_2^3)n}{3E_{11}r^2}$
5		$\frac{(E_{12}^2 - E_{11}E_{22})(h_1^2 - h_2^2)n}{2E_{11}r^2}$	$\frac{(E_{11}E_{22} - E_{12}^2)(h_1^2 - h_2^2)n^2}{2E_{11}r^2}$	$\frac{G_{23}(h_1 + h_2)n}{r}$	$\frac{(E_{12}^2 - E_{11}E_{22})(h_1^3 + h_2^3)n}{3E_{11}r^2}$	$\frac{(E_{11}E_{22} - E_{12}^2)(h_1^3 + h_2^3)n^2}{3E_{11}r^2} + G_{23}(h_1 + h_2)$

Таблица 4. Значения коэффициентов a_{jf}^* и b_{jg} из системы уравнений (10) в теории ПС

a_{jf}^*					
j	f				
	1	2	3	4	5
1	$\frac{4(h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)}{E_{11}(h_1 + h_2)^3}$	0	0	$-\frac{6(h_1 - h_2)}{E_{11}(h_1 + h_2)^3}$	0
2	0	$\frac{4(h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)}{G_{12}(h_1 + h_2)^3}$	0	0	$-\frac{3(h_1 - h_2)}{G_{12}(h_1 + h_2)^3}$
3	0	0	$\frac{1}{G_{13}(h_1 + h_2)}$	0	0
4	$-\frac{6(h_1 - h_2)}{E_{11}(h_1 + h_2)^3}$	0	0	$\frac{12}{E_{11}(h_1 + h_2)^3}$	0
5	0	$-\frac{3(h_1 - h_2)}{G_{12}(h_1 + h_2)^3}$	0	0	$\frac{3}{G_{12}(h_1 + h_2)^3}$
b_{jg}					
j	g				
	1	2	3	4	5
1	$-\frac{E_{12}}{E_{11}r}$	$\frac{E_{12}n}{E_{11}r}$	0	0	0
2	$-\frac{n}{r}$	$\frac{1}{r}$	0	0	0
3	0	0	0	-1	0
4	0	0	0	$-\frac{E_{12}}{E_{11}r}$	$\frac{E_{12}n}{E_{11}r}$
5	0	0	0	$-\frac{n}{r}$	$\frac{1}{r}$

теории ТР и ПС даны в табл. 2–6. Далее приведены принятые обозначения:

q_3^+ и q_3^- — приложение распределенной нагрузки к лицевой и к противоположной ей задней поверхности. Если к лицевой поверхности нагрузка не приложена, то $q_3^+ = 0$;

n — номер гармоники;

Таблица 5. Значения коэффициентов $a_{i,f}$ и $b'_{i,g}$ из системы уравнений (10) в теории ТР

		$a_{i,f}$				
		f				
i		1	2	3	4	5
1		$-\frac{1-\nu_{12}}{r}$	$-\frac{n}{r}$	0	0	0
2		$\frac{\nu_{12}n}{r}$	$-\frac{2}{r}$	0	0	0
3		0	$-\frac{n(-3z_p h' + h z'_p)}{6r h}$	$-\frac{1}{r}$	0	$-\frac{nh'}{2r h}$
4		0	0	1	$-\frac{1-\nu_{12}}{r}$	$-\frac{n}{r}$
5		0	$\frac{1}{6} \left(-\frac{3z_p h'}{h} + z'_p \right)$	0	$\frac{n\nu_{12}}{r}$	$-\frac{2}{r} + \frac{h'}{2h}$
		$b_{i,g}$				
		g				
j		1	2	3	4	5
1		$\frac{(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	$\frac{n(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h z_p}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	0	$\frac{(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h z_p}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	$\frac{n(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h z_p}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$
2		$\frac{n(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	$\frac{n^2(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	0	$\frac{n(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h z_p}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	$\frac{n^2(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h z_p}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$
3		0	0	$-\frac{5G_{23} n^2 h}{6r^2}$	0	$-\frac{5G_{23} n h}{6r}$
4		$\frac{(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h z_p}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	$\frac{n(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h z_p}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	0	$\frac{(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) (h^2 + 12z_p^2) h}{12r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	$\frac{n(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) (h^2 + 12z_p^2) h}{12r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$
5		$\frac{n(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h z_p}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	$\frac{n(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) h z_p}{r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	$-\frac{5G_{23} n h}{6r}$	$\frac{n(E_2 - E_1 \nu_{12}^2) (h^2 + 12z_p^2) h}{12r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$	$\frac{hn^2(E_1 \nu_{12}^2 - E_2) h^2}{12r^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})} + \frac{12r^2 (\nu_{12} \nu_{21} - 1)}{5h G_{23} r^2 (\nu_{12} \nu_{21} - 1)} - \frac{6r^2 (\nu_{12} \nu_{21} - 1)}{hn^2 (E_2 - E_1 \nu_{12}^2)^2} - \frac{2}{2r^2 (\nu_{12} \nu_{21} - 1)}$

Таблица 6. Значения коэффициентов a_{jf}^* и b_{jg} из системы уравнений (10) в теории ТР

a_{jf}^*					
j	f				
	1	2	3	4	5
1	$\frac{(1-\nu_{12}\nu_{21})(h^2+12z_p^2)}{E_1h^3}$	0	0	$-\frac{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1h^3}$	0
2	0	$\frac{h^2+12z_p^2}{G_{12}h^3}$	0	0	$-\frac{12z_p}{G_{12}h^3}$
3	$\frac{-3z_ph'+hz_p'}{5G_{13}h^2}$	0	$-\frac{6}{5G_{13}h}$	$\frac{3h'}{5G_{13}h^2}$	0
4	$-\frac{12z_p(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1h}$	0	0	$\frac{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1h^3}$	0
5	0	$-\frac{12z_p}{G_{12}h^3}$	0	0	$\frac{12}{G_{12}h^3}$
b_{jg}					
j	g				
	1	2	3	4	5
1	$-\frac{\nu_{12}}{r}$	$-\frac{n\nu_{12}}{r}$	0	0	0
2	$\frac{n}{r}$	$\frac{1}{r}$	0	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	$-\frac{\nu_{12}}{r}$	$-\frac{n\nu_{12}}{r}$
5	0	0	0	$\frac{n}{r}$	$\frac{1}{r}$

z_p — в теории ТР определяет положение ПП. Если эта поверхность совпадает с плоской задней поверхностью, то $z_p = 0$;

h_1 и h_2 — в теории ПС определяют нормальные расстояния от точек ПП до соответствующих точек лицевой и задней поверхностей. Если ПП совпадает с задней плоской поверхностью, то $h_2 = 0$;

$$E_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}.$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

При расчете учитывались первые 31 гармоники. Система уравнений (10) из-за неустойчивости решения при высоких значениях номера гармоники n решается методом ортогональной прогонки [2]. Результаты решения для различных радиусов расположения опор r_{sup} показаны в табл. 7.

Наиболее оптимальным считается случай, когда достигаются минимальные значения PV и σ . По теориям ТР и ПС, для дан-

Таблица 7. Значения среднеквадратического отклонения и размаха при различном расположении опор

$r_{sup}, \text{ м}$	Теория ТР		Теория ПС			
	Поверхность приведения		Поверхность приведения		Лицевая поверхность	
	$PV, \text{ м},$ $\times 10^{-7}$	$\sigma, \text{ м},$ $\times 10^{-7}$	$PV, \text{ м},$ $\times 10^{-7}$	$\sigma, \text{ м},$ $\times 10^{-7}$	$PV, \text{ м},$ $\times 10^{-7}$	$\sigma, \text{ м},$ $\times 10^{-7}$
0,1	6,313	4,366	6,045	4,188	5,622	4,895
0,2	2,730	1,863	2,531	1,757	2,389	1,989
0,32	1,333	1,323	1,212	1,267	0,427	1,225
0,4	2,177	1,721	2,074	1,675	1,327	1,574
0,49	4,572	3,805	4,138	3,397	3,859	3,327

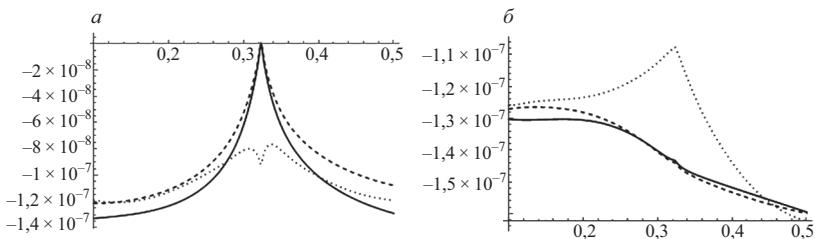


Рис. 3. Поперечные перемещения пластины в сечении, проходящей через опору (а), и в сечении, проходящем между опор (б)

ной пластины этот случай достигается, когда опоры расположены на радиусе $R_s = 0,32$ м.

Результат решения для радиуса расположения опор R_s приведен на рис. 3 и 4 (последний см. на цв. вкл.).

На рис. 3 показано решение системы уравнений (10) для теорий ТР и ПС на поверхности приведения и лицевой поверхности в сечениях, проходящих через опору ($\varphi = 0$) и между опор ($\varphi = \pi/3$). На рис. 4 (св. цв. вкл.) показаны перемещения по теориям ТР и ПС на лицевой поверхности пластины.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория оболочек средней толщины ПС и теория пластин ТР — это уточняющие теории, учитывающие поперечный сдвиг в пластинах. Но, в отличие от теории ТР, теория ПС учитывает также изменение поперечных перемещений по толщине пластины, а не только на поверхности приведения. Это важно для толстых пластин, в отношении которых необходимо знать поперечные перемещения точек поверхности, противоположной поверхности приложения силы. Частные случаи таких пластин — оптические зеркала. Различие между результатами теорий ТР и ПС для лицевой поверхности при оптимальном расположении опор достигает 8% в среднеквадратическом отклонении поперечных перемещений, а размах отклонения, т.е. разница между минимальным и максимальным поперечным перемещением, в теории ТР больше в 3 раза, чем в теории ПС. Эти параметры являются показателями оптического качества зеркал, поэтому для расчета деформации отражающей поверхности главных зеркал оптических телескопов предпочтительней применять теории, учитывающие изменение поперечного перемещения с толщиной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doyle K. B., Genberg V. L., Michels G. J. Integrated optomechanical analysis. Second Edition // SPIE Press. Bellingham, Washington, 2012.
2. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова думка, 1981.
3. Viens M. J. Fracture Toughness and Crack Growth of Zerodur // NASA Technical Memorandum. 1990. No. 4185. P. 30.

4. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973.
5. Палий О. М., Спино В. Е. Анизотропные оболочки в судостроении. Л.: Судостроение, 1977.
6. Бауэр С. М., Ковалев М. Б., Петров М. Б. и др. Расчет и оптимизация металлических зеркал телескопов / под ред. М. И. Улитина. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1997.

ПЕРЕВЕРНУТЫЙ n -ЗВЕННЫЙ МАЯТНИК НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ

И. М. АРХИПОВА

Из литературы известно, что перевернутый одно-, двух- и трехзвенный маятник в вертикальном положении можно стабилизировать за счет вибрации точки опоры достаточно большой частоты. Данная работа отвечает на вопрос, возможна ли стабилизация верхнего статически неустойчивого положения равновесия n -звенного маятника при низких, средних и высоких частотах возбуждения. Приведены амплитудно-частотные диаграммы в плоскости параметров вибрации для двойного и тройного перевернутого маятника, на которых показаны области стабилизации. Приведены результаты, полученные с помощью метода многих масштабов, а также путем численного анализа согласно теории Флоке.

Рассмотрим перевернутый n -звенный маятник, установленный на вертикально вибрирующем основании (рис. 1), который представляет собой конструкцию, состоящую из точечных масс m_i ($i = 1, 2, \dots, n$), соединенных невесомыми жесткими стержнями (каждый длиной l_i) с шарнирами жесткости c_i . Положение маятника определяется углами q_i отклонения стержней от вертикального положения.

Будем рассматривать малые движения маятника около верхнего неустойчивого положения $q_i = 0$. Тогда кинетическая и потенциальная энергии системы с точностью до малых второго порядка будут равны

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n l_j^2 \dot{q}_j^2 \sum_{k=j}^n m_k + 2 \sum_{i=1, j>i}^n l_i l_j \dot{q}_i \dot{q}_j \sum_{k=j}^n m_k \right), \\ \Pi &= \frac{1}{2} \left(q_1^2 c_1 + \sum_{j=2}^n (q_j - q_{j-1})^2 c_j - g \sum_{j=1}^n q_j^2 \sum_{k=j}^n m_k \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Точка подвеса маятника совершает принудительные вертикальные колебания $z = a \cos(\Omega_* t)$ с частотой Ω_* и амплитудой a ($a \ll l_i$).

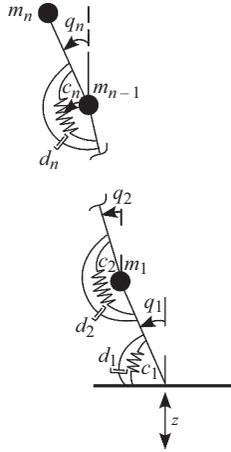


Рис. 1. Перевернутый n -звенный маятник с периодическим возмущением основания

Тогда, используя принцип Даламбера, следует заменить ускорение свободного падения g на $g - \ddot{z}$. Учтем еще силы вязкого трения в шарнирах, характеризуемые диссипативной функцией F с коэффициентами диссипации d_i :

$$F = \frac{1}{2} \left(\dot{q}_1^2 d_1 + \sum_{j=2}^n (\dot{q}_j - \dot{q}_{j-1})^2 d_j \right), \quad (2)$$

Для упрощения записи уравнений движения маятника рассмотрим случай равных коэффициентов $l_i = l$, $c_i = c$, $d_i = d$, в противном случае следует добавить $3(n - 1)$ коэффициентов, соответствующих отношению параметров l_i , c_i , d_i , например к l_n , c_n , d_n . После перехода к безразмерному времени $\tau = \sqrt{g/lt}$ и введения параметра $p = -c/(m_n g l)$ запишем безразмерные уравнения движения маятника в матричном виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \gamma \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}(p) + \delta \Omega^2 \cos \Omega t \mathbf{B}) \mathbf{q} = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q} &= \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i & 1 + \sum_{i=2}^{n-1} \eta_i & \dots & 1 \\ 1 + \sum_{i=2}^{n-1} \eta_i & 1 + \sum_{i=2}^{n-1} \eta_i & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \sum_{i=2}^{n-1} \eta_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} -2p - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i & p & \dots & 0 \\ p & -2p - 1 - \sum_{i=2}^{n-1} \eta_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -p - 1 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{4}$$

а безразмерные параметры имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned}
 \delta = \frac{a}{l}, \quad \Omega = \Omega_* \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \gamma = \frac{d}{m_n l^2} \sqrt{\frac{l}{g}}, \\
 \eta_i = \frac{m_i}{m_n} (i = 1, 2, \dots, n-1).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим автономную консервативную систему ($\delta = \gamma = 0$) и найдем критический параметр отрицательной жесткости p_0 таким образом, чтобы система была устойчива при $p < p_0$ и неустойчива при $p > p_0$. Система устойчива тогда и только тогда, когда матрица \mathbf{C} положительно определена. Чтобы определить параметр p_0 ,

можно воспользоваться критерием Сильвестра. В случае двойного маятника [3, 4]

$$p_0 = (\eta - 3 + \sqrt{\eta^2 + 2\eta + 5}) / (2\eta), \quad \eta = m_1 / m_2,$$

для тройного перевернутого маятника p_0 равен наименьшему корню уравнения [5]

$$\det(\mathbf{C}(p)) = 0.$$

При $p = p_0$ система будет иметь собственные частоты $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, причем $\omega_1 = 0$.

Пусть $p = p_0 + \Delta p$, где Δp — малое положительное число ($\Delta p > 0$). Тогда верхнее положение маятника при $(\delta = \gamma = 0)$ будет неустойчивым. Наша цель — подобрать такие параметры вибрации δ и Ω , которые стабилизируют данное положение.

Численно области стабилизации можно найти по методу Флоке [6]. Для системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (3) строится фундаментальная матрица $\mathbf{X}(t)$, удовлетворяющая начальным условиям $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$. Далее для каждой пары параметров (Ω, δ) матрицы монодромии $F = \mathbf{X}(2\pi/\Omega)$ вычисляются характеристические числа (мультипликаторы) ρ и проверяется условие стабилизации $|\rho| < 1$.

Аналитические условия вибрационной стабилизации статически неустойчивых систем с конечным числом степеней свободы, описываемых уравнениями (3), были получены в предыдущих совместных работах [7, 8] автора настоящей статьи. Когда между частотой вибрации Ω и собственными частотами ω_i отсутствуют какие-либо резонансы, метод многих масштабов позволяет аналитически определить нижнюю границу области стабилизации, а исследование системы вблизи резонансов $\Omega = \omega_i$, $\Omega = 2\omega_i$, $\Omega = \omega_i + \omega_j$, $\Omega = \omega_i/2$ позволяет найти верхнюю границу области.

На рис. 2, а, показаны области стабилизации двойного перевернутого маятника с параметрами $\eta = 0, 2$, $\Delta p = 0, 1$, $\gamma = 0$, а на рис. 2, б, — области стабилизации тройного перевернутого маятника с параметрами $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$, $\Delta p = 0, 1$, $\gamma = 0, 01$. Черные линии соответствуют нижним границам областей стабилизации и верхним границам областей вблизи резонансов $\Omega = \omega_2/2$, $\Omega = \omega_2$, $\Omega = 2\omega_2$ (рис. 2, а) и $\Omega = 2\omega_2$, $\Omega = \omega_2 + \omega_3$, $\Omega = 2\omega_3$ (рис. 2, б), полученным

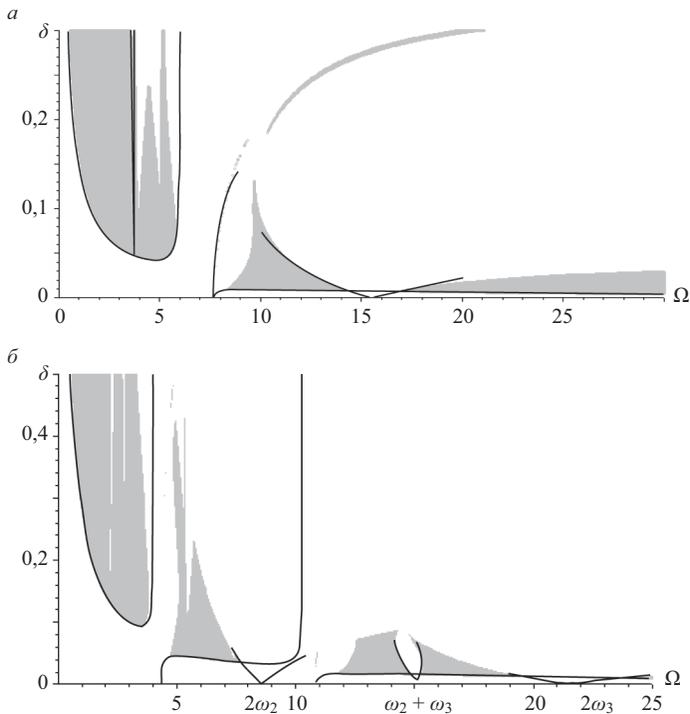


Рис. 2. Области стабилизации верхнего неустойчивого положения равновесия двойного (а) и тройного (б) маятника

с помощью метода многих масштабов, а серые области — зонам стабилизации, вычисленным с помощью метода Флоке.

Приведенные результаты показывают, что стабилизация возможна при различных частотах возбуждения основания — низких, средних и высоких. Численный анализ мультипликаторов Флоке или полученные в работах [7, 8] аналитические условия стабилизации позволяют найти параметры вибрации основания, при которых статически неустойчивое положение n -звенного перевернутого маятника становится устойчивым. Влияние параметров тройного перевернутого маятника на области стабилизации описано в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Mem. Proc. Manchester Literary and Philos. Soc. 1908. Vol. 52, No. 8. P. 1–10.
2. *Stephenson A.* On induced stability // Philos. Mag. 1909. Vol. 17. P. 765–766.
3. *Сейранян А. П., Майлыбаев А. А.* Вибрационная стабилизация статически неустойчивых систем // Доклады Академии наук. 2009. Т. 426, № 4. С. 480–486.
4. *Arkhipova I. M., Luongo A., Seyranian A. P.* Vibrational stabilization of the upright statically unstable position of a double pendulum // J. Sound Vib. 2012. Vol. 331. P. 457–469.
5. *Arkhipova I. M.* On the stabilization of a triple inverted pendulum by vibration of the support with arbitrary frequency // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2019. Vol. 64, iss. 2. P. 281–287.
6. *Меркин Д. П.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987.
7. *Arkhipova I. M., Luongo A.* Stabilization via parametric excitation of multi-dof statically unstable systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. Vol. 19. P. 3913–3926.
8. *Arkhipova I. M., Luongo A.* On the effect of damping on the stabilization of mechanical systems via parametric excitation // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 2016. Vol. 67, No. 3. Article 69.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК

ЭНЕРГОВРЕМЕННОЙ КРИТЕРИЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ ГОМАНА (Hohmann)

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

Доклад на семинаре 3 апреля 2018 г.

Дается новая постановка классической задачи астродинамики — задачи Гомана — об оптимизации двухимпульсного перехода космического летательного аппарата между двумя компланарными круговыми орбитами. В качестве критерия оптимизации принят энергoвременной показатель качества, равный произведению суммарного прироста характеристической скорости на длительность перехода. Приводится подробное решение этой задачи, в результате которого установлена зависимость оптимального значения безразмерной начальной скорости от соотношения радиусов начальной и конечной орбит. На основе построенного решения даны численные оценки эффективности предложенного режима межорбитального перехода и проведено их сопоставление с аналогичными оценками для гомановского режима. В результате этих оценок можно сделать вывод о целесообразности использования энергoвременного критерия и в других задачах орбитальной космической навигации, для которых характерна высокая и даже сверхвысокая длительность планируемого перехода.

К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ВОЗДУХОЗАБОРНИКА СВЕРХЗВУКОВОГО (ГИПЕРЗВУКОВОГО) ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

К. С. Груздев

Доклад на семинаре 6 марта 2018 г.

При полетах со сверхзвуковой скоростью интересно распределение давления на входе воздухозаборника летательного аппарата. Кроме случая простейшего обтекания воздухозаборника, интересны случаи подвода энергии непосредственно перед рассматриваемым телом. В зависимости от того, в какой части расчетной области расположен локальный по времени и размерам энергоподвод, можно изменить режим работы двигателя, т. е. увеличить давление на входе воздухозаборника, тем самым увеличить мощность двигателя или же уменьшить ее, создавая при этом ситуацию воздушного голодания двигателя, что, в свою очередь, может привести к прекращению работы последнего.

В настоящей работе численно моделируются случаи обтекания воздухозаборника без энергоподвода при фиксированном числе Маха ($M = 5$) и при том же числе Маха, но с локальным подводом энергии в разных частях расчетной области, а также сравниваются результаты и делаются выводы.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ
ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТЕЛА
С РАЗЛИЧНЫМИ ГОЛОВНЫМИ ЧАСТЯМИ**

Д. В. КАУФМАН

Доклад на семинаре 20 февраля 2018 г.

На основе экспериментов по затуханию вращательных колебаний осесимметричного тела в потоке воздуха определены вращательные производные коэффициентов момента тангажа. Оказалось, что более удлиненные головные части этого тела характеризуются большими по абсолютному значению вращательными производными. Наличие соосного диска перед цилиндрической частью тела вместо обтекаемой головной части также приводит к увеличению абсолютного значения вращательных производных.

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ВЛИЯНИЯ ФОРМЫ СИГНАЛА НАПРЯЖЕНИЯ
НА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ
ВАРЬЕРНОГО МИКРОЗАРЯДА В АРГОНЕ**

А. И. САЙФУТДИНОВ

Доклад на семинаре 5 декабря 2017 г.

В работе в рамках гибридной модели численно исследованы параметры диэлектрического барьерного микрозаряда атмосферного давления в аргоне в широком диапазоне входных условий. Представлен сравнительный анализ полученных результатов с приложенным к электродам сигналом напряжения, имеющим синусоидальную и прямоугольную форму. В частности, для обоих случаев приводятся пространственно-временные зависимости концентраций заряженных и возбужденных частиц, напряженности и потенциала электрического поля, временные зависимости плотности разрядного тока и падения напряжения между электродами, а также временные зависимости накопления зарядов на правом и левом диэлектриках. Результаты расчетов демонстрируют принципиальную зависимость пространственных и временных характеристик барьерного микрозаряда атмосферного давления в аргоне от формы прикладываемого напряжения. Так, в случае прикладывания к электродам сигнала питающего напряжения прямоугольной формы наблюдаются всегда два импульса тока на полупериод (независимо от амплитуды питающего напряжения). При этом в случае синусоидального сигнала число импульсов тока зависит от амплитуды прикладываемого напряжения.

ЭФФЕКТЫ ПАМЯТИ ФОРМЫ В СПЛАВЕ TiNi С РАЗЛИЧНЫМ РАЗМЕРОМ ЗЕРНА

А. Ю. САВЕЛЬЕВА

Доклад на семинаре 28 ноября 2017 г.

Работа посвящена изучению эффектов пластичности превращения и памяти формы в наноструктурированном сплаве Ti-50,2 ат.% Ni с различным размером зерна. Полученные результаты показали, что изменение деформации при охлаждении происходит в несколько стадий в зависимости от размера зерна и значения напряжения. В зернах размером менее 80 нм ее изменение наблюдается только в том случае, если напряжения, действующие при охлаждении и нагревании, превышают критическое значение. При увеличении напряжения возрастают эффекты пластичности превращения и памяти формы и температур мартенситных переходов. Уменьшение размера зерна приводит к уменьшению упомянутого эффекта и температур переходов, а эффект памяти формы меняется немонотонно. Максимальная обратимая деформация, равная 15 %, наблюдается в образце с размером зерна 130 нм.

ВЛИЯНИЕ РЕЖИМОВ ТЕРМООБРАБОТКИ НА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВА BRB2, ПОДВЕРГНУТОГО ИНТЕНСИВНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ КРУЧЕНИЕМ

А. Я. НИГМАТУЛЛИНА

Доклад на семинаре 21 ноября 2017 г.

В данной работе изучалось влияние термообработки и интенсивной пластической деформации кручением (ИПДК) на формирование частиц вторичных фаз и механические свойства сплава Cu-2Be. Режимы термомеханической обработки сплава в состоянии твердого раствора разделялись на три основных метода обработки: 1) ИПДК с последующим старением, 2) старение с последующей ИПДК и 3) динамическое старение во время ИПДК при температурах от 150 до 250 °С. Результаты рентгенофазового анализа (РФА) образцов позволили исследовать влияние термомеханической обработки на размеры зерен, внутренние напряжения и расположение частиц CuBe в медной матрице. По результатам РФА было определено, что частицы вторичных фаз в сплаве после ИПДК могут образовываться и внутри, и на границах зерен. Для исследования механических свойств проводились испытания на одноосное растяжение. Хорошая комбинация прочности и пластичности была достигнута в сплаве, подвергнутом старению при температуре 325 °С в течение 10 ч с последующей ИПДК.

Сканирующая электронная микроскопия позволила определить хрупко-вязкое разрушение наноструктурированного сплава Cu-2Be. Результаты этой работы демонстрируют влияние термомеханической обработки на кинетику формирования частиц вторичных фаз и механические свойства материала.

ДИНАМИКА РОТОРА С МНОГОШАРИКОВЫМ АВТОБАЛАНСИРОВОЧНЫМ УСТРОЙСТВОМ

А. С. МАКСИМОВ

Доклад на семинаре 31 октября 2017 г.

В работе рассматривается задача о самобалансировке статически неуравновешенного ротора при помощи пассивного шарового автобалансирующего устройства (АБУ). Применение таких устройств особенно актуально для роторов с переменным дисбалансом, например для центрифуг стиральных или сушильных машин. Построена математическая модель статически неуравновешенного ротора с невесомым упругим валом, закрепленным в вертикальных опорах и оснащенного многорядным многошариковым АБУ. Разработан алгоритм численного интегрирования системы с учетом соударения балансирующих шариков друг с другом. В системе Mathematica написана программа для расчета движения системы, содержащей АБУ с произвольным числом концентрических круговых полостей и шариков в каждой полости. Результаты расчетов представлены в виде графиков и компьютерной анимации, наглядно демонстрирующей процессы движения и взаимодействия балансирующих шариков.

ГРАНУЛИРОВАНИЕ ПОРОШКООБРАЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Т. Н. ШИНИНОВ

Доклад на семинаре 24 октября 2017 г.

В данной работе исследовано гранулирование порошкообразных материалов в скоростном грануляторе барабанного типа. Представлена математическая модель, позволяющая описать гранулообразование в скоростном грануляторе при совмещении двух процессов: коагуляции и дробления. Проведены экспериментальные исследования процесса, на основе которых получены константы ядра интегрального преобразования для коагуляции и дробления. Показана адекватность предложенной математической модели реальному гранулированию гидрофобной добавки для асфальтобетонной смеси.

ТЕРМОЦИКЛИЧЕСКАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

А. Н. БАРОВА

Доклад на семинаре 17 октября 2017 г.

В данной работе теоретически изучено влияние неоднородного поля температур на деформацию ползучести цилиндрического образца. Разработана численная схема решения несвязной термомеханической одномерной краевой задачи по поиску полей напряжений, деформаций и температур в цилиндре.

Показано, что деформация термоциклической ползучести убывает с ростом скорости изменения температуры поверхности цилиндра.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНЫХ МИКРОЭМУЛЬСИЙ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Е. А. Веденчук

Доклад на семинаре 13 октября 2017 г.

В докладе рассматриваются обратные мицеллы — базовые структурные элементы микроэмульсий типа «вода в масле». Микроэмульсия — это термодинамически устойчивая стабильная прозрачная смесь как минимум трех компонентов: поверхностно-активного вещества и двух ограниченно растворимых друг в друге жидкостей. Методом молекулярной динамики были выполнены расчеты обратных мицелл, состоящих из воды и неионных поверхностно-активных веществ Span[®] 80 и Tween[®] 80, в среде *n*-декана. Результаты показали, что смоделированные мицеллы имеют сферическую форму, которая может быть аппроксимирована эллипсоидом с близким к единице осевым соотношением. Полученные данные по размерам и коэффициентам диффузии обратных мицелл и нанокпель воды находятся в согласии с экспериментальными данными, полученными методами динамического светорассеяния и ЯМР.

О ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ГРУЗА, ПЕРЕНОСИМОГО КОЗЛОВЫМ КРАНОМ ККС10

Т. С. Шугайло

Доклад на семинаре 19 сентября 2017 г.

В докладе рассматривается гашение колебаний груза, переносимого козловым краном ККС10 за заданное время на заданное расстояние. Управляющая сила находится двумя способами — путем применения принципа максимума Понтрягина и обобщенного принципа Гаусса. Решения находятся, во-первых, в предположении малости колебаний груза, и, во-вторых, с ограничениями, определяемыми номинальными характеристиками конкретного порталного крана. Сравняются решения, полученные обоими методами.

ХРОНИКА

ДЕСЯТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ДИНАМИКЕ КОНСТРУКЦИЙ (EURODYN-2017)

С 10 по 13 сентября 2017 г. в Риме проходила Десятая международная конференция по динамике конструкций (EURODYN-2017), организованная Римским университетом Ла Сапиенца (Sapienza University of Rome). Первая конференция EURODYN состоялась в 1990 г. в Бохуме (Германия).

Из более чем 1000 присланных на конференцию резюме были отобраны 830. Авторами из 54 стран представлено около 600 докладов, темы которых затрагивали все главные последние теоретические, численные и экспериментальные результаты в области динамики конструкций. На EURODYN-2017 были организованы общая сессия и 26 мини-симпозиумов.

Доклады проходили в здании факультета гражданского и промышленного строительства (Civil and Industrial Engineering), расположенном в историческом центре Рима неподалеку от Колизея и рядом с известной базиликой Сан-Пьетро-ин-Винколи (San Pietro in Vincoli), в которой находится статуя Моисея работы Микеланджело.

На конференции выступили с докладами активные участники семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» — профессора С. М. Бауэр, С. Б. Филишов и доцент А. Л. Смирнов (см. фото на цв. вкл.). Доклад С. М. Бауэр, Е. Б. Воронковой и А. Л. Смирнова Application of Non-classical Shells Theories for Free Vibration Analysis of Annular Plates состоялся на основной сессии «Динамика, устойчивость и колебания конструкций». Профессор С. М. Бауэр была сопредседателем одного из заседаний этой секции. Доклад С. Б. Филишова Asymptotic analysis of free low-frequency

ring-stiffened shells vibrations был сделан на мини-симпозиуме «Достижения в вычислительной динамике конструкций».

Доклады опубликованы в специальном выпуске журнала *Procedia Engineering*. Следующая конференция EURODYN-2020 состоится в Афинах (Греция) в 2020 г.

С. М. Бауэр, С. Б. Филиппов, А. Л. Смирнов

ОБ АВТОРАХ

Архипова Инга Михайловна — канд. физ.-мат. наук, доц. математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: колебания и устойчивость механических систем. E-mail: inga_ma@mail.ru

Барова Алина Николаевна — студент 1-го курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: математическое моделирование, ползучесть металлов. Научный руководитель — Волков Александр Евгеньевич. E-mail: mushonok.90@mail.ru

Бауэр Светлана Михайловна — д-р физ.-мат. наук, проф. математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: биомеханика, механика тонкостенных конструкций, математическое моделирование. E-mail: s_bauer@mail.ru

Веденчук Екатерина Александровна — студент 1-го курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: гидроаэромеханика, молекулярно-динамическое моделирование, биомеханика. E-mail: kvedenchuk@gmail.com

Величко Виктор Евгеньевич — аспирант (заочной формы обучения) Института проблем машиноведения РАН. По совместительству инженер-расчетчик филиала АО «Научно-производственная корпорация «Системы прецизионного приборостроения»» в Санкт-Петербурге. Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, теория пластин и оболочек, оптимизация в механике, теория устойчивости. E-mail: viktor.velichko@mail.ru

Груздев Кирилл Сергеевич — студент 1-го курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов:

сверхзвуковые и гиперзвуковые течения. Научный руководитель — доц. А. Г. Карпенко. E-mail: mусорка66@yandex.ru

Дзэбисашвили Георгий Тамазович — студент 4-го курса бакалавриата кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — теория оболочек. Научный руководитель — проф. С. Б. Филиппов. E-mail: gonduras-07@mail.ru

Кауфман Даниил Витальевич — студент 1-го курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: динамика идеальной жидкости, динамика вязкой жидкости, газовая динамика. Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук А. Н. Рябинин. E-mail: kifadan@mail.ru

Колежук Ульяна Николаевна — аспирант математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: биомеханика, механика деформируемого твердого тела, теория пластин и оболочек. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр. E-mail: socrata@mail.ru

Максимов Антон Сергеевич — студент 1-го курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: математическое моделирование, динамика роторных устройств, мехатроника. Научный руководитель — канд. физ.-мат. наук А. С. Ковачев. E-mail: antomax1995@mail.ru

Нигматуллина Альфия Якубовна — студент 1-го курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: материаловедение, наноструктурированные материалы, бинарные сплавы, фазовые переходы. Научный руководитель — канд. физ.-мат. наук И. В. Ломакин. E-mail: alfushins95@mail.ru

Савельева Анастасия Юрьевна — студент 1-го курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: эффект памяти формы, материаловедение. Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук Н. Н. Реснина. E-mail: nasta927@mail.ru

Сайфутдинов Алмаз Ильгизович — студент 1-го курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: низкотемпературная плазма, плазмохимия, газовые разряды, математическое моделирование, зондовая диагностика плазмы. Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф. Е. В. Кустова. E-mail: as.uav@bk.ru

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, стажер-исследователь Института проблем машиноведения РАН. Область научных интересов: аналитическая механика, теория колебаний, динамика твердого тела, теория устойчивости, оптимизация в механике, волны в деформируемых средах. Научный руководитель — канд. физ.-мат. наук, проф. Б. А. Смольников. E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

Смольников Борис Александрович — проф. кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов: общая механика, биомеханика и робототехника, движение космических объектов, теория управления. Автор четырех книг и многочисленных статей по вопросам динамики твердого тела, робототехники и механики управляемых космических объектов. E-mail: smolnikovba@yandex.ru

Франус Дмитрий Валерьевич — канд. физ.-мат. наук, выпускник кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — теория оболочек, биомеханика. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр. E-mail: franus@mavis.ru

Шининов Тимур Николаевич — студент 1-го курса магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: математическое моделирование, дисперсные системы, биомеханика. Научный руководитель — проф. Е. А. Нагнибеда. E-mail: kaliuganow@mail.ru

Шугайло Тимофей Сергеевич — студент магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского госу-

дарственного университета. Область научных интересов — неголономная механика, математическое моделирование, задачи оптимального управления. Научный руководитель — проф. М. П. Юшков. E-mail: shugaylotis@gmail.com

**УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА,
ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ В 2017–2018 гг.**

Франус Дмитрий Валерьевич — канд. физ.-мат. наук, Саратовский университет, 2018. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр.

Холодова Светлана Евгеньевна — д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский государственный университет, 2018.

SUMMARIES

Franus D. V., Bauer S. M., Kolezhuk U. N. **Effect of the shape of a scleral shell on the value of intraocular pressure**

Multilayer corneoscleral shell under various mechanical loads is studied by the finite-element modeling in ANSYS program package. An analytical mechanical model of an elastic thin-walled corneoscleral eye shell composed of a spherical cornea and an ellipsoidal scleral shell is considered. A comparative analysis of the effect of different ratios of the semi-axes of the ellipsoidal shape of the scleral shell on the intraocular pressure is done.

The first part of the dissertation is devoted to a calculation of intraocular pressure (IOP) under a load of the flat base stamp with different weighs depending on a variety of biomechanical characteristics of the corneal multi layered shell. Next part is concerned with studying changes in IOP after intravitreal injection of a standard volume into a multilayer corneoscleral shell of variable thickness and an ellipsoidal shape. In the third part, changes in IOP after refractive correction of hyperopia are considered and also the stress-strain state of the corneal shell with different options for the location of the zone of ablation is analyzed. Multilayer corneoscleral shell under various mechanical loads is studied by analytical model.

MSC class: 74K25

Keywords: corneoscleral shell, intraocular pressure, ellipsoidal scleral shell.

REFERENCES

1. Bauer S. M., Lubimov G. A., Tovstik P. E. Physical analysis measurement of intraocular pressure by Maklakov's method // Proc. of the IV interregional seminar "Biomechanics of the eye 2004". Moscow, 2004. P. 91–96. (in Russian)
2. Iomdina E. N., Bauer S. M., Kotliar K. E. Biomechanics of the eye: theoretical aspects and clinical applications. Moscow: Real Time, 2015. 208 p. (in Russian)
3. Kabrits S. A., Mikhailovskii E. I., Tovstik P. E., Chernykh K. F. et al. General nonlinear theory of elastic shells. St. Petersburg: Publishing house of St. Petersburg State University, 2002. 388 p. (in Russian)

4. Franus D. V. Changes in the stress-strained state of the corneoscleral shell of a human eye after the injection // Proc. of the Intern. Conf. on “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov, SCP 2015. St. Petersburg, 2015. P. 522–525.

Dzebisashvili G. T. **Free vibrations of cylindrical shells with the square cross-section**

Free localized vibrations of a cylindrical shell with the square cross-section are studied. The shell represents the model of the sound isolation cabin.

Two different types of boundary conditions are studied: one of the edges is freely supported and the other one is clamped, which corresponds to the case of the shell with a thin plate on the freely supported edge; both of the edges are clamped, which corresponds to the case of the shell with a thick plate on the clamped edge. In both cases, the other edge, which is clamped, corresponds to the cabin being clamped to the floor.

By means of numerical calculations using approximate analytical solution, Rayleigh method and the finite element method, the natural frequencies of the shells of different sizes with different boundary conditions are analyzed and compared.

The distribution of the natural frequencies depending on the shell material, the shell size and boundary conditions is obtained, and conclusions on methods applicability are given.

MSC class: MSC2010: 74K25, 74H45

Keywords: vibrations, shell theory, finite element method, Rayleigh method.

REFERENCES

1. Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L. Free vibrations of square elastic tubes with a free end // Mech. Res. Communications. 2000. Vol. 27, iss. 4. P. 457–464.
2. Badjyin G. M. Building technologist’s handbook. Vol. 3. St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2015. (in Russian)
3. Birger I. A., Panovko Ya. G. Strength. Stability. Vibrations. Handbook. Vol. 3 / Eds. I. A. Birger, Ya. G. Panovko. Moscow: Mashinostroenie, 1968. (in Russian)

4. GOST 10632—2007. Wood particle boards. Specifications. Moscow: Standartinform, 2007. (in Russian)
5. Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. Moscow: Nauka, 1966. (in Russian)
6. Timoshenko S. P., Young D. H., W. Weaver, Jr. Vibration problems in engineering. Moscow: Fizmatlit, 1985. (in Russian)

Smirnov A. S., Smolnikov B. A. **Optimal placement of the hinge support in beam structures under the action of various loads**

The methods of determining the location of an additional hinge support in various beam structures are discussed in the paper. The purpose of installing this support is to fulfill some optimization requirements. The main object of research is the cantilever beam, although the proposed reasoning can be applied to beams with other boundary conditions. The problem takes into account the different types of external loading of the beam: concentrated and distributed, longitudinal and transverse forces. The optimization criterion is the minimization of the maximum deflection and the maximum bending moment in the case of lateral loads, and maximization of the critical force, at which the beam stability is lost, in the case of longitudinal loads. The problem is solved by analytical methods of the statics of beam constructions, which leads to rather cumbersome finite expressions, which are not amenable to only one analytical study. Nevertheless, the qualitative character of the obtained solutions is not difficult to establish with the help of their graphic interpretation based on the computer calculations results. It is shown in the course of solving the problem that under the action of concentrated loads it is optimal to place the support at the free end of the beam, and under the action of distributed loads — at internal points. The study shows that it is possible this way to achieve a significant reduction in the maximum values of deflection and bending moment of the beam or to substantially increase the critical force value.

MSC class: 70C20

Keywords: cantilever beam, hinge support, longitudinal and lateral load, beam deflection, critical force, optimization criterion.

REFERENCES

1. Olkov Ya. I., Kholopov I. S. Optimal design of metal pre-stressed farms. Moscow: Stroizdat, 1985. (in Russian)
2. Radtsig Yu. A. Statically indeterminate farms of least weight. Kazan: Publishing house of the Kazan University, 1969. (in Russian)
3. Seyranyan A. P. Optimum design of beams with restriction on deflections // Izvestiya AN Arm. SSR. Mechanics. 1976. No. 6. P. 24–33. (in Russian)
4. Seyranyan A. P. Elastic plates and beams of minimum weight in the presence of several types of bending loads // Izvestiya AN SSSR. Mechanics of a solid body. 1973. No. 5. P. 95–101. (in Russian)
5. Goldstein Yu. B., Solomesh M. A. Variational problems of the statics of optimal rod systems. Leningrad: Publishing house of Leningrad University, 1980. (in Russian)
6. Banichuk N. V. Optimization of the elastic bodies forms. Moscow: Nauka, 1980. (in Russian)
7. Strength, stability, vibrations. Vol. 1 / Ed. I. A. Birger, Ya. G. Panovko. Moscow: Mashinostroenie, 1968. (in Russian)
8. Timoshenko S. P. Vibration problems in engineering. Moscow: Nauka, 1967.
9. Biderman V. L. The theory of mechanical vibrations. Moscow: Vyshaya Shkola, 1980. (in Russian)
10. Strength, stability, vibrations. Vol. 3 / Eds. I. A. Birger, Ya. G. Panovko. Moscow: Mashinostroenie, 1968. (in Russian)
11. Merkin D. R., Bauer S. M., Smirnov A. L., Smolnikov B. A. The theory of stability in examples and problems. Moscow; Izhevsk: R&C Dynamics, 2007. (in Russian)
12. Rzhantsyn A. R. The theory of composite rods of building structures. Moscow: Stroizdat, 1948. (in Russian)
13. Dinnik A. N. Stability of elastic systems. Moscow; Leningrad: ONTI NKTP SSSR, 1935. (in Russian)
14. Ziegler G. Fundamentals of the theory of stability of structures. Moscow: Mir, 1971. (in Russian)
15. Gavrilov V. S., Denisova N. A., Kalinin A. V. Bessel functions in problems of mathematical physics. Teaching-methodical manual. Nizhny Novgorod: Izdvo Nizhny Novgorod University, 2014. (in Russian)
16. Kamke E. Handbook of ordinary differential equations. Moscow: Nauka, 1971.
17. Korenev B. G. Introduction to the theory of Bessel functions. Moscow: Nauka, 1971. (in Russian)
18. Panovko Ya. G., Gubanova I. I. Stability and oscillations of elastic systems. Moscow: Nauka, 1987. (in Russian)

Bauer S. M., Velichko V. E. Deformation of the reflective surface of the optical mirror under its own weight

An annular single-layer plate of medium thickness, located on local supports and loaded with gravitational load along the axis of rotation,

is considered. The thickness of the plate varies in radius, while one of the surfaces is flat, the material of the plate isotropic. The plate represents the model of the optical mirror of the telescope.

To derive the equations of the stress-strain state of the plate, the theory of shells of medium thickness of Paliı — Spiro (PS) with a reduction surface (PP) combined with a flat part of the plate is used. This theory takes into account the transverse shear and the change in the thickness of the plate deformation rectilinear element, normal to the PP before the application of loads. The problem is reduced to a system of differential equations of the 10th order, which is solved by an orthogonal run. This solution is compared with the solution obtained by the finite three-dimensional element method (FEM) in ANSYS software.

MSC class: 74K20

Keywords: annular plates, shells of medium thickness, finite element method.

REFERENCES

1. Doyle K. B., Genberg V. L., Michels G. J. Integrated optomechanical analysis / 2nd Ed. Bellingham, Washington: SPIE Press, 2012.
2. Grigorenko Ya. M., Vasilenko A. T. Methods of calculation of shells. Vol. 4. Theory of shells of variable stiffness. Kiev: Naukova Dumka, 1981. (in Russian)
3. Viens M. J. Fracture Toughness and Crack Growth of Zerodur // NASA Technical Memorandum. 1990. 4185. P. 30.
4. Grigoluk E. I., Selezov I. T. Theory of vibrations of rods, plates and shells. Moscow, 1973. (in Russian)
5. Paliı O. M., Spiro V. E. Anisotropic Shells in Shipbuildings. Theory and Analysis. Leningrad: Sudostroenie, 1977. (in Russian)
6. Bauer S. M., Kovalev A. M., Petrov M. B. et al. Calculation and optimization of metal mirrors of telescopes. St. Petersburg: Publishing House of St. Petersburg State University, 1997. (in Russian)

Arkhipova I. M. Inverted n -link pendulum on the vibrating base

More than 100 years ago A. Stephenson showed that statically unstable vertical position of inverted single, double and triple pendula

may be stabilized by the support vibration with sufficiently high excitation frequency. This paper answers on the question, if it is possible to stabilize the upper statically unstable position of n -link pendulum by vertical vibration of low, medium and high frequencies. The discussed results are obtained by using the Multiple Scale Method and the Floquet theory. The stability diagrams in the excitation parameters space (amplitude and frequency of the support excitation) are plotted for double and triple pendula.

MSC class: 70E50

Keywords: vibrational stabilization, n -link pendulum.

REFERENCES

1. Stephenson A. On a New Type of Dynamical Stability // Mem. Proc. Manchester Literary and Philos. Soc. 1908. Vol. 52, No. 8. P. 1–10.
2. Stephenson A. On Induced Stability // Philos. Mag. 1909. Vol. 17. P. 765–766.
3. Seyranian A. P., Mailybaev A. A. Vibrational stabilization of statically unstable systems // Doklady Physics. 2009. Vol. 54, No. 6. P. 294–300. (in Russian)
4. Arkhipova I. M., Luongo A., Seyranian A. P. Vibrational stabilization of the upright statically unstable position of a double pendulum // J. Sound Vib. 2012. Vol. 331. P. 457–469.
5. Arkhipova I. M. On the stabilization of a triple inverted pendulum by vibration of the support with arbitrary frequency // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics, 2019. Vol. 52, iss. 2. P. 281–287.
6. Merkin D. R. Introduction to the Theory of Stability. New York: Springer, 1997. (in Russian)
7. Arkhipova I. M., Luongo A. Stabilization via parametric excitation of multi-dof statically unstable systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. Vol. 19. P. 3913–3926.
8. Arkhipova I. M., Luongo A. On the effect of damping on the stabilization of mechanical systems via parametric excitation // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 2016. Vol. 67, No. 3. Article 69.

РЕФЕРАТЫ

УДК 534.1, 539.3

Франус Д. В., Бауэр С. М., Колезжук У. Н. **Влияние формы склеральной оболочки на показатели внутриглазного давления** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2017–2018 гг. С. 5–12.

Рассматривается аналитическая механическая модель упругой тонкостенной корнеосклеральной оболочки глаза, составленной из двух частей: 1) сферической роговой оболочки и 2) склеральной оболочки эллипсоидальной формы. Приводится сравнительный анализ влияния различных вариантов соотношения полуосей эллипсоидальной склеральной оболочки на показатели истинного внутриглазного давления.

Библиогр. 4 назв. Ил. 3.

Ключевые слова: корнеосклеральная оболочка, внутриглазное давление, эллипсоидальная склеральная оболочка.

УДК 534.1, 539.3

Дзедзисавицки Г. Т. **Колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2017–2018 гг. С. 13–29.

Рассматриваются свободные колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением при разных граничных условиях. Оболочка представляет собой модель звукоизоляционной кабины. Рассматриваются два типа граничных условий: один край имеет шарнирное опирание, другой имеет жесткую заделку, что соответствует наличию тонкой пластины на шарнирно опирающемся крае; оба края имеют жесткую заделку, что соответствует наличию толстой пластины на одном из заделанных краев. В обоих случаях наличие жесткой заделки на другом крае соответствует прикреплению кабины к полу. При помощи приближенного аналитического решения, а также методом Рэлея и методом конечных элементов найдены значения низших частот колебаний. Получены зависимости частот от размеров оболочки и констант материалов. На основе

полученных погрешностей сделаны выводы о пригодности приближенных методов.

Библиогр. 6 назв. Ил. 7.

Ключевые слова: колебания, теория оболочек, метод конечных элементов, метод Рэлея.

УДК 624.04

Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимальное размещение шарнирной опоры в балочных конструкциях при действии различных нагрузок // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2017–2018 гг. С. 30–45.

В работе обсуждаются методы определения местоположения дополнительной шарнирной опоры в различных балочных конструкциях, цель установки которой — выполнение некоторых оптимизационных требований. Основной объект исследования — консольная балка, хотя предлагаемые рассуждения можно применить и для балок с другими краевыми условиями. При этом учитываются различные типы внешнего нагружения балки: сосредоточенные и распределенные, продольные и поперечные силы. При действии поперечных нагрузок в качестве критерия оптимизации выбираются минимальный максимальный прогиб и максимальный изгибающий момент, а для продольных нагрузок — максимальная критическая сила, при которой теряется устойчивость балки. Поставленная задача решается аналитическими методами статики балочных конструкций, что приводит к достаточно громоздким конечным выражениям, не поддающимся лишь одному аналитическому исследованию. Тем не менее качественный характер полученных решений несложно установить путем их графической интерпретации, основанной на результатах компьютерного расчета. В ходе решения задачи показано, что при действии сосредоточенных нагрузок оптимально размещать опору на свободном конце балки, а при действии распределенных нагрузок — во внутренних точках. Проведенное исследование демонстрирует, что таким путем можно заметно снизить максимальные значения прогиба и изгибающего момента балки или существенно повысить критическую силу.

Библиогр. 18 назв. Ил. 8.

Ключевые слова: консольная балка, шарнирная опора, продольная и поперечная нагрузка, прогиб балки, критическая сила, критерий оптимизации.

УДК 539.3

Бауэр С. М., Величко В. Е. Деформация отражающей поверхности оптического зеркала под действием собственного веса // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2017–2018 гг. С. 46–59.

Рассматривается кольцевая однослойная пластина средней толщины, расположенная на локальных опорах, под нормальной гравитационной нагрузкой. Толщина пластины изменяется по радиусу, при этом одна из ее поверхностей плоская, материал пластины изотропен. Пластина представляет собой модель оптического зеркала телескопа.

Для вывода уравнений напряженно-деформированного состояния пластины используется теория оболочек средней толщины Паля — Спира (ПС) с поверхностью приведения (ПП), совмещенной с плоской частью пластины. Данная теория учитывает поперечный сдвиг и изменение по толщине пластины деформации прямолинейного элемента, нормального к ПП до приложения нагрузок. Задача сведена к системе дифференциальных уравнений 10-го порядка, которая решается методом ортогональной прогонки. Данное решение сравнивается с решением, полученным при помощи метода конечных трехмерных элементов (МКЭ) в программном комплексе ANSYS.

Библиогр. 6 назв. Ил. 4.

Ключевые слова: кольцевые пластины, оболочки средней длины, метод конечных элементов.

УДК 531.36

Архипова И. М. Перевернутый n -звенный маятник на вибрирующем основании // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2017–2018 гг. С. 60–65.

Более 100 лет назад А. Стефенсоном было показано, что перевернутый одно-, двух- и трехзвенный маятник в вертикальном по-

ложении можно стабилизировать за счет вибрации точки опоры достаточно большой частоты. Данная работа отвечает на вопрос, возможна ли стабилизация верхнего статически неустойчивого положения равновесия n -звенного маятника при низких, средних и высоких частотах возбуждения. Представлены амплитудно-частотные диаграммы в плоскости параметров вибрации для двойного и тройного перевернутого маятника, на которых показаны области стабилизации. Приведены результаты, полученные по методу многих масштабов, а также численным путем согласно теории Флоке.

Библиогр. 8 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: вибрационная стабилизация, n -звенный маятник.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

2017–2018 гг.

Редактор *А. Б. Иванова*

Корректор *А. С. Яшина*

Компьютерная верстка *А. М. Вейшторг*

Обложка *Е. А. Соловьевой*

Подписано в печать 00.00.2019. Формат $60 \times 84^1/16$. Усл. печ. л. 5,58.
Планируемый тираж 0000 экз. 1-й завод — 000 экз. Заказ № .

Издательство Санкт-Петербургского университета.
199004, Санкт-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11.
Тел./факс +7(812) 328-44-22
publishing@spbu.ru



publishing.spbu.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5.

Книги Издательства СПбГУ можно приобрести
по издательским ценам в Доме университетской книги СПбГУ

Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5

Тел. (812)329-24-71

Часы работы: 10.00–20.00 пн. — сб.,

а также на сайте publishing.spbu.ru

Книги **Издательства СПбГУ** можно
ЗАКАЗАТЬ
на сайте издательства: **publishing.spbu.ru**
в интернет-магазинах: **ozon.ru**; **bookvoed.ru**; **URSS.ru**

ПРИБРЕСТИ
в книжных магазинах *СПбГУ Дом университетской книги*

Менделеевская линия, д. 5
6-я линия В. О., д. 15
Университетская наб., д. 11

А также в магазинах

Санкт-Петербурга: Сеть книжных магазинов «Буквоед»
Санкт-Петербургский Дом книги, Невский пр., д. 28
«Подписные издания», Литейный пр., д. 57

Москвы: «Библио-Глобус», ул. Мясницкая, д. 6/3
«Фаланстер», М. Гнезниковский пер., д. 12/27

Перми: «Пиотровский», ул. Ленина, д. 54

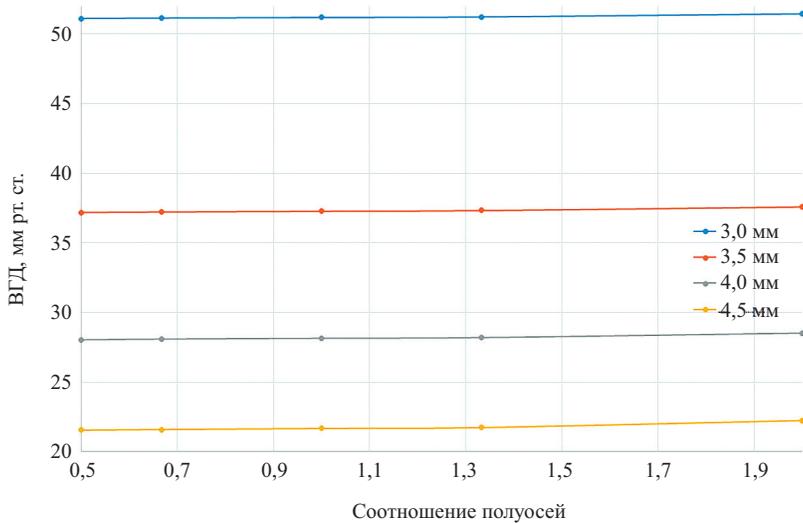


Рис. 3. Зависимость истинного ВГД от соотношения полуосей при $E_s = 12$ МПа, $E_r = 2,4$ МПа, $h_s = 0,5$ мм, $h_r = 0,5$ мм, $R_s = 12$ мм, при массе тонометра 5 г (к статье Д. В. Франуса, С. М. Бауэр, У. Н. Колежук)

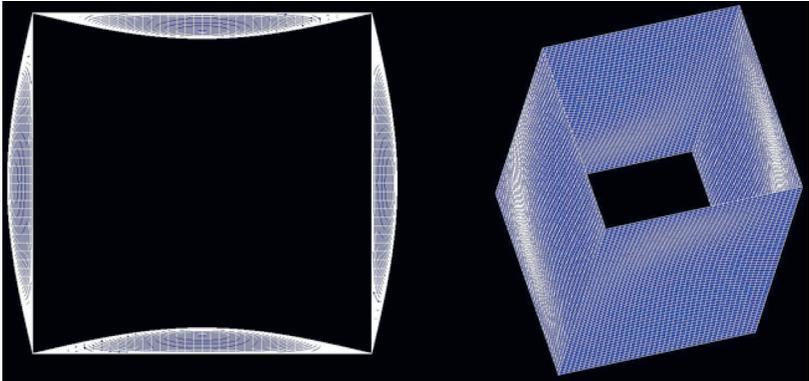
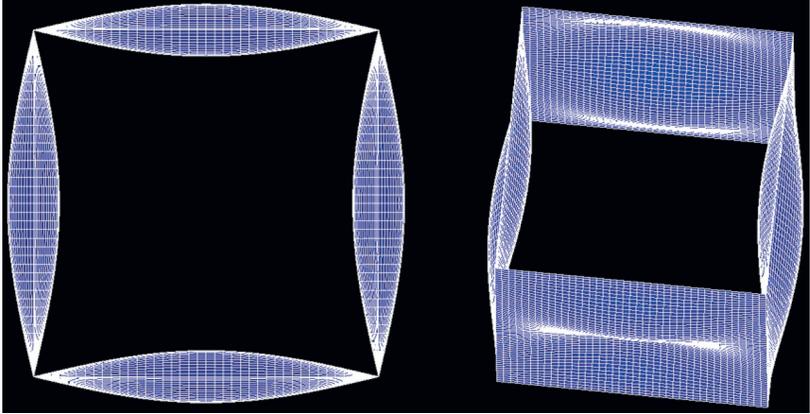


Рис. 3. Колебание оболочки по I форме, здесь и на рис. 4 слева и справа соответственно вид сверху и в триметрической проекции (к статье Г. Т. Дзэбисашвили)

a



б

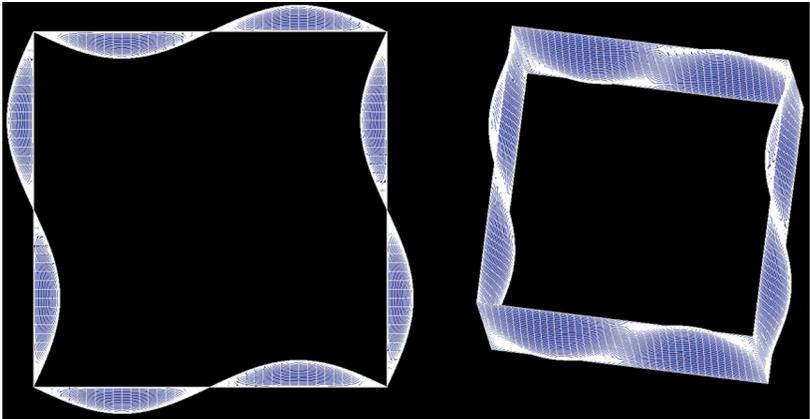


Рис. 4. Колебание оболочки по второй форме:
a — при $m = 1, n = 2$; *б* — при $m = 2, n = 1$ (к статье Г. Т. Дзедзисашвили)

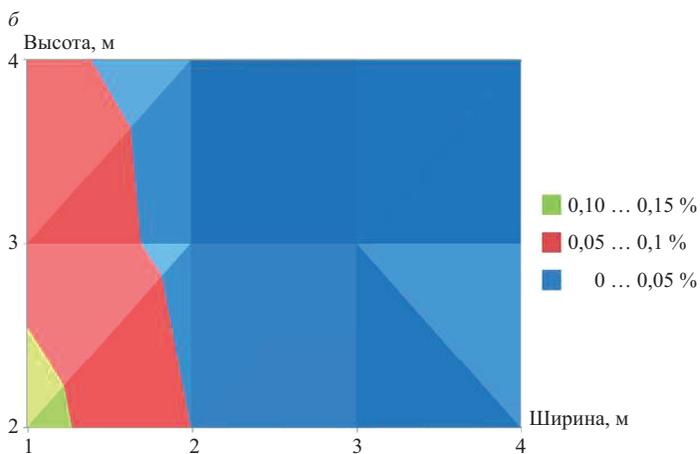
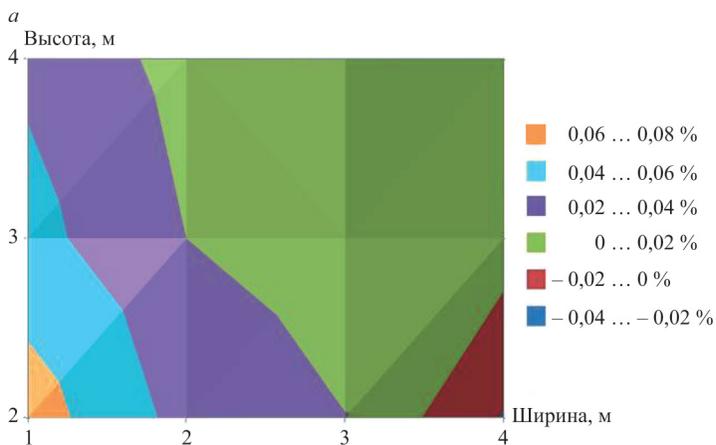


Рис. 6. Номограмма средней относительной погрешности определения I (*a*) и II (*b*) частот при помощи МКЭ в зависимости от размеров стенки (к статье Г. Т. Дзедзисашвили)

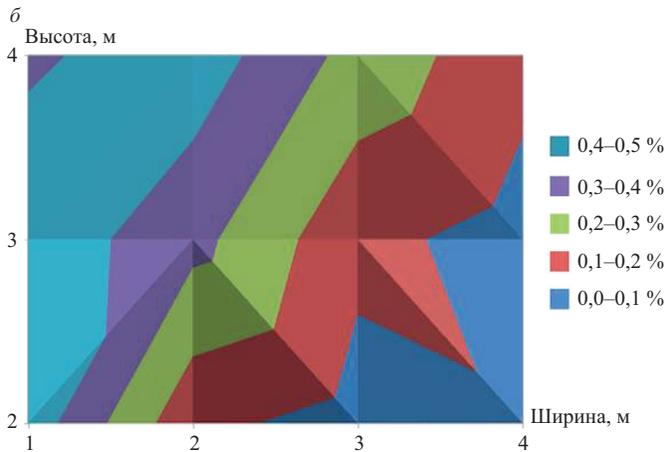
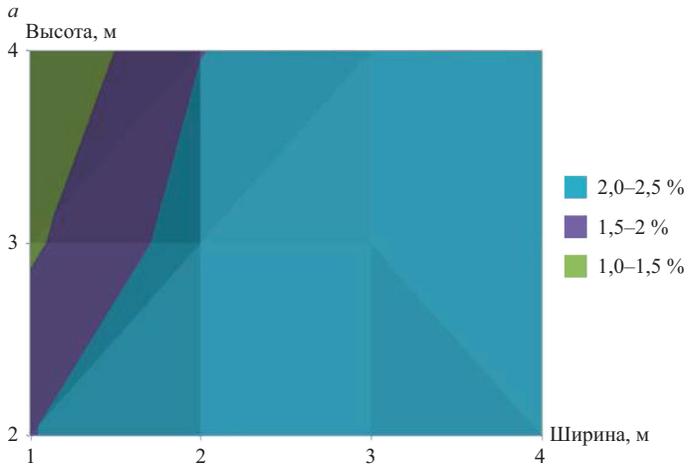


Рис. 7. Номограмма средней относительной погрешности определения I частоты методом Рэлея в случае 3–3 (*a*) и 3–III (*б*)
(к статье Г. Т. Дзедзисашвили)

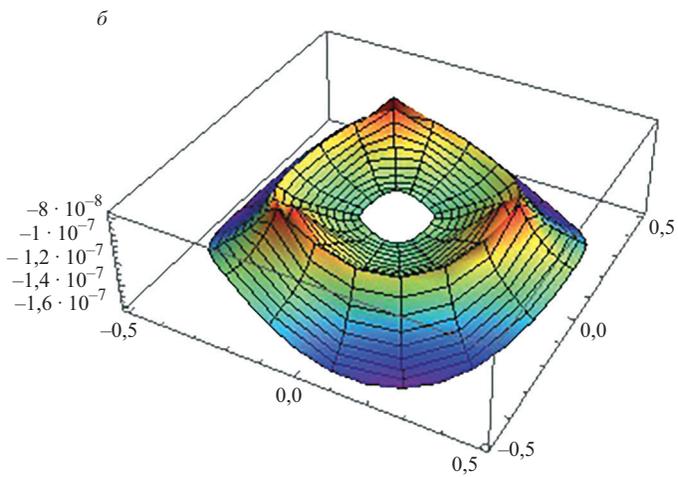
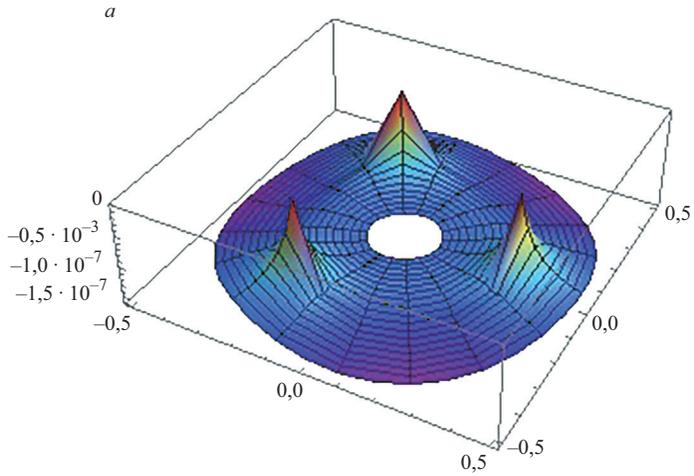


Рис. 4. Поперечные перемещения пластины на лицевой поверхности согласно теориям ТР (*a*) и ПС (*б*) (к статье С. М. Бауэр, В. Е. Величко)



Доцент А. Л. Смирнов и профессора С. Б. Филиппов и С. М. Бауэр (слева направо) на Десятой международной конференции по динамике конструкций (EURODYN-2017)