

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТРУДЫ СЕМИНАРА  
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ  
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2016–2017 гг.



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Редакционная коллегия:

канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ),  
 канд. физ.-мат. наук, доц. *И. М. Архипова* (отв. секретарь) (СПбГУ),  
 PhD, ass. prof. *Е. И. Атрощенко* (Университет Чили, Сантьяго),  
 д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),  
 канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. Б. Воронкова* (СПбГУ),  
 д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ),  
 д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Ф. Жигалко* (ПГУПС),  
 д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Михасев* (БГУ, Беларусь),  
 д-р физ.-мат. наук, проф. *С. П. Помыткин* (СПб ГУАП),  
 д-р техн. наук, проф. *С. В. Сорокин* (Университет Ольборга, Дания),  
 д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик* (СПбГУ),  
 д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ)

*Печатается по постановлению  
 Редакционно-издательского совета  
 математико-механического факультета  
 Санкт-Петербургского государственного университета*

**Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2016–2017 гг.** — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2018. — 102 с. + цв. вкл. 8 с.

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

**ББК 22.25**

Семинар проводится  
 Санкт-Петербургским государственным университетом  
 совместно с Петербургским государственным университетом путей сообщения



Спонсор издания — некоммерческая организация  
 «Фонд содействия математическому образованию  
 и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс»  
 при финансовой поддержке инвестиционно-строительной группы «МАВИС»

© Санкт-Петербургский  
 государственный университет, 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Шелковина В. А.</i> <b>Математические модели ротора, оснащенного шаровым автобалансирующим механизмом .</b>	5
1. Точная и приближенная системы уравнений движения ротора . . . . .	5
2. Укороченные уравнения . . . . .	7
3. Приближенные уравнения балансирующих шариков . . . . .	8
4. Устойчивость стационарных режимов . . . . .	10
4.1. Сбалансированный стационарный режим . . . . .	11
4.2. Несбалансированный стационарный режим . . . . .	12
5. Заключение . . . . .	13
<i>Корниенко О. В.</i> <b>Влияние переменного диаметра молекул на коэффициенты переноса в поуровневом приближении . . . . .</b>	15
1. Постановка задачи . . . . .	15
2. Расчет вязкости . . . . .	16
3. Влияние выбора потенциала на теплоемкость . . . . .	17
4. Расчет теплопроводности . . . . .	20
5. Заключение . . . . .	21
<i>Смирнов А. С., Смольников Б. А.</i> <b>Управление резонансными колебаниями в нелинейных механических системах</b>	23
1. Введение . . . . .	—
2. Консервативное движение двойного маятника . . . . .	25
3. Управление движением двойного маятника . . . . .	27
4. Построение асимптотических решений для двойного маятника . . . . .	30
5. Заключение . . . . .	38
<i>Каштанова С. В.</i> <b>Устойчивость пластин наноразмерной толщины . . . . .</b>	40
1. Введение . . . . .	40
2. Влияние поверхностных эффектов на устойчивость бесконечной растянутой пластины с круговым отверстием . . . . .	41
3. Устойчивость пластины с круговой вставкой из другого материала . . . . .	44
4. Заключение . . . . .	48

<i>Франус Д. В.</i> <b>Модель роговой оболочки при апланационной тонометрии</b> .....	50
1. Введение .....	50
2. Упругие константы роговицы и условие несжимаемости .....	50
3. Конечно-элементная модель роговицы .....	54
4. Заключение .....	57
<i>Зелинская А. В., Товстик П. Е.</i> <b>Локализованные колебания некруговой трансверсально изотропной цилиндрической оболочки</b> .....	59
1. Введение .....	—
2. Геометрические соотношения .....	60
3. Уравнения ТР для цилиндрической оболочки с учетом поперечного сдвига .....	61
4. Асимптотическое интегрирование .....	63
5. Заключение .....	66
<i>Дружинин В. Г., Валов А. В.</i> <b>Полуавтоматическая система демпфирования качки груза</b> .....	68
1. Введение .....	—
2. Алгоритм работы системы .....	69
3. Объект управления .....	—
4. Алгоритм демпфирования .....	72
5. Выводы .....	74
<b>Резюме докладов, не вошедших в сборник</b> .....	75
<b>Хроника</b> .....	82
<b>Об авторах</b> .....	84
<b>Summaries</b> .....	89
<b>Рефераты</b> .....	98

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РОТОРА, ОСНАЩЕННОГО ШАРОВЫМ АВТОБАЛАНСИРОВОЧНЫМ МЕХАНИЗМОМ

В. А. ШЕЛКОВИНА

Рассматривается модель неуравновешенного ротора Джеффкотта, оснащенного шаровым автобалансирующим устройством (АБУ). На основе предположения о «медленности» изменения переменных, описывающих движение центра ротора и балансировочных шариков во вращающейся вместе с ротором системе координат, построены две системы приближенных дифференциальных уравнений, имеющих более низкий порядок по сравнению с исходной (точной) системой.

Сравнительный анализ решений, полученных в результате численного интегрирования точной и приближенных систем в докритической и закритической областях, а также сравнение диаграмм устойчивости стационарных режимов, построенных для различных систем, показывают, что при определенных ограничениях, наложенных на параметры, использование приближенных уравнений не приводит к серьезным погрешностям.

## 1. ТОЧНАЯ И ПРИБЛИЖЕННАЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ РОТОРА

Рассмотрим динамически симметричный ротор в виде жесткого диска, закрепленного в вертикальных шарнирных опорах посередине упругого невесомого вала (рис. 1, слева). Считаем, что ротор статически неуравновешен, т. е. его центр масс  $G$  не совпадает с геометрическим центром диска  $C$  (точкой крепления диска к валу). Для компенсации дисбаланса на диске установлено шаровое АБУ, представляющее собой кольцевую полость, заполненную вязкой жидкостью, где могут свободно передвигаться два балансировочных шарика одинаковой массы. В рамках модели Джеффкотта будем рассматривать движение диска ротора и, соответственно, движение балансировочных шариков только в плоскости статического эксцентриситета, т. е. в горизонтальной плоскости, проходящей через точки  $C$  и  $G$ . Балансировочные шарики будем счи-

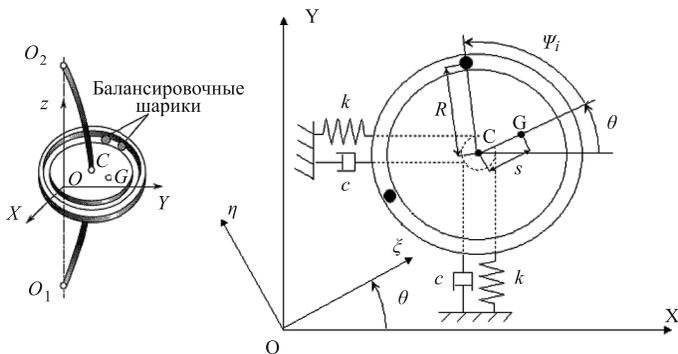


Рис. 1. Статически неуравновешенный ротор с упругим валом (слева — схематическое изображение механизма, справа — чертеж модели в плоскости диска)

тать материальными точками, расстояния от которых до оси ротора равны  $R$ . Введем обозначения:  $m$  — масса одного шарика АБУ,  $M$  — масса диска,  $I_G$  — полярный момент инерции диска,  $s$  — статический эксцентриситет  $CG$ ,  $k$  — коэффициент упругости вала,  $c$  — коэффициент сопротивления поперечному движению ротора,  $c_\psi$  — коэффициент вязкого демпфирования в АБУ (см. рис. 1, справа). Далее будем считать, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью  $\dot{\theta} = \omega$ .

Введем неподвижную систему координат  $OXYZ$ , ось  $Z$  которой направим вертикально вверх вдоль прямой, проходящей через центры опор, а начало координат выберем так, чтобы оси  $X$  и  $Y$  лежали в плоскости статического эксцентриситета. Выберем в качестве обобщенных координат  $X$  и  $Y$  координаты точки  $C$  в неподвижной системе и углы  $\psi_1, \psi_2$  — отклонения балансировочных шариков, отсчитываемые от прямой  $CG$ . Представим координаты и время в безразмерном виде:

$$x = \frac{X}{R}, \quad y = \frac{Y}{R}, \quad \bar{t} = \Omega t,$$

где

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{M + 2m}}.$$

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — безразмерные координаты точки  $C$  во вращающейся системе координат  $O\xi\eta\zeta$ , ось  $O\zeta$  которой совпадает с осью  $OZ$ , а оси  $O\xi$  и  $O\eta$  вращаются вокруг  $O\zeta$  с безразмерной угловой скоростью  $\nu = \omega/\Omega$ . Координаты  $x$  и  $y$  связаны с координатами  $\xi$  и  $\eta$  следующим образом:

$$\begin{cases} x = \xi \cos \nu t - \eta \sin \nu t, \\ y = \xi \sin \nu t + \eta \cos \nu t. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения движения рассматриваемой модели ротора с АБУ, полученные в работе [3], имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + 2\mu)(\ddot{\xi} + \delta_1(\dot{\xi} - \nu\eta) + (1 - \nu^2)\xi - 2\nu\dot{\eta}) = \varepsilon\nu^2 + \\ \quad + \mu \sum_{i=1}^2 ((\nu + \dot{\psi}_i)^2 \cos \psi_i + \ddot{\psi}_i \sin \psi_i), \\ (1 + 2\mu)(\ddot{\eta} + \delta_1(\dot{\eta} + \nu\xi) + (1 - \nu^2)\eta + 2\nu\dot{\xi}) = \\ \quad = \mu \sum_{i=1}^2 ((\nu + \dot{\psi}_i)^2 \sin \psi_i - \ddot{\psi}_i \cos \psi_i), \\ \ddot{\psi}_i + \frac{\delta_2}{\mu} \dot{\psi}_i = (\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\nu - \xi\nu^2) \sin \psi_i - \\ \quad - (\ddot{\eta} + 2\nu\dot{\xi} - \eta\nu^2) \cos \psi_i, i = 1, 2, \end{array} \right. \quad (2)$$

где введены безразмерные параметры:

$$\delta_1 = \frac{c}{\Omega(M + 2m)}, \quad \delta_2 = \frac{c_\psi}{MR^2\Omega} \quad \varepsilon = \frac{s}{R} \ll 1, \quad \mu = \frac{m}{M} \ll 1.$$

В дальнейшем будем называть систему уравнений (2) **точной**.

## 2. УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Упростим точные уравнения (2) для нашей модели, принимая в рассмотрении предположение, что переменные  $\xi$ ,  $\eta$  меняются медленно и производные от переменных  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\psi_i$  мало влияют на движение системы. Таким образом, мы пренебрегаем всеми слагаемыми второго порядка малости и получаем систему, которую в дальнейшем будем называть **укороченной**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = -\frac{\delta_1}{2}\xi - \frac{1-\nu^2}{2\nu}\eta + \frac{\mu\nu}{2+4\mu}(\sin\psi_1 + \sin\psi_2); \\ \dot{\eta} = -\frac{\delta_1}{2}\eta + \frac{1-\nu^2}{2\nu}\xi - \frac{\mu\nu}{2+4\mu}(\varepsilon + (\sin\psi_1 + \sin\psi_2)); \\ \dot{\psi}_i = \frac{\mu\nu^2}{\delta_2}(\eta \cos\psi_i - \xi \sin\psi_i), \quad i = 1, 2. \end{array} \right. \quad (3)$$

### 3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ БАЛАНСИРОВОЧНЫХ ШАРИКОВ

Режимы, при которых координаты точки  $C$  и угловая скорость ротора остаются постоянными, назовем стационарными. Обозначим как  $\xi_0$  и  $\eta_0$  стационарные решения системы (2), полученные в работе [2], и рассмотрим следующий режим движения: координаты геометрического центра диска постоянны, а движение балансировочных шариков описывается укороченными уравнениями (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_0 = \frac{\mu\nu^2(\delta_1\nu(\sin\psi_1 + \sin\psi_2) + (1-\nu^2)(\cos\psi_1 + \cos\psi_2 + \varepsilon/\mu))}{(1+2\mu)(\delta_1^2\nu^2 + (1-\nu^2)^2)}, \\ \eta_0 = \frac{\mu\nu^2((1-\nu^2)(\sin\psi_1 + \sin\psi_2) - \delta_1\nu(\cos\psi_1 + \cos\psi_2 + \varepsilon/\mu))}{(1+2\mu)(\delta_1^2\nu^2 + (1-\nu^2)^2)}, \\ \psi_i - \frac{\mu\nu^2}{\delta_2}(\eta_0 \cos\psi_i - \xi_0 \sin\psi_i) = 0, \quad i = 1, 2. \end{array} \right. \quad (4)$$

Систему (4) в дальнейшем будем называть **приближенной**.

На рис. 2–5 представлено соответственно сравнение решений точной (2), укороченной (3) и приближенной (4) систем при заданных значениях параметров  $\nu$ ,  $\sigma$ ,  $c$  и  $c_\psi$  (расчеты проводились численными методами в пакете прикладных программ *Wolfram Mathematica*). На рис. 2–5 приняты следующие обозначения:  $A = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  — амплитуда колебаний точки  $C$  (пунктирная черная линия — решение точных уравнений, черная линия — укороченных, серая линия — приближенных),  $t$  — время,  $k = 10^5$ ,  $\varepsilon = 0,05$ ,  $\psi_1, \psi_2$  — отклонения балансировочных шариков.

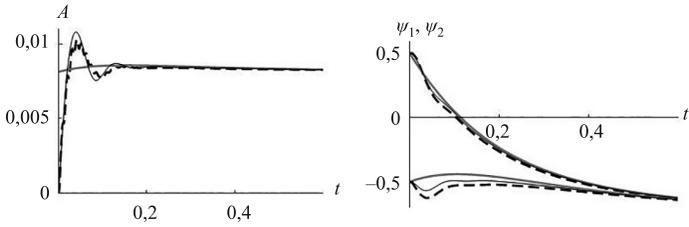


Рис. 2. Докритический режим ( $\nu = 0,8$ ;  $\sigma = 1,2$ ;  $c = 50$ ;  $c_\psi = 0,1$ )

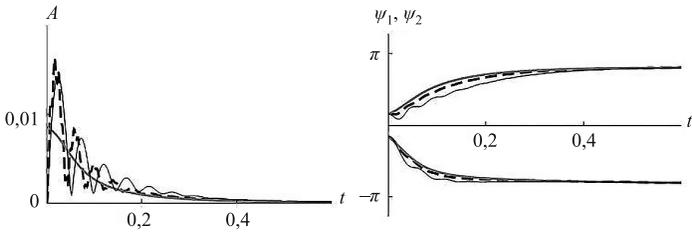


Рис. 3. Закритический режим ( $\nu = 1,5$ ;  $\sigma = 1,2$ ;  $c = 50$ ;  $c_\psi = 0,1$ )

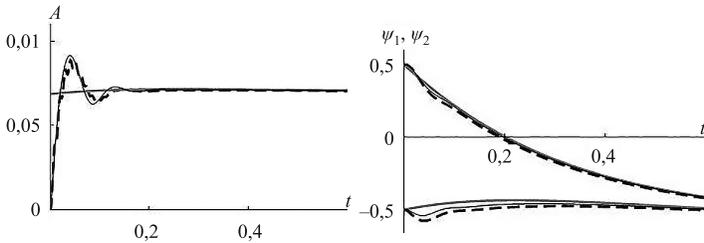


Рис. 4. Докритический режим ( $\nu = 0,8$ ;  $\sigma = 0,8$ ;  $c = 50$ ;  $c_\psi = 0,1$ )

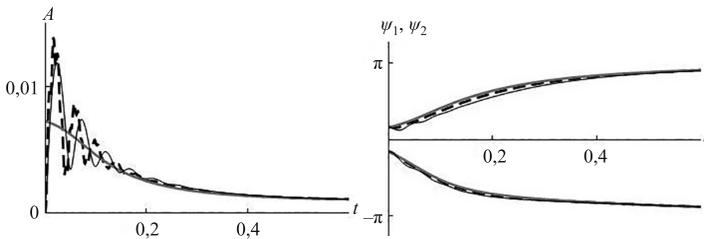


Рис. 5. Закритический режим ( $\nu = 1,5$ ;  $\sigma = 0,8$ ;  $c = 50$ ;  $c_\psi = 0,1$ )

Докритическим режимом назовем движение при  $\nu < 1$ , закри- тическим — движение при  $\nu > 1$ . Балансировочный коэффициент  $\sigma$  принят для сравнения как больше единицы, так и меньше. Из гра- фиков выше следует, что решения полученных систем уравнений (3) и (4) совпадают с решениями точных систем (2) практически сразу с момента начала движения.

#### 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ

Будем исследовать стационарные режимы движения ротора, ис- пользуя укороченные уравнения (3), на устойчивость по первому приближению методом Рауса. Устойчивость точных уравнений (2) исследована в работе [3].

Пусть  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$ ,  $\Delta\psi_1$ ,  $\Delta\psi_2$  — малые отклонения координат от ста- ционарных значений. Линеаризованные уравнения возмущенного движения в вариациях, если разложить левые части уравнения воз- мущенного движения в ряд и опустить слагаемые второго порядка малости, примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\dot{\xi} = -\frac{\delta_1}{2}(\xi_0 + \Delta\xi) - \frac{1 - \nu^2}{2\nu}(\eta_0 + \Delta\eta) + \\ + \frac{\mu\nu}{2 + 4\mu}(\cos \psi_{10}\Delta\psi_1 + \cos \psi_{20}\Delta\psi_2), \\ \Delta\dot{\eta} = -\frac{\delta_1}{2}(\eta_0 + \Delta\eta) + \frac{1 - \nu^2}{2\nu}(\xi_0 + \Delta\xi) - \\ - \frac{\mu\nu}{2 + 4\mu}(\sin \psi_{10}\Delta\psi_1 + \sin \psi_{20}\Delta\psi_2 + \varepsilon), \\ \Delta\dot{\psi}_{i0} = \frac{\mu\nu^2}{\delta_2}(\eta_0 \cos \psi_{i0} - \xi_0 \sin \psi_{i0}) + \\ + \Delta\eta \cos \psi_{i0} - \Delta\xi \sin \psi_{i0}, i = 1, 2. \end{array} \right. \quad (5)$$

##### 4.1. Сбалансированный стационарный режим

Подставим стационарные значения координат  $\xi_0 = \eta_0 = 0$  сба- лансированного режима в систему (5) и запишем все в матричном виде:

$$AZ + BZ = 0, Z = \{\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\psi_1, \Delta\psi_2\}^T.$$

Коэффициенты характеристического полинома

$$||AZ + BZ|| = \sum_{i=0}^4 a_i \lambda^{4-i}$$

имеют вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\delta_2^2}{\mu^2}, & a_1 &= \delta_1 \frac{\delta_2^2}{\mu^2}, & a_2 &= \frac{\delta_2^2 (1 + (\delta_1^2 - 2)\nu^2 + \nu^4)}{4\mu^2\nu^2}, \\ a_3 &= \frac{\delta_2\nu^2 (1 - \nu^2)}{2(1 + 2\mu)}, & a_4 &= \frac{\varepsilon^2 (4\mu^2 - \varepsilon^2)\nu^6}{16\mu^2 (1 + 2\mu)^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты Рауса  $c_{i,j}$  ( $i, j = 1, \dots, 4$ ) принимают вид:

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= a_0, & c_{1,2} &= a_1, & c_{2,1} &= a_2, & c_{2,2} &= a_3, & c_{3,1} &= c_{2,3} = a_4, \\ c_{1,3} &= a_2 - a_0 a_3 / a_1, & c_{1,4} &= a_3 - a_1^2 a_4 / (a_1 a_2 - a_0 a_3). \end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости сбалансированного режима является положительность всех коэффициентов  $c_{1,j}$  ( $j = 1, \dots, 4$ ). Коэффициенты  $a_1, \dots, a_4$  положительны при

$$\nu > 1, \quad \sigma = 2\mu/\varepsilon > 1. \quad (7)$$

Отсюда следует, что в докритической области частот и в закритической области при значении балансирующего коэффициента  $\sigma < 1$  сбалансированный режим неустойчив.

Сравнение диаграмм устойчивости для точной (2) (серая область [6]) и упрощенной (3) систем (заштрихованная область) в плоскости параметров  $\delta_1(\nu)$  и  $\delta_2(\nu)$  (рис. 6) при значениях параметров

$$c = 50, \quad c_\psi = 0,4, \quad k = 10^5, \quad \mu = m/M = 0,05, \quad \sigma = 1,2$$

показывает, что различие между ними проявляется только при малых коэффициентах демпфирования  $\delta_1$  и  $\delta_2$ .

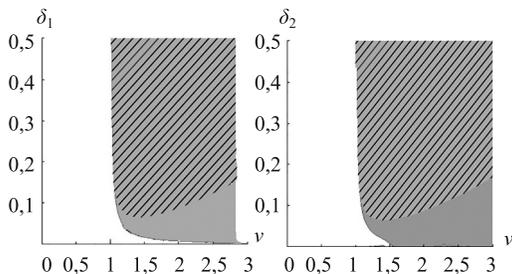


Рис. 6. Сравнение диаграмм устойчивости. Зависимость параметра  $\delta_2$  от  $\nu$  при двух различных балансировочных коэффициентах  $\delta_2$

#### 4.2. Несбалансированный стационарный режим

Если геометрический центр диска смещен относительно оси вала, то такой режим движения будет несбалансированным. Имеем три возможных типа несбалансированного режима: тип  $2^+$ , тип  $2^-$  и тип 3 (рис. 7). Для первого и второго шарики соприкасаются друг с другом. Третьим типом назван режим, при котором шарики располагаются на противоположных сторонах диска.

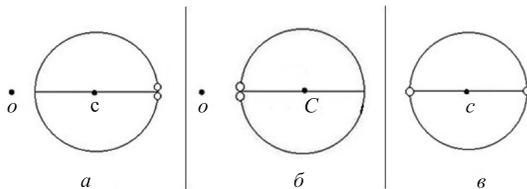


Рис. 7. Несбалансированные режимы систем: а — тип  $2^+$ , б — тип  $2^-$ , в — тип 3

Подставим стационарные значения координат для несбалансированного режима в (5). Ввиду громоздкости полученных уравнений приведем результаты анализа коэффициентов характеристического уравнения в виде графиков (рис. 8).

Тип  $2^+$ . На рис. 8 приведены диаграммы устойчивости в плоскости параметров  $\delta_2(\nu)$  при различных значениях балансировочного коэффициента  $\sigma$ .

Тип  $2^-$  и тип 3. Численные расчеты показывают, что эти режимы неустойчивы всегда, что совпадает с результатом, полученным при анализе точных уравнений (2) [3].

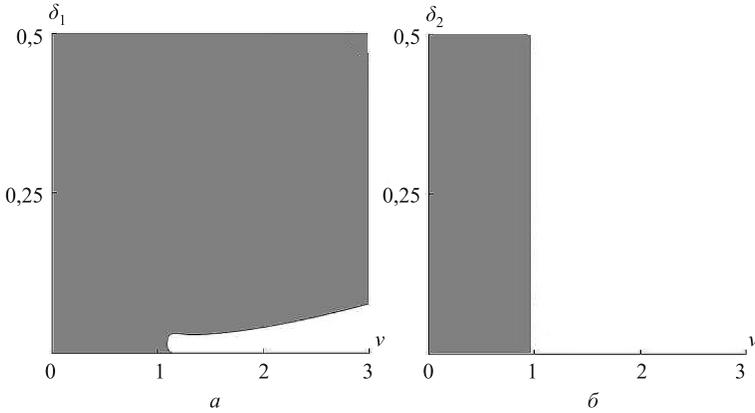


Рис. 8. Диаграммы устойчивости:  $c = 100$ ;  $c_\psi = 0,4$ ;  $\delta_1 = 0,1$ ;  
 $a - \sigma = 0,8$ ;  $b - \sigma = 1,2$

Анализ устойчивости на основе приближенных уравнений для шариков (4) был проведен аналогично. Автобалансировка сбалансированного режима возможна в закритической области ( $\nu > 1$ ) при балансировочном коэффициенте  $\sigma > 1$ . Несбалансированный режим типа  $2^+$  устойчив при  $\sigma > 1$  в докритической области частот ( $\nu < 1$ ), а режимы  $2^-$  и 3 неустойчивы всегда.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из точной системы дифференциальных уравнений восьмого порядка (2) совместно с предположением о медленности переменных получена укороченная система (3) четвертого порядка и приближенная система (4) второго порядка. Путем численного интегрирования установлено полное совпадение решений точной и упрощенных систем уже через несколько долей секунды после начала движения ротора. Также получены условия устойчивости стационарных режимов движения для систем (3) и (4). Вследствие про-

веденных расчетов можно сделать вывод о том, что при достаточно больших значениях коэффициентов внешнего демпфирования и демпфирования в АБУ (соответственно безразмерные коэффициенты  $\delta_1$  и  $\delta_2$ ) упрощенные модели не дают расхождений с точной моделью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Блехман И. И.* Синхронизации динамических систем. М.:Наука, 1971. 896 с.
2. *Genta D.* Dynamics of rotating systems. Springer, 2005. 658 с.
3. *Быков В. Г.* Стационарные режимы движения неуравновешенного ротора с автобалансирующим механизмом // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2006. Сер. 1. № 2. С. 90–101.
4. *Быков В. Г., Шелковина В. А.* Исследование динамики и устойчивости статически неуравновешенного ротора с автобалансирующим механизмом на основании упрощенной математической модели // Седьмые Поляховские чтения: тезисы докладов. 2015. С. 198.

# ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА МОЛЕКУЛ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА В ПОУРОВНЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

О. В. Корниенко

В работе изучается влияние переменного диаметра колебательно возбужденной молекулы на коэффициенты сдвиговой вязкости и теплоемкости в приближении поуровневой кинетики. Для разных потенциалов и температур в случае равновесного больцмановского колебательного распределения рассчитаны отношения поуровневых коэффициентов сдвиговой вязкости и теплоемкости к коэффициентам для газа, состоящего из невозбужденных молекул. Во всех рассмотренных случаях эффект увеличения размера молекулы с ростом колебательного уровня практически не влияет на вязкость и теплопроводность, отклонение не превышает 13%. Таким образом, доказана справедливость предположения о том, что при расчете поуровневых коэффициентов переноса зависимость сечения упругого столкновения от колебательного состояния можно не учитывать. Это позволяет обоснованно применять упрощенные алгоритмы расчета коэффициентов переноса в приближении поуровневой кинетики, заметно сокращающие требования к вычислительным ресурсам при решении задач неравновесной газовой динамики.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Приближение поуровневой кинетики является одним из наиболее точных методов описания сильнонеравновесных течений газов с внутренними степенями свободы и химическими реакциями [1]. Алгоритм расчета коэффициентов переноса в поуровневом приближении впервые был предложен в работе [2]. Одно из предположений, лежащих в основе алгоритма, состоит в том, что сечения упругих столкновений считаются не зависящими от колебательного состояния молекулы. Это предположение значительно упрощает расчеты поуровневых коэффициентов переноса, однако в работе [2]

---

Исследование выполнено при поддержке СПбГУ (НИР 6.37.206.2016) и РФФИ (грант 15-08-03371).

Доклад на семинаре 1 ноября 2016 г.

© О. В. Корниенко, 2016

не приводится строгого обоснования пределов его применимости. Более того, известно, что у возбужденных молекул сечение упругого столкновения заметно увеличивается [3–6], что может влиять на интегралы столкновений и коэффициенты переноса. Цель настоящей работы — оценить вклад возбужденных состояний в коэффициенты сдвиговой вязкости и теплопроводности молекул газов — компонентов воздуха на основании моделей потенциалов, учитывающих все возможные колебательные состояния на примере шести газов ( $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $NO$ ,  $HF$ ,  $Cl_2$ ) и равновесного больцмановского распределения. Для подсчета диаметров молекул использовались три потенциала: Канга—Кунца, Морзе и Тица—Хуа. В работе [7] подробно описаны формулы для диаметров молекул в случае каждого потенциала и на основе расчетов сделан следующий вывод: вращательное возбуждение слабо влияет на диаметр (в пределах 5 %), и потому его вкладом можно пренебречь. Далее в этой работе показано, что потенциал Канга—Кунца дает значительно завышенные результаты для диаметра на средних и высоких уровнях молекулы, поэтому использование его в расчетах возможно только для самых низких уровней (не выше десятого).

## 2. РАСЧЕТ ВЯЗКОСТИ

Строгий алгоритм расчета поуровневого коэффициента сдвиговой вязкости  $\eta$  в первом приближении метода Энскога—Чепмена описан в работе [2]. Для его вычисления решается система линейных алгебраических уравнений, коэффициентами которых являются интегральные скобки. Число уравнений в системе равно числу колебательных состояний в смеси, к которому прибавляется число атомарных компонентов. Интегральные скобки сводятся к стандартным  $\Omega$ -интегралам, вид которых определяется потенциалом молекулярного взаимодействия. Для большинства потенциалов не удастся вычислить аналитически  $\Omega$ -интегралы. Однако существует простая (и достаточно грубая) модель взаимодействия твердых сфер, для которой получены явные выражения для  $\Omega$ -интегралов, зависящие от квадрата диаметра молекул. Для однокомпонентного газа в работе [8] из точной системы уравнений была получена упрощенная система алгебраических уравнений. Отношение коэф-

коэффициентов вязкости задано формулой

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \sum_v \left( \frac{d_0}{d_v} \right)^2 b_v, \quad (1)$$

где  $d_v$  — диаметр молекулы на  $v$ -м колебательном уровне, а коэффициенты  $b_v$  определяются из системы линейных уравнений:

$$b_v \left( \sum_{w \neq v} \left( 1 + \frac{d_w}{d_v} \right)^2 \frac{x_w}{x_v} + 3 \right) - \frac{1}{4} b_w \sum_{w \neq v} \left( 1 + \frac{d_w}{d_v} \right)^2 = 3. \quad (2)$$

Для нивелирования ошибок, связанных с использованием при расчетах грубой модели твердых сфер, приводится значение величины  $\Delta$ , равной отклонению коэффициента вязкости  $\eta$ , вычисленного с учетом переменного диаметра молекулы, от коэффициента вязкости  $\eta_0$ , вычисленного в газе из невозбужденных молекул:

$$\Delta = \left( 1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right) 100 \%. \quad (3)$$

Анализируя данные, приведенные в табл. 1, можно отметить, что разница между значениями, полученными при использовании потенциалов Морзе и Тица—Хуа, весьма незначительна и не превышает 3%. Следовательно, использование более сложного потенциала Тица—Хуа не уточняет результат, и достаточно ограничиться более простым потенциалом Морзе. В целом можно утверждать, что влиянием диаметра возбужденной частицы на коэффициент сдвиговой вязкости можно пренебречь для всех рассмотренных газов, поскольку наибольшие значения  $\Delta$  не превышают 13%.

### 3. ВЛИЯНИЕ ВЫБОРА ПОТЕНЦИАЛА НА ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Интересно исследовать влияние потенциала не только на диаметр возбужденной частицы, но и на вклад в удельную теплоемкость вращательных степеней свободы при постоянном объеме, необходимый для расчета теплопроводности.

Таблица 1. Отклонение  $\Delta$  [%] коэффициента вязкости  
в случае равновесных распределений

$T, 10^3 \text{ K}$	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20,0
$\text{H}_2$	0,33	1,50	3,16	4,99	6,67	8,10	9,28	10,24
	0,39	1,80	3,86	6,17	8,32	10,16	11,67	12,90
$\text{O}_2$	0,45	1,25	2,20	3,28	4,33	5,29	6,13	6,84
	0,46	1,28	2,26	3,35	4,43	5,42	6,28	7,02
$\text{N}_2$	0,19	0,58	1,023	1,52	2,06	2,65	3,27	3,90
	0,18	0,56	0,98	1,45	1,97	2,453	3,12	3,72
$\text{NO}$	0,32	0,91	1,60	2,39	3,23	4,06	4,84	5,54
	0,32	0,91	1,61	2,40	3,25	4,09	4,87	5,58
$\text{Cl}_2$	1,65	4,10	6,45	8,22	9,51	10,44	11,15	11,70
	1,48	3,63	5,66	7,19	8,28	9,09	9,67	10,15
$\text{HF}$	0,22	0,93	1,97	3,42	5,13	6,90	8,52	9,97
	0,24	1,06	2,28	4,06	6,24	8,51	10,64	12,53

Примечание. Верхняя и нижняя строки — данные, полученные при использовании потенциалов Тица—Хуа и Морзе соответственно.

Вращательная составляющая теплоемкости молекулы на колебательном уровне  $v$  определяется теоретической формулой

$$c_{rot,v} = \frac{\partial U_{rot,v}}{\partial T}, \quad (4)$$

где  $U_{rot,v}$  — удельная вращательного энергия для колебательного уровня  $v$ . При этом

$$\rho U_{rot,v} = \sum_j E_{v,j} n_j,$$

где  $n_j$  — числовая плотность молекул на вращательном уровне ( $j$ ),  $E_{v,j}$  — энергия колебательного ( $v$ ) и вращательного ( $j$ ) уровней,  $\rho$  — плотность. С учетом равновесного бoльцмановского распределения

формула (4) принимает вид

$$c_{rot,v} = \frac{\overline{E_{v,j}^2} - \overline{E_{v,j}}^2}{mkT^2}. \quad (5)$$

Здесь чертой обозначена операция осреднения:

$$\overline{E_{v,j}} = \frac{\sum_j E_{v,j} (2j+1) \exp\left(\frac{-E_{v,j}}{kT}\right)}{\sum_j (2j+1) \exp\left(\frac{-E_{v,j}}{kT}\right)}.$$

Для сравнения были выбраны две модели потенциалов. Для первой — жесткого ротатора — энергия и, соответственно, вращательная компонента теплоемкости не зависят от колебательного уровня

$$E_j = \frac{j(j+1)\hbar^2}{2\mu d^2}, \quad (6)$$

для второй — Морзе — выбрано условие  $v = 0$ :

$$\begin{aligned} E_{v,j}^M &= D + \hbar^2 A j(j+1) - \left[ \frac{\beta \hbar (v+1/2)}{(2\mu)^{1/2}} - \frac{2D - \hbar^2 B j(j+1)}{2(D - \hbar^2 C j(j+1))^{1/2}} \right]^2, \\ A &= \frac{1}{2\mu R_e^2} \left[ 1 - \frac{3}{\beta R_e} \left( 1 - \frac{1}{\beta R_e} \right) \right], \\ B &= \frac{2}{\mu \beta R_e^3} \left( 1 - \frac{3}{2\beta R_e} \right), \\ C &= \frac{1}{2\mu \beta R_e^3} \left( 1 - \frac{3}{\beta R_e} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $D$  — энергия диссоциации,  $\beta$  — константа Морзе,  $\mu$  — приведенная масса молекулы,  $R_e$  — равновесный радиус. Отметим, что в большинстве расчетов при температурах выше комнатной вращательную теплоемкость считают постоянной:  $c_{rot} = k/m$ . Однако, как показали наши расчеты, при высоких температурах, реализующихся, например, за фронтом сильной ударной волны, данное предположение не выполняется.

Проанализируем изменение безразмерной вращательной теплоемкости, отнесенной к величине  $k/m$ :

$$\bar{c}_{rot,v=0} = \bar{c}_{rot} = \frac{c_{rot}}{k/m}.$$

На рис. 1 (см. цв. вклейку) показано сравнение наших результатов с данными, приведенными в статье [9]. К сожалению, последние представлены только в графическом варианте, а потому точно определить величину  $\bar{c}_{rot}$  невозможно. Однако можно увидеть качественное изменение функции  $\bar{c}_{rot}(T)$ , подтверждающее наши результаты. Заметно, что результаты, полученные для модели жесткого ротатора (Rigid, пунктир) и Морзе (Morse, штрих-пунктир) весьма близки. Похожая картина прослеживается для азота и его оксида.

Интересно отметить убывание теплоемкости с ростом температуры. Это вызвано замедлением роста  $U_{rot,v}$  с увеличением температуры (см. рис. 2 на цв. вклейке).

#### 4. РАСЧЕТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

По аналогии с расчетом вязкости при расчете теплопроводности также рассматривается  $\Delta$  — отклонение, выраженное в процентах.

$$\Delta = \left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda_0}\right) 100\% = \left(1 - \frac{80}{99} \sum_{i=0}^{i_{max}} \left(\frac{d_0}{d_i}\right)^2 \left[a_i^{10} + \frac{2}{5}a_i^{01}\right]\right) 100\%. \quad (7)$$

Подробный алгоритм расчета приведен в работе [10]. Коэффициенты  $a_i^{10}$  и  $a_i^{01}$  находятся из систем линейных уравнений:

$$-\frac{13}{2} \sum_{k \neq i} \left(1 + \frac{d_i}{d_k}\right) a_k^{10} + a_i^{10} \left[ \frac{29}{2} \sum_{k \neq i} \frac{x_k}{x_i} \left(1 + \frac{d_i}{d_k}\right)^2 + 32 \right] = 30, \quad (8)$$

$$a_i^{01} \left[ \sum_{k \neq i} \frac{x_k}{x_i} \left(1 + \frac{d_i}{d_k}\right) + 4 \right] = 3. \quad (9)$$

Здесь следует уточнить, что при расчетах использовалась постоянная теплоемкость, без учета результатов, полученных в разделе 4. Это объясняется тем, что заметное убывание теплоемкости начинается при температуре свыше  $10^4$  К, при которой молекулы обычно диссоциированы. В диапазоне до  $10^4$  К серьезного падения вращательной компоненты теплоемкости не наблюдается. Анализ

Таблица 2. Отклонение  $\Delta$  [%] коэффициента теплопроводности в случае равновесных распределений

T, 10 <sup>3</sup> K	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20
<i>H</i> <sub>2</sub>	0,33	1,50	3,16	5,00	6,69	8,13	9,31	10,27
	0,39	1,80	3,86	6,19	8,35	10,20	11,71	12,95
<i>O</i> <sub>2</sub>	0,45	1,25	2,21	3,28	4,34	5,30	6,14	6,85
	0,46	1,27	2,26	3,35	4,44	5,43	6,30	7,03
<i>N</i> <sub>2</sub>	0,19	0,58	1,03	1,52	2,06	2,65	6,27	3,90
	0,18	0,56	0,98	1,45	1,97	2,53	3,12	3,72
<i>NO</i>	0,32	0,91	1,60	2,39	3,25	4,11	4,91	5,64
	0,32	0,91	1,61	2,41	3,27	4,13	4,94	5,68
<i>Cl</i> <sub>2</sub>	1,65	4,10	6,46	8,24	9,53	10,47	11,17	11,72
	1,48	3,64	5,67	7,20	8,30	9,10	9,70	10,17
<i>HF</i>	0,22	0,93	1,97	3,42	5,15	6,92	8,56	10,00
	0,24	1,06	2,29	4,07	6,27	8,56	10,71	12,61

данных, приведенных в табл. 2, подтверждает результаты, полученные в табл. 1 и приводит к тем же выводам: влияние диаметра возбужденной молекулы достаточно незначительно и не превышает 13 %.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено влияние колебательного возбуждения молекулы на коэффициенты переноса — вязкость и теплопроводность — на примере шести двухатомных газов. Приведено сравнение двух потенциалов — Тица—Хуа и Морзе, показано незначительное различие их между собой. Влияние диаметра возбужденных молекул не превышает 13 % для обоих коэффициентов, следовательно, вкладом возбужденных состояний при подсчете коэффициента сдвиговой вязкости и теплопроводности можно пренебречь. Данный результат заметно упрощает алгоритм расчета коэффициента вязкости в неравновесных течениях с колебательной релаксацией.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Нагнибеда Е. А., Кустова Е. В.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003. 272 с.
2. *Kustova E. V., Nagnibeda E. A.* Transport properties of a reacting gas mixture with strong vibrational and chemical nonequilibrium // *Chem. Phys.* 1998. Vol. 233. P. 57–75.
3. *Kang S. H., Kunc J. A.* Molecular diameters in high-temperature gases // *J. Phys. Chem.* 1991. Vol. 95. P. 6971–6973.
4. *Gorbachev Yu. E., Gordillo-Vazques F. J., Kunc J. A.* Diameters of rotationally and vibrationally excited diatomic molecules // *Physica A.* 1997. Vol. 247. P. 108–120.
5. *Gordillo-Vazquez F. J., Kunc J. A.* Rotational-Vibrational levels of diatomic molecules represented by the Tietz–Hua rotating oscillator // *J. Phys. Chem.* 1997. Vol. 101. P. 1595–1602.
6. *Gordillo-Vazquez F. J., Kunc J. A.* Radial probability of atoms in diatomic molecules represented by the rotating Morse and Tietz–Hua oscillators // *J. Theo. Chem.* 1998. Vol. 425. P. 263–270.
7. *Корниенко О. В., Кустова Е. В.* Влияние переменного диаметра молекул на коэффициент вязкости в поуровневом приближении // *Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия.* 2016. Т. 3 (61). С. 457–468.
8. *Kustova E. V., Kremer G. M.* Effect of molecular diameters on state-to-state transport properties: the shear viscosity coefficient // *Chem. Phys. Lett.* 2015. Vol. 636. P. 84–89.
9. *Jaffe R. L.* The calculation of high-temperature equilibrium and nonequilibrium specific heat data for N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub> and NO // *AIAA Paper 87-1633, AIAA 22<sup>nd</sup> Thermophys. Conf.*, 1987.
10. *Kustova E. V., Kremer G. M.* Influence of state-to-state vibrational distributions on transport coefficients of a single gas // *AIP Conf. Proc.* 1786, 070002 (2016). doi: 10.1063/1.4967578

# УПРАВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ В НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

В работе изучаются вопросы существования и построения режимов управляемого резонанса в нелинейных механических системах с несколькими степенями свободы. Такой резонанс можно трактовать как авторезонанс, поскольку управляющие воздействия в системе строятся по принципу обратной связи. Основным объектом исследования выступает двойной математический маятник, хотя предлагаемая методика пригодна и для других систем. Формируется так называемое коллинеарное управление движением системы, являющееся кинетическим, т. е. учитывающим динамические особенности конструкции. Это управление не нарушает форм колебаний линеаризованной системы, а лишь усиливает их амплитуды. Путем такого управления можно раскачивать двойной маятник по каждой из форм его свободных колебаний в отдельности, задавая соответствующие начальные условия, ввиду чего вся подводимая энергия полностью идет на возбуждение только одной формы колебаний. Однако столь гибкое управление формами колебаний возможно лишь в линейной системе, в которой и существует их классическое определение. Тем не менее на основе коллинеарного управления можно проанализировать дрейф форм и частот резонансных колебаний при плавном переходе из линейной зоны в нелинейную. Для аналитического описания нелинейных одночастотных колебаний строятся асимптотические формулы, которые вполне адекватно отражают поведение системы при достаточно больших амплитудах и неплохо соотносятся с результатами, полученными путем численного интегрирования уравнений движения.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Термин «резонанс» имеет довольно длинную историю, начинающуюся с пионерских работ Галилея и Гюйгенса. Однако вплоть до настоящего времени для него нет достаточно строгого и всеобъемлющего определения. В существующей литературе по теории колебаний механических систем обычно рассматривается явление резонанса либо в линейных системах с одной или несколькими сте-

пенями свободы, либо нелинейный резонанс в системе с одной степенью свободы [1, 2]. Как правило, в обоих случаях резонансное возбуждение осциллятора предполагается гармоническим. Частота и амплитуда такого возбуждения определяются некоторой заданной программой. В этих условиях основной оценкой подобного резонанса служит его амплитудно-частотная характеристика [3].

Однако наибольший практический интерес представляет иной режим возбуждения резонансных колебаний, при котором частота возбуждения не предписывается извне, а поступает на привод возбуждения как сигнал контура обратной связи осциллятора. В результате частота и фаза этого сигнала точно соответствуют текущей частоте и фазе осциллятора, ввиду чего вся поступающая в систему энергия передается осциллятору [4]. Возникающий при этом режим нарастающих колебаний осциллятора получил в литературе название авторезонанса, и он тесно связан с именем А. А. Андропова [5]. К сожалению, этот термин не нашел столь широкого применения, как другой термин Андропова — «автоколебания». Тем не менее в последние два-три десятилетия интерес к понятию авторезонанса стал возрастать [6, 7]. Это и неудивительно, так как именно режим авторезонанса выявляет наиболее важные свойства многочисленных резонансных эффектов в физике, механике и других областях. При этом авторезонанс также позволяет осциллятору плавно переходить из линейной стадии в нелинейную.

Главной трудностью при практической реализации авторезонанса является необходимость использовать контур обратной связи для того, чтобы формировать требуемый закон управления приводом. Еще более серьезные трудности возникают в механических системах с несколькими колебательными степенями свободы, т. е. с несколькими собственными частотами, которые с ростом амплитуд начинают дрейфовать. В этом случае для резонансного разгона системы следует построить такое управление, путем которого можно было бы наращивать колебания по одной из ее форм свободных колебаний. В противном случае вводимая в систему энергия пойдет на возбуждение сразу всех форм, что приведет к резкому снижению резонансных свойств управления и качества процессов разгона.

Основной целью настоящей работы является обобщение авторезонансного режима колебаний осциллятора на механическую систе-

му с несколькими степенями свободы посредством использования режима так называемого коллинеарного управления [8–11].

## 2. КОНСЕРВАТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА

В качестве объекта исследования возьмем простейшую механическую систему с двумя степенями свободы — двойной математический маятник [12]. Для простоты будем полагать, что массы концевых грузов одинаковы и равны  $m$ , длины звеньев маятника также одинаковы и равны  $l$  (рис. 1).

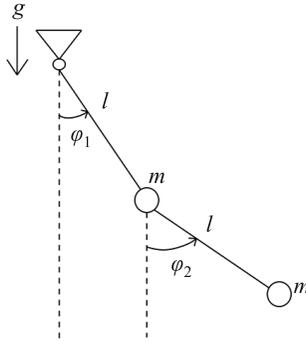


Рис. 1. Двойной маятник

Кинетическая  $T$  и потенциальная энергия  $\Pi$  системы определяются выражениями [13]:

$$T(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} ml^2 [2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^T \mathbf{A}(\varphi) \dot{\varphi},$$

$$\Pi(\varphi) = mg[2(1 - \cos \varphi_1) + (1 - \cos \varphi_2)],$$

где  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T$  — столбец обобщенных координат системы, а симметричная матрица  $\mathbf{A}$  есть

$$\mathbf{A}(\varphi) = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

Нелинейное уравнение движения системы можно записать в виде

$$\mathbf{A}(\varphi)\ddot{\varphi} + \mathbf{G}(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \mathbf{C}(\varphi) = 0, \quad (1)$$

где  $\dot{\varphi}^2 = [\dot{\varphi}_1^2, \dot{\varphi}_2^2]^T$ , а кососимметричная матрица  $\mathbf{G}$  и столбец  $\mathbf{C}$  определяются формулами

$$\mathbf{G}(\varphi) = ml^2 \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = -\mathbf{G}^T,$$

$$\mathbf{C}(\varphi) = mgl \begin{bmatrix} 2 \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  достаточно малы. Линеаризуя (1), получаем [14]

$$\mathbf{A}_0\ddot{\varphi} + \mathbf{C}_0\varphi = 0, \quad (2)$$

где постоянные матрицы инерционных коэффициентов  $\mathbf{A}_0$  и квазиупругих коэффициентов  $\mathbf{C}_0$  имеют представления:

$$\mathbf{A}_0 = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Разыскивая решение (2) в виде  $\varphi = \Phi \cos(k_0 t + \alpha)$  и выписывая частотное уравнение этой системы

$$\det(\mathbf{C}_0 - k_0^2 \mathbf{A}_0) = 0, \quad (3)$$

находим ее собственные частоты  $k_{10}$  и  $k_{20}$  и собственные формы  $\Phi_{(1)}$  и  $\Phi_{(2)}$  свободных колебаний [15]:

$$k_{10} = k\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad k_{20} = k\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \Phi_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

где  $k = \sqrt{g/l}$ .

Нетрудно понять, что для реализации одночастотных колебаний системы по одной из форм колебаний следует выбирать столбцы начальных значений  $\varphi_0$  и  $\dot{\varphi}_0$  пропорционально этой форме.

### 3. УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА

Предположим теперь, что в системе действует столбец управляющих моментов  $\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2]^T$ . В этом случае имеет место следующее соотношение энергетического баланса:

$$\dot{E} = \dot{\varphi}^T \mathbf{Q}, \quad (4)$$

где  $E = T + \Pi$  — полная механическая энергия системы.

Отсюда видно, что для нарастания энергии необходимо выбирать столбец управляющих моментов  $\mathbf{Q}$  так, чтобы было выполнено условие  $\dot{\varphi}^T \mathbf{Q} \geq 0$ . Очевидно, что можно подобрать множество таких управлений. Однако далеко не все они будут обладать требуемыми резонансными свойствами, которые позволили бы передавать всю подводимую энергию на возбуждение только одной формы колебаний  $\Phi_{(1)}$  или  $\Phi_{(2)}$ . Таким свойством обладают управляющие моменты, построенные по принципу коллинеарного управления [8, 9].

В многомерной механической системе условие коллинеарности означает пропорциональность столбца управляющих воздействий  $\mathbf{Q}$  столбцу обобщенных импульсов системы  $\mathbf{K} = \partial T / \partial \dot{\varphi}$  [10, 11]:

$$\mathbf{Q} = \gamma \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \gamma \mathbf{A}(\varphi) \dot{\varphi}, \quad (5)$$

где величина  $\gamma$ , играющая роль коэффициента усиления, в общем случае может быть функцией времени. Для простоты далее полагаем  $\gamma = \text{const}$ . Из структуры управления (5) видно, что оно является кинетическим, имитирующим обобщенные силы инерции [10].

Выражение (4) в этом случае приводится к виду

$$\dot{E} = \dot{\varphi}^T \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2\gamma T,$$

и поэтому при  $\gamma > 0$  энергия системы будет монотонно нарастать, что обеспечивает раскачивание двойного маятника. Уравнение управляемого движения двойного маятника тогда будут иметь вид

$$\mathbf{A}(\varphi)(\ddot{\varphi} - \gamma \dot{\varphi}) + \mathbf{G}(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \mathbf{C}(\varphi) = 0. \quad (6)$$

Линеаризуя полученное матричное уравнение, находим

$$\mathbf{A}_0(\ddot{\varphi} - \gamma\dot{\varphi}) + \mathbf{C}_0\varphi = 0.$$

Разыскивая его решение в виде  $\varphi = \Phi e^{\lambda t}$  и выписывая характеристический определитель этой системы

$$\det[\mathbf{C}_0 + (\lambda^2 - \gamma\lambda)\mathbf{A}_0] = 0,$$

а затем сопоставляя его с (3), устанавливаем, что решения этого уравнения удовлетворяют соотношениям:

$$\lambda^2 - \gamma\lambda + k_{10}^2 = 0, \quad \lambda^2 - \gamma\lambda + k_{20}^2 = 0, \quad (7)$$

а формы колебаний управляемой системы остаются такими же, как в исходной консервативной системе. При малых значениях  $\gamma$  уравнения (7) имеют комплексно-сопряженные корни:

$$\lambda_{1,2} = \delta \pm ik_1, \quad \lambda_{3,4} = \delta \pm ik_2,$$

где приняты следующие обозначения:

$$\delta = \frac{\gamma}{2}, \quad k_1 = \sqrt{k_{10}^2 - \delta^2}, \quad k_2 = \sqrt{k_{20}^2 - \delta^2}.$$

Ясно, что вещественная часть собственных значений  $\lambda_{1,2}$ , равная  $\delta$ , определяет показатель экспоненты в решении, а их мнимые части  $k_1$  и  $k_2$  — частоты колебаний с учетом управления.

Таким образом, коллинеарное управление в линейной математической модели не нарушает форм колебаний консервативной системы, а лишь усиливает их амплитуды. Поэтому при его помощи можно по отдельности раскачивать маятник как по первой, так и по второй форме колебаний, задавая соответствующие начальные условия. Ясно, что при больших углах уже будет сказываться наличие нелинейных слагаемых в уравнениях (6), и линейная теория не будет давать адекватных результатов. При этом будет происходить плавный переход из линейной области в область нелинейную.

Если в некоторый момент времени управление отключить, т. е. положить  $\gamma = 0$ , то двойной маятник перейдет в режим консервативного движения. Этот режим и является основным предметом

дальнейшего исследования. Важно отметить, что в нелинейных системах со многими степенями свободы не может существовать строго одночастотных режимов, как в линейных системах. Тем не менее можно предположить, что конечный консервативный режим будет близким к одночастотному, если в момент отключения управления еще не слишком велики отклонения звеньев маятника.

Чтобы убедиться в существовании таких режимов, рассмотрим процессы раскачивания двойного маятника по первой и второй форме колебаний, начиная с малых отклонений. Для этого обратимся к системе (6) и численно проинтегрируем эти уравнения, разрешая их относительно столбца обобщенных ускорений [16]. При этом будем задавать начальные условия по формам колебаний линейной модели.

По рис. 2 и 3 видно, что отключение управления в каждом из случаев действительно приводит к консервативному режиму, в котором обе обобщенные координаты изменяются периодически.

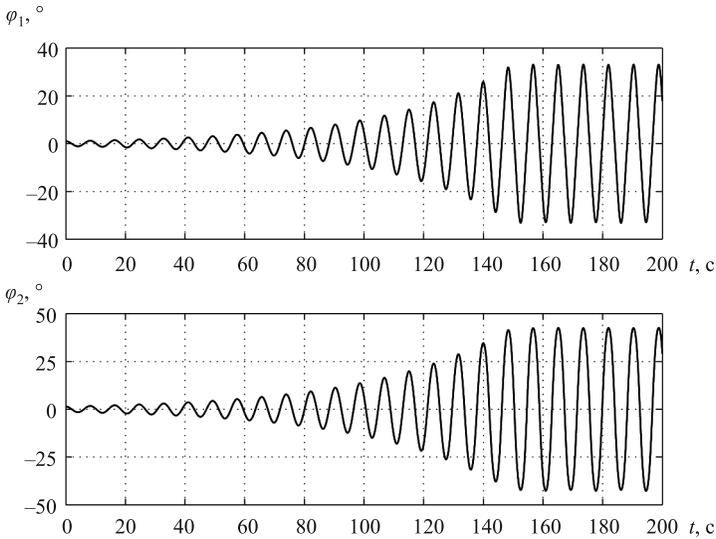


Рис. 2. Раскачивание двойного маятника по первой форме

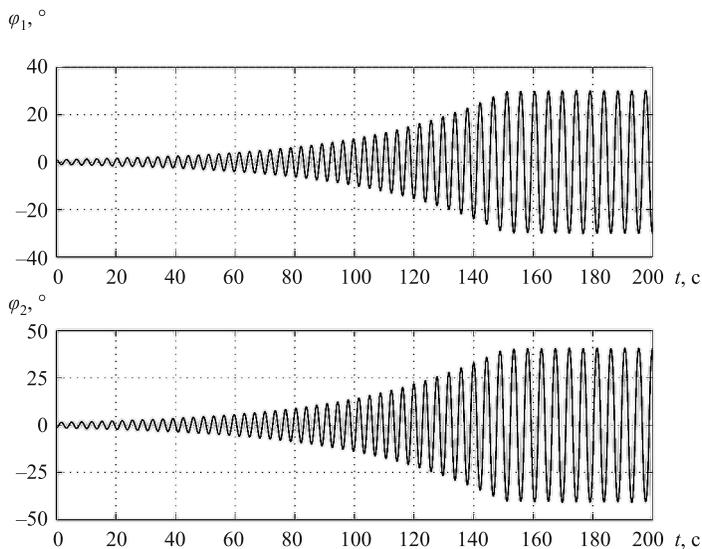


Рис. 3. Раскачивание двойного маятника по второй форме

При этом по значениям углов отклонения ясно, что эти колебания нелинейны. Поэтому задача поиска одночастотных режимов в нелинейных системах является вполне осмысленной.

Полученные режимы естественно назвать первой и второй формами колебаний нелинейной системы по аналогии с формами колебаний линейной системы. В дальнейшем мы перейдем от форм колебаний линейной системы к формам колебаний нелинейной системы.

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА

Для исследования одночастотных консервативных режимов используем асимптотические методы нелинейной механики [17]. С этой целью перепишем уравнения движения (1) в виде

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\varphi} + \mathbf{C}_0 \varphi = \mathbf{Q}, \quad (8)$$

где столбец  $\mathbf{Q}$ , который можно трактовать как столбец возмущающих сил, действующих в линейной системе (2), примет вид

$$\mathbf{Q} = ml^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_2^2 \\ -\dot{\varphi}_1^2 \end{bmatrix} + mgl \begin{bmatrix} 2(\varphi_1 - \sin \varphi_1) \\ \varphi_2 - \sin \varphi_2 \end{bmatrix} + ml^2 (1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{bmatrix}.$$

Раскладывая тригонометрические функции, входящие в  $\mathbf{Q}$ , в ряды Тейлора, и удерживая первые два слагаемых, получим

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(I)} + \mathbf{Q}^{(II)},$$

где столбец  $\mathbf{Q}^{(I)}$  содержит слагаемые третьего порядка малости по обобщенным координатам, скоростям и ускорениям, а  $\mathbf{Q}^{(II)}$  — пятого порядка. Осуществленные разложения позволяют построить первые два приближения к точному численному решению.

Рассмотрим сначала первую форму колебаний. Чтобы найти первое приближение к значению частоты при движении по первой форме, достаточно принять решение в виде

$$\varphi = \Phi_{(1)} a \cos \psi, \quad (9)$$

где  $a$  является постоянной величиной, а искомая частота колебаний зависит от  $a$ .

Эту зависимость следует определить из уравнения гармонического баланса по данной форме колебаний  $\Phi_{(1)}$  [18]:

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{(1)}^T [\mathbf{A}_0 \ddot{\varphi} + \mathbf{C}_0 \dot{\varphi} - \mathbf{Q}] \cos \psi \, d\psi = 0. \quad (10)$$

Решая это уравнение с точностью до величин третьего порядка малости, находим

$$\dot{\psi} = k_1^{(I)}(a) = k_{10} \left( 1 - \frac{31 - 20\sqrt{2}}{32} a^2 \right) \approx k_{10} (1 - 0,0849a^2), \quad (11)$$

где  $k_1^{(1)}$  — частота колебаний в первом приближении. Чтобы решить уравнение (8) с точностью до третьего порядка малости, следует учесть так называемое регуляризованное колебание, возбуждаемое силой  $\mathbf{Q}$ , с данной точностью, а затем сложить его с (9):

$$\varphi = \left( \Phi_{(1)} a + \alpha_1^{(1)} a^3 \right) \cos \psi + \alpha_3^{(1)} a^3 \cos 3\psi, \quad (12)$$

где столбцы  $\alpha_1^{(1)}$  и  $\alpha_3^{(1)}$  имеют вид:

$$\alpha_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}-1}{32} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{32} \end{bmatrix}, \quad \alpha_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{552\sqrt{2}-437}{2\,688} \\ -\frac{781\sqrt{2}-576}{2\,688} \end{bmatrix}.$$

Отсюда можно определить амплитуды колебаний звеньев в зависимости от параметра  $a$ . В самом деле, углы отклонения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  максимальны, когда  $\psi = 0$ , и они равны:

$$A_1(a) = a + \frac{468\sqrt{2}-353}{2\,688} a^3, \quad A_2(a) = \sqrt{2}a - \frac{865\sqrt{2}-744}{2\,688} a^3. \quad (13)$$

Отметим, что помимо точки экстремума  $\psi = 0$  на периоде фазы  $\psi$  у углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  могут существовать и другие точки экстремума, однако они имеют место при больших значениях  $a$ , когда влияние третьей гармоники в (12) оказывается существенным.

Таким образом, из (12) видно, что при учете нелинейных слагаемых в уравнениях движения решение является периодическим, но уже не чисто гармоническим, а представляет собой сумму нескольких гармонических составляющих. В отличие от линейной формы колебаний, здесь отношение амплитуд колебаний углов не определяет полностью форму нелинейных колебаний, но тем не менее является ее важной характеристикой. Представляет интерес оценить, как меняется это отношение с увеличением  $a$ . Обозначим его  $\mu_1(a) = A_2/A_1$ . Составим выражение для  $\mu_1$  посредством (13), а затем разложим его в ряд по  $a$ , удерживая лишь одну поправку:

$$\mu_1(a) = \mu_{10} \left( 1 - \frac{16+3\sqrt{2}}{84} a^2 \right) \approx \mu_{10} (1 - 0,2410a^2). \quad (14)$$

Здесь  $\mu_{10} = \sqrt{2}$  — соотношение амплитуд колебаний в линейной модели. Видно, что при увеличении параметра  $a$  в относительно небольшом диапазоне соотношение между амплитудами падает.

Второе приближение строится аналогично первому, однако при этом возникают трудности вычислительного характера, связанные с громоздкостью формул [18]. Поэтому приведем здесь лишь конечные результаты. Решая уравнение (10) с точностью до величин пятого порядка малости, находим частоту колебаний во втором приближении  $k_1^{(II)}$ :

$$k_1^{(II)}(a) = k_{10} \left( 1 - \frac{31 - 20\sqrt{2}}{32} a^2 + \frac{113\,415 - 79\,872\sqrt{2}}{28\,672} a^4 \right) \approx k_{10}(1 - 0,0849a^2 + 0,01604a^4). \quad (15)$$

Решение с точностью до пятого порядка малости будет

$$\varphi = \left( \Phi_{(1)} a + \alpha_1^{(I)} a^3 + \alpha_1^{(II)} a^5 \right) \cos \psi + \left( \alpha_3^{(I)} a^3 + \alpha_3^{(II)} a^5 \right) \cos 3\psi + \alpha_5^{(II)} a^5 \cos 5\psi, \quad (16)$$

где столбцы  $\alpha_1^{(II)}$ ,  $\alpha_3^{(II)}$  и  $\alpha_5^{(II)}$  имеют представления:

$$\alpha_1^{(II)} = \begin{bmatrix} \frac{1\,375\sqrt{2} + 233}{28\,672} \\ -\frac{233\sqrt{2} + 2\,750}{28\,672} \end{bmatrix}, \quad \alpha_3^{(II)} = \begin{bmatrix} \frac{812\,575 - 535\,236\sqrt{2}}{802\,816} \\ -\frac{1\,148\,584 - 756\,783\sqrt{2}}{802\,816} \end{bmatrix},$$

$$\alpha_5^{(II)} = \begin{bmatrix} -\frac{2\,255\,280\sqrt{2} - 2\,911\,491}{9\,748\,480} \\ \frac{3\,111\,099\sqrt{2} - 4\,066\,960}{9\,748\,480} \end{bmatrix}.$$

Определим вновь максимальные углы отклонения согласно (16), которые достигаются при  $\psi = 0$ . Их значения равны:

$$A_1(a) = a + \frac{468\sqrt{2} - 353}{2688}a^3 + \frac{22\,500\,963 - 14\,502\,380\sqrt{2}}{17\,059\,840}a^5,$$

$$A_2(a) = \sqrt{2}a - \frac{865\sqrt{2} - 744}{2688}a^3 - \frac{33\,160\,840 - 21\,387\,427\sqrt{2}}{17\,059\,840}a^5. \quad (17)$$

Наконец, запишем выражение для соотношения амплитуд колебаний, раскладывая его в ряд и удерживая уже два слагаемых:

$$\mu_1(a) = \mu_{10} \left( 1 - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{84}a^2 - \frac{895\,665\sqrt{2} + 747\,064}{9\,596\,000}a^4 \right) \approx \quad (18)$$

$$\approx \mu_{10}(1 - 0,2410a^2 - 0,2099a^4).$$

Формула (18) уточняет выражение (14) и дает представление о первой форме колебаний при более существенных углах отклонения.

Обратимся к выражениям для частоты в первом (11) и втором (15) приближениях и построим зависимость безразмерной частоты  $k_1/k_{10}$  от амплитуды колебаний первого звена  $A_1$  (13) и (17). В каждом случае мы имеем параметрическую зависимость частоты от этой амплитуды посредством применения промежуточного параметра  $a$ .

Теперь обратимся к выражениям для соотношения амплитуд в первом (14) и втором (18) приближениях и построим зависимость  $\mu_1/\mu_{10}$  от амплитуды колебаний первого звена  $A_1$  (13) и (17). В каждом из случаев аналитические результаты сопоставляются с результатами, полученными путем численного интегрирования. Для этого следует раскачать двойной маятник коллинеарным управлением с малых колебаний, отвечающих первой линейной форме, до некоторых амплитуд и отключить управление, как это показано на рис. 2, после чего определить частоту колебаний.

По рис. 4 и 5 видно, что аналитические и численные результаты очень хорошо соотносятся друг с другом, при этом каждое следующее приближение уточняет результаты. С увеличением амплитуд частота меняется в достаточно небольшом диапазоне, а соотношение амплитуд падает с их увеличением, изменяясь более существенно, чем частота. Таким образом, полученные выше формулы дают асимптотически правильные результаты.

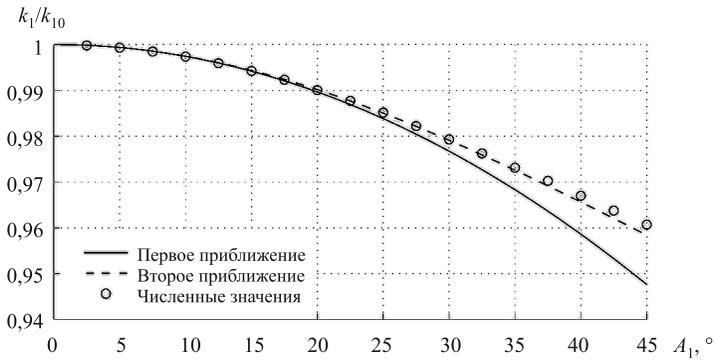


Рис. 4. Зависимость частоты от амплитуды колебаний первого звена (первая форма)

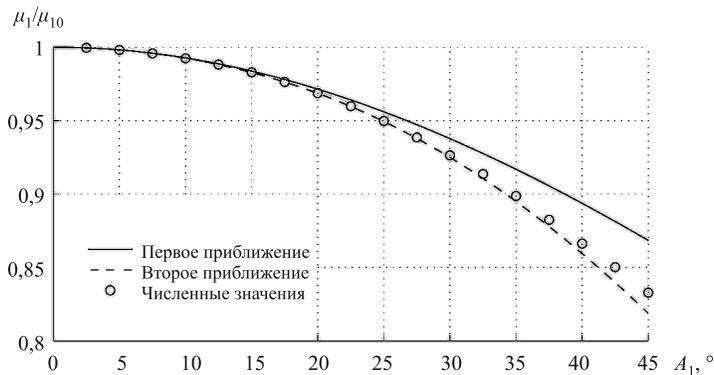


Рис. 5. Зависимость соотношения амплитуд от амплитуды колебаний первого звена (первая форма)

Рассмотрим теперь вторую форму колебаний. Не останавливаясь вновь подробно на вычислениях, приведем лишь конечные результаты, в которых фигурируют две поправки по  $b$ :

$$\begin{aligned} k_2^{(\text{II})}(b) &= k_{20} \left( 1 - \frac{31 + 20\sqrt{2}}{32} b^2 + \frac{113\,415 + 79\,872\sqrt{2}}{28\,672} b^4 \right) \approx \\ &\approx k_{20}(1 - 1,8526b^2 + 7,8952b^4); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A_1(b) &= b - \frac{468\sqrt{2} + 353}{2\,688} b^3 + \frac{22\,500\,963 + 14\,502\,380\sqrt{2}}{17\,059\,840} b^5, \\ A_2(b) &= -\sqrt{2}b + \frac{865\sqrt{2} + 744}{2\,688} b^3 - \frac{33\,160\,840 + 21\,387\,427\sqrt{2}}{17\,059\,840} b^5; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mu_2(b) &= \mu_{20} \left( 1 - \frac{16 - 3\sqrt{2}}{84} b^2 + \frac{895\,665\sqrt{2} - 747\,064}{9\,596\,000} b^4 \right) \approx \\ &\approx \mu_{20}(1 - 0,1399b^2 + 0,0542b^4), \quad \mu_{20} = -\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Как и прежде для первой формы, рассмотрим зависимость безразмерной частоты  $k_2/k_{20}$  от амплитуды первого звена  $A_1$  по формулам (19) и (20), в которых содержатся первые два приближения.

Теперь обратимся к выражениям для соотношения амплитуд в первом и втором приближениях и построим зависимость  $\mu_2/\mu_{20}$  от амплитуды колебаний первого звена  $A_1$  по формулам (21) и (20).

По рис. 6 и 7 видно, что каждое следующее приближение уточняет результаты, хотя и является приемлемым в достаточно узком диапазоне амплитуд. При этом вторая частота колебаний уже при небольших амплитудах сильно меняется, в отличие от первой частоты. Ясно поэтому, что область применимости полученных выше формул будет значительно меньшей, чем у аналогичных формул для первой формы колебаний. Формально это объясняется тем, что при колебаниях по первой форме, когда углы отклонения колеблются в фазе, и при колебаниях по второй форме, когда они колеблются в противофазе, разложение нелинейных слагаемых в правой части (8) в ряды будет допустимым по-разному. Что же касается

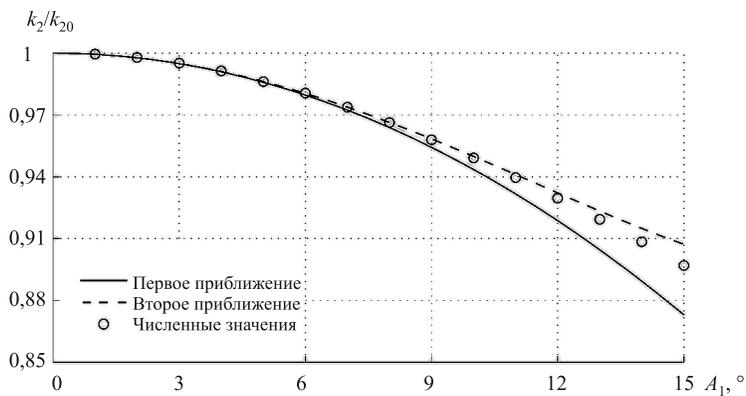


Рис. 6. Зависимость частоты от амплитуды колебаний первого звена (вторая форма)

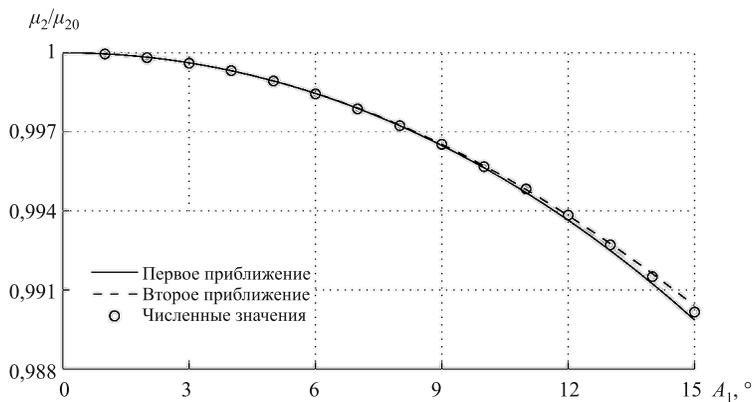


Рис. 7. Зависимость соотношения амплитуд от амплитуды колебаний первого звена (вторая форма)

соотношения амплитуд, то оно в рассматриваемом диапазоне почти не меняется. Однако даже в таком узком диапазоне наглядно демонстрируется достоверная асимптотика полученных результатов.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя результаты проведенного исследования, можно заключить, что коллинеарное управление позволяет раскачивать систему по каждой из форм ее свободных колебаний в отдельности вплоть до достаточно больших амплитуд, не возбуждая при этом остальных форм. Эта замечательная особенность такого управления означает существование режима авторезонансных колебаний, когда вся подводимая в систему энергия полностью идет на ее разгон по одной форме колебаний, обеспечивая одночастотное нарастание этих колебаний. При отключении коллинеарного управления при не очень больших амплитудах система переходит в режим периодических консервативных колебаний постоянной амплитуды. Отсюда можно сделать вывод, что в нелинейных системах могут существовать почти одночастотные движения, которые естественно называть собственными формами нелинейных колебаний. Исследование этих колебаний при помощи асимптотических методов показало, как дрейфует каждая форма и частота колебаний при плавном переходе из линейной зоны в нелинейную. Путем сопоставления полученных аналитических формул с численными результатами было установлено их полное соответствие друг другу.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 442 с.
2. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 480 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах / под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. Т. 3. М.: Машиностроение. 1968. 567 с.
4. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление процессом раскачивания качелей // Неделя науки СПбПУ: материалы научно-практической конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. С. 106–109.
5. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 918 с.

6. *Фрадков А. Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. 208 с.
7. Управление мехатронными вибрационными установками / под ред. И. И. Блехмана, А. Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2001. 278 с.
8. *Смольников Б. А., Юревич Е. И.* К проблеме биоморфного управления движениями роботов // Робототехника и техническая кибернетика. 2015. № 1 (6). С. 17–20.
9. *Смольников Б. А.* Проблемы механики в современной робототехнике // Робототехника и техническая кибернетика. 2016. № 1 (10). С. 3–6.
10. *Меркин Д. Р., Смольников Б. А.* Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2003. 534 с.
11. *Смольников Б. А.* Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.
12. *Ламб Г.* Теоретическая механика. Т. 2. Динамика. М., Л.: ГТТИ, 1935. 311 с.
13. *Бутенин Н. В., Луиц Я. Л., Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики. Т. 2: Динамика. М.: Наука, 1979. 544 с.
14. *Вильке В. Г.* Теоретическая механика. СПб.: Лань, 2003. 304 с.
15. *Голубева О. В.* Теоретическая механика. М: Высшая школа, 1968. 487 с.
16. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 591 с.
17. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
18. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М: ГИФМЛ, 1958. 406 с.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН НАНОРАЗМЕРНОЙ ТОЛЩИНЫ

С. В. КАШТАНОВА

В работе исследуется устойчивость растягиваемой бесконечной пластины с отверстием и со вставкой из другого материала. В первой части работы рассматривается задача о потере устойчивости пластины наноразмерной толщины и изучается влияние поверхностных эффектов на устойчивость пластины с отверстием (на границе отверстия и вдоль всей пластины), проводится качественное сравнение этих случаев и сравнение с экспериментом. Вторая задача посвящена изучению потери устойчивости бесконечной пластины с круговой вставкой из другого материала, влиянию модулей упругости вставки на потерю устойчивости и сравнению качественных результатов с моделированием в программном пакете ANSYS.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Считается, что для систем с размерами более 10 нм справедливы классические законы физики [1–4]. Дальнейшее уменьшение масштабов структур и явлений требует учета квантово-механических эффектов и связанных с ними особенностей. В статье [4] показано, что при числе атомарных слоев более восьми изгибная жесткость материала перестает зависеть от межатомарных связей и стремится к значению классической теории упругости. Ввиду высокого отношения площади к объему образца возникает ряд новых свойств, которым обладают наноструктурные объемные материалы. Среди переходных форм между нанокристаллами и неупорядоченными наноструктурными материалами следует упомянуть наноструктурные многослойные материалы, в которых переход от крайне неупорядоченной поликристаллической структуры к некоторой наноструктуре происходит на уровне всего одного слоя. Но

---

Работа выполнена при использовании ресурсов РЦ ВЦ СПбГУ и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-01-00832).

Доклад на семинаре 20 декабря 2016 г.

© С. В. Каштанова, 2016

количественно определить изменения в толщине слоя очень трудно. Также следует учитывать, что общие свойства набора частиц зависят от их взаимодействия друг с другом, а это дает дополнительные возможности для регулирования или изменения их свойств [1, 3, 5]. Цели данной работы — анализ применения методов классической континуальной механики к нанообъектам; получение аналитических решений; сравнение с решениями, полученными методом конечных элементов и экспериментальными данными.

## 2. ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНОЙ РАСТЯНУТОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Рассматривается влияние поверхностных эффектов (на границе отверстия и вдоль всей пластины) на устойчивость бесконечной пластины с круговым отверстием  $R$ , под действием одноосного растяжения  $P$ , и проводится сравнение с классическим решением задачи. Напряжения, учитывающие поверхностные эффекты на границе отверстия, выведены в работе [6] и задаются в следующем виде (здесь и далее  $\rho = r/R$ ,  $\varphi$  — угол поворота в полярной системе координат):

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) &= \frac{P}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\rho^2} + \left( 1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos(2\varphi) \right] + \frac{H_0\gamma_0}{\rho^2} + \\ &+ \frac{P}{2} \left[ 1 - \frac{(1-2H_1)}{\rho^2} - \left( 1 - \frac{4(1-H_2)}{\rho^2} + \frac{3(1-2H_2)}{\rho^4} \right) \cos(2\varphi) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) &= \frac{P}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\rho^2} - \left( 1 + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos(2\varphi) \right] - \frac{H_0\gamma_0}{\rho^2} + \\ &+ \frac{P}{2} \left[ 1 + \frac{(1-2H_1)}{\rho^2} + \left( 1 + \frac{3(1-2H_2)}{\rho^4} \right) \cos(2\varphi) \right], \\ \tau_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) &= -\frac{P}{2} \left[ 1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right] \sin(2\varphi) + \\ &+ \frac{P}{2} \left[ 1 + 2\frac{(1-H_2)}{\rho^2} - \frac{3(1-2H_2)}{\rho^4} \right] \sin(2\varphi), \end{aligned}$$

где

$$H_0 = \frac{2\mu_s - \gamma_0}{(\lambda_2 + 2\mu_s)(R + M)}, \quad H_1 = \frac{M(1 + \kappa)}{4(R + M)}, \quad H_2 = \frac{M(1 + \kappa)}{2R + M(3 + \kappa)},$$

$$M = \frac{(2\lambda_s + 2\mu_s + \gamma_0)(2\mu_s - \gamma_0)}{2\mu(\lambda_s + 2\mu_s)}, \quad \kappa = \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu},$$

$\gamma_0$  — остаточное поверхностное напряжение, отвечающее ненагруженному телу;  $\lambda_s, \mu_s$  — модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламе  $\lambda, \mu$  для объемной изотропной упругости (размерность поверхностных модулей упругости — [Н/м]).

Для определения критического напряжения используется энергетический метод С. П. Тимошенко [7]:

$$\Delta V = U + \Lambda W.$$

Здесь  $U$  — потенциальная энергия изгиба пластины, а  $W$  — работа усилий в срединной плоскости пластинки, накопившихся к моменту потери устойчивости, на дополнительных перемещениях, вызванных потерей плоской формы деформирования:

$$U = \frac{D}{2R^2} \int_0^{2\pi} \int_1^\infty [(\Delta w)^2 - (1 - \nu)\mathcal{L}(w, w)] \rho d\rho d\varphi,$$

$$W = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \left[ \sigma_{\rho\rho\rho} \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 + \sigma_{\varphi\varphi} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + 2\tau_{r\varphi} \frac{\partial w}{\partial \rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] d\rho d\varphi,$$

где

$$\mathcal{L}(w, w) = 2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right],$$

$w$  — прогиб пластины после потери устойчивости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластины.

Прогиб пластины  $w$  предлагается искать в виде двойного ряда

$$w(\rho, \varphi) = R \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl} \frac{\cos l\varphi}{\rho^k},$$

удовлетворяющего условию затухания прогиба на бесконечности. Для функционала  $\Delta V$  условия свободных кромок отверстия являются естественными.

Из принципа возможных перемещений следует, что в состоянии равновесия механической системы потенциальная энергия деформации достигает минимума. В этом состоянии обобщенные силы, т.е. частные производные приращения потенциальной энергии по обобщенным координатам, равны нулю:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial A_{ml}} = \frac{\partial}{\partial A_{ml}} (U + \Lambda W) = 0,$$

Искомая критическая нагрузка  $P^*$ , соответствующая выходу пластины из плоской формы равновесия, равна минимальному положительному значению собственного числа  $\Lambda$ .

Помимо поверхностных эффектов на границе отверстия для тонкой пластины наноразмерной толщины учитывается дополнительный вклад поверхностных напряжений, которые меняют изгибную жесткость пластины, как это показано в статье [8]:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \mu_s h^2 + \frac{\lambda_s h^2}{2}.$$

Путем подстановки выражения прогиба в соотношения для  $U$  и  $W$ , и реализации метода Рунге в программе Maple рассчитываются критические нагрузки для классического случая с учетом поверхностных эффектов на границе круга и поверхностных напряжений вдоль поверхности пластины.

Расчеты выполнены для пластин из алюминия Al(111), основные константы которого  $\lambda = 58,17$  ГПа,  $\mu = 26,13$  ГПа. Данные для поверхности взяты из работы [1]:  $\lambda_s = 6,8511$  Н/м,  $\mu_s = -0,376$  Н/м,  $\gamma_s^0 = 0,9108$  Н/м.

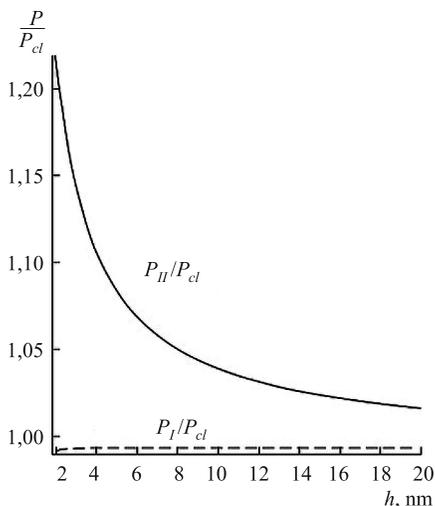


Рис. 1. Отношение критической нагрузки, учитывающей поверхностные эффекты на границе круга к классической нагрузке — пунктирная линия; отношение критической нагрузки, учитывающей вдоль всей пластины поверхностные напряжения к классической нагрузке — сплошная линия

Из рис. 1 видно, что поверхностные эффекты на лицевых сторонах пластины увеличивают критическую нагрузку при выбранных упругих и поверхностных модулях, и учет изменения изгибной жесткости пластины играет бóльшую роль, чем учет поверхностных эффектов на границе круга. График представлен для случая  $R = 20$  нм и  $h$  от 2 до 20 нм. При увеличении толщины пластины поверхностные эффекты становятся, естественно, пренебрежимо малы.

### 3. Устойчивость пластины с круговой вставкой из другого материала

В данной части работы рассматривается влияние модулей упругости круговой вставки на устойчивость плоской формы равновесия бесконечной тонкой пластины при одноосном растяжении  $\sigma$ . Реше-

ние задачи о деформации в докритическом состоянии в декартовой системе координат представлено в работе [9], где поле напряжений внутри вставки представлено как  $\sigma_y = k_y \sigma$ ,  $\sigma_x = k_x \sigma$  и  $\sigma_{xy} = 0$ . В задаче введены следующие обозначения:  $E_1, \nu_1$  и  $E_2, \nu_2$  — модули упругости и коэффициенты Пуассона соответственно пластины и вставки. На рис. 6–8 цветной вклейки приведены графики для напряжений  $\sigma_x/\sigma$  в зависимости от отношений модуля Юнга вставки к модулю Юнгу пластины (от более «мягкой» вставки к более «жесткой» при  $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$ ):

В случае если модули упругости пластины и вставки не равны, то напряжения  $\sigma_x/\sigma$  всегда в некоторой области отрицательны, а это означает, что может произойти потеря устойчивости плоской формы деформирования пластины.

В случае вставки из того же материала отсутствие отрицательных напряжений означает невозможность потери устойчивости. Задача решается энергетическим методом. Энергия системы определяется как сумма энергии вставки и самой пластины. Прогиб на пластине ищется в следующем виде:

$$w_1(\rho, \varphi) = R \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_{k,2l-2} \frac{\cos((2l-2)\varphi)}{\rho^k},$$

а на вставке — по формуле

$$w_2(\rho, \varphi) = R \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} B_{k,2l-2} \cos((2l-2)\varphi) \rho^{k+1}.$$

Неразрывность функции прогиба и ее производной дает следующие условия:

$$w_2(\rho, \varphi)|_{\rho=1} = w_1(\rho, \varphi)|_{\rho=1}, \quad \left. \frac{\partial w_2(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \left. \frac{\partial w_1(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1},$$

откуда коэффициенты  $B_{k,2l-2}$  можно выразить через коэффициенты  $A_{k,2l-2}$ .

В полярных координатах безразмерные напряжения на пластине задаются формулами

$$\sigma_{1,\rho\rho}^0 = \frac{\sigma_{\rho\rho}}{\sigma} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1-k_1}{\rho^2} + \left( 1 - 4\frac{1-k_2}{\rho^2} + 3\frac{1-k_2}{\rho^4} \right) \cos(2\varphi) \right],$$

$$\sigma_{1,\varphi\varphi}^0 = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1-k_1}{\rho^2} - \left( 1 + 3\frac{1-k_2}{\rho^4} \right) \cos(2\varphi) \right],$$

$$\tau_{1,\rho\varphi}^0 = \frac{\tau_{\rho\varphi}}{\sigma} = -\frac{1}{2} \left( 1 + 2\frac{1-k_2}{\rho^2} - 3\frac{1-k_2}{\rho^4} \right) \sin(2\varphi),$$

а внутри вставки — формулами:

$$\sigma_{2,\rho\rho}^0 = \frac{\sigma_{\rho\rho}}{\sigma} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 \cos(2\varphi)),$$

$$\sigma_{2,\varphi\varphi}^0 = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2 \cos(2\varphi)),$$

$$\tau_{2,\rho\varphi}^0 = \frac{\tau_{\rho\varphi}}{\sigma} = -\frac{1}{2}k_2 \sin(2\varphi),$$

где  $k_1 = k_y + k_x$ ,  $k_2 = k_y - k_x$ . Коэффициенты  $k_y$  и  $k_x$  выведены из равенства деформаций на границе вставки и пластины и равны:

$$k_y = \frac{E_2[(3 - \nu_2)E_1 + (5 + \nu_1)E_2]}{(E_1 + 2E_2)^2 - [\nu_2 E_1 + (1 - \nu_1)E_2]^2},$$

$$k_x = \frac{E_2[(3\nu_2 - 1)E_1 + (1 - 3\nu_1)E_2]}{(E_1 + 2E_2)^2 - [\nu_2 E_1 + (1 - \nu_1)E_2]^2}.$$

Функционал  $\Delta V$  выражается как

$$\Delta V = U_2 + U_1 + \lambda(W_2 + W_1).$$

Выражения для  $U_1$  и  $W_1$  отличаются от выражений  $U_2$  и  $W_2$  пределами интегрирования по  $\rho$ : от 1 до бесконечности в первом случае, и от 0 до 1 во втором (единица в безразмерном виде представляет собой границу раздела вставки и пластины, т. е. отношение  $\rho = r/R = 1$ ). Для  $i = 1, 2$

$$U_i = \frac{D_i}{2}(U_{i1} - 2(1 - \nu_i)U_{i2}),$$

где

$$D_i = \frac{E_i}{12(1 - \nu_i^2)},$$

$$U_{i1} = \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} \right)^2 \rho d\rho d\varphi,$$

$$U_{i2} = \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho^2} \frac{\partial w_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho \partial \varphi} \right)^2 + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \rho \partial \varphi} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho^3} \left( \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right)^2 \right) d\rho d\varphi,$$

$$W_i = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left( \sigma_{i,\rho\rho}^0 \left( \frac{\partial w_i}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\sigma_{i,\varphi\varphi}^0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi} \right)^2 + 2\tau_{i,\rho\varphi}^0 \frac{\partial w_i}{\partial \rho} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) d\rho d\varphi.$$

Решение задачи об определении собственного числа методом Рунта приведено в таблице 1 и на рис. 2.

*Таблица. Значение минимального положительного собственного числа  $\Lambda$ , соответствующее критической нагрузке*

$E_2/E_1$		0	1/5	1	10
$K$	$L$				
5	3	2,9673	<0	–	<0
7	4	1,9879	<0	–	64,1885
9	5	1,8627	19,8423	–	31,9927
11	6	1,8319	13,1289	–	25,8331
13	7	1,8195	11,8354	–	23,5583
17	9	1,8194	11,0629	–	22,7894

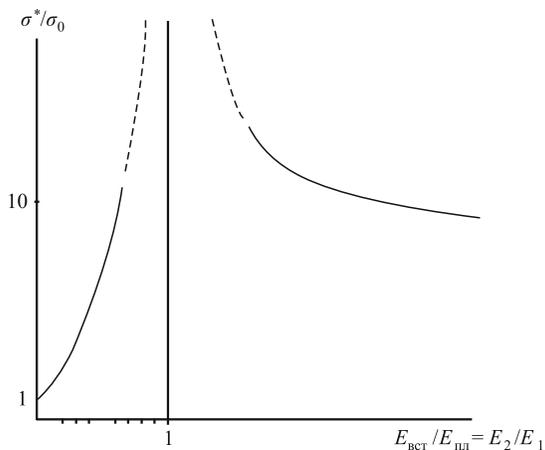


Рис. 2. Зависимость критической нагрузки от отношения модуля вставки к модулю пластины (построено в ANSYS)

Критическое значение нагрузки, которое с учетом собственного числа  $\Lambda$  определяется соотношением  $\sigma^* = \Lambda E_1 (h/R)^2$  качественно хорошо согласуется с результатами, полученными в пакете ANSYS.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расчеты показывают, что потеря устойчивости пластины с круговой жестко закрепленной вставкой случается при более низких нагрузках, в случае когда модуль упругости вставки либо много меньше пластины (т. е. вставка очень «мягкая») либо, наоборот, много больше (т. е. вставка очень «жесткая»). Отметим, что формы потери устойчивости при  $E_2/E_1 < 1$  и  $E_2/E_1 > 1$  разные. В случае «жесткой» вставки области зоны сжимающих напряжений, как уже отмечалось, расположены вдоль оси X (на  $90^\circ$  смещены по сравнению со случаем, когда вставка мягче пластины). По мере приближения модуля Юнга вставки к модулю Юнга пластины потеря устойчивости происходит либо при очень больших нагрузках (в этих случаях, вероятно, скорее может произойти разрушение пластины), либо не происходит вовсе (в случае одинаковых материалов).

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Miller R. E., Shenoy V. B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology*. 2000. Vol. 11, iss. 3. P. 139–147.
2. Shenoy V. B. Atomistic calculations of elastic properties of metallic for crystal surfaces // *Phys. Rev.* 2005. В 71, N 9. P. 94–104.
3. Еремеев В. А., Иванова Е. А., Морозов Н. Ф. Механические проблемы в нанотехнологии // *Известия Саратовского ун-та. Серия Математика, Механика, Информатика*. 2008. Т. 8 (3). С. 25–32.
4. Иванова Е. А., Индейцев Д. А., Морозов Н. Ф. К вопросу об изменении параметров жесткости // *ЖТФ*. 2006. Т. 76 (10). С. 74–80.
5. Jing G. Y., Duan H. L., Sun X. M., Zhang Z. S., et al. Surface effects on elastic properties of silver nanowires: Contact atomic-force microscopy // *Phys. Rev. B*. 2006. Vol. 73, iss. 23. P. 235–409.
6. Grekov M. A., Morozov N. F. Solution of the Kirsch problem in view of surface stresses // *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*. 2011. Vol. 52. P. 123–129; Vol. 53. P. 163–164.
7. Timoshenko S. P., Woinowsky'-Krieger S. *Theory of plates and shells*. N.Y.: McGraw Hill, 1959. 595 p.
8. Altenbach H., Eremeev V., Morozov N. Linear Theory of Shells Taking into Account Surface Stresses // *Doklady Physics*. 2009. Vol. 54 (12). P. 531–535.
9. Deryugin Ye. Ye., Lasko G. V. Field of Stresses in an Isotropic Plane with Circular Inclusion under Tensile Stresses // *Engineering*. 2012. Vol. 4. P. 583–589.

# МОДЕЛЬ РОГОВОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ АППЛАНАЦИОННОЙ ТОНОМЕТРИИ

Д. В. ФРАНУС

Рассматривается конечно-элементная модель роговой оболочки глаза при нагружении штампом с плоским основанием при различных значениях внутриглазного давления. Приводятся ограничения, накладываемые на соотношения модулей упругости в тангенциальном направлении и направлении толщины оболочки, в случае если она полагается несжимаемой. Проводится расчет толщины роговицы в ее центре при нагружении.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При построении моделей живых тканей часто предполагается, что материал является несжимаемым. В этом случае, если материал изотропный, то коэффициент Пуассона равен 0,5. При расчетах иногда говорят, что для удобства используется материал, близкий к несжимаемому. Для такого случая коэффициент Пуассона находится, как правило, в диапазоне  $0,45 < \nu < 0,50$  [1].

Если полагать, что материал роговицы удовлетворяет закону Гука для трансверсально-изотропных оболочек, то важно выяснить, какие условия накладываются на ее упругие константы.

## 2. УПРУГИЕ КОНСТАНТЫ РОГОВИЦЫ И УСЛОВИЕ НЕСЖИМАЕМОСТИ

Закон Гука для ортотропного тела при совмещении координатных плоскостей с плоскостями упругой симметрии имеет вид [2]

$$\varepsilon = \mathbf{C} \cdot \sigma, \quad (1)$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-01-00832).

Доклад на семинаре 07 февраля 2017 г.

© Д. В. Франус, 2017

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}),$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}).$$

В матрице податливости в уравнении (1) приняты следующие обозначения:  $E_1, E_2, E_3$  — модули упругости в направлениях  $x, y, z$ ;  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  — модули сдвига в плоскостях  $XOY, XOZ, YOZ$  соответственно;  $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$  — коэффициенты Пуассона.

Число независимых коэффициентов в (1) равно девяти, поскольку вследствие симметрии матрицы коэффициентов податливости выполняются равенства:

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_3} = \frac{\nu_{31}}{E_1}, \quad \text{и} \quad \frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2}.$$

Введем обозначения:

$$A_i = \frac{1}{E_i}, \quad i = 1, 2, 3; \quad A_4 = \frac{1}{2G_{12}}, \quad A_5 = \frac{1}{2G_{23}}, \quad A_6 = \frac{1}{2G_{13}} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mu_{12} &= -\nu_{12} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = -\nu_{21} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}, \quad \mu_{13} = -\nu_{13} \sqrt{\frac{E_1}{E_3}} = -\nu_{31} \sqrt{\frac{E_3}{E_1}}, \\ \mu_{23} &= -\nu_{23} \sqrt{\frac{E_2}{E_3}} = -\nu_{32} \sqrt{\frac{E_3}{E_2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда соотношения (1) запишутся в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & \mu_{12}\sqrt{A_1A_2} & \mu_{13}\sqrt{A_1A_3} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{12}\sqrt{A_1A_2} & A_2 & \mu_{23}\sqrt{A_2A_3} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{13}\sqrt{A_1A_3} & \mu_{23}\sqrt{A_2A_3} & A_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 \end{pmatrix}.$$

Упругий потенциал оболочки в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} 2\Phi &= \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}\sigma_{ij} = A_1\sigma_1^2 + A_2\sigma_2^2 + A_3\sigma_3^2 + \\ &+ 2(\mu_{12}\sqrt{A_1A_2}\sigma_1\sigma_2 + \mu_{13}\sqrt{A_1A_3}\sigma_1\sigma_3 + \\ &+ \mu_{23}\sqrt{A_2A_3}\sigma_2\sigma_3 + A_4\sigma_{12}^2 + A_5\sigma_{23}^2 + A_6\sigma_{13}^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Условия положительной определенности упругого потенциала следующие:

$$\begin{aligned} A_1 &> 0, \quad A_2 > 0, \dots, A_6 > 0, \\ |\mu_{12}| &< 1, \quad |\mu_{23}| < 1, \quad \left| \frac{\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{23}}{\sqrt{1 - \mu_{12}^2}\sqrt{1 - \mu_{23}^2}} \right| < 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Условие несжимаемости материала  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$  должно выполняться при произвольных напряжениях, это соответствует следующим равенствам:

$$\begin{aligned} 2\mu_{12}\sqrt{A_1A_2} &= A_3 - A_1 - A_2, \\ 2\mu_{23}\sqrt{A_2A_3} &= A_1 - A_2 - A_3, \\ 2\mu_{13}\sqrt{A_1A_3} &= A_2 - A_3 - A_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Упругий потенциал (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} 2\Phi &= A_1(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + A_2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \\ &+ (A_3 - A_1 - A_2)(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \\ &+ 2(A_4\sigma_{12}^2 + A_5\sigma_{23}^2 + A_6\sigma_{13}^2) = A_1(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + A_2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \\ &+ 2\mu_{12}\sqrt{A_1A_2}(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + 2(A_4\sigma_{12}^2 + A_5\sigma_{23}^2 + A_6\sigma_{13}^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Условия положительной определенности упругого потенциала для несжимаемого материала (8) имеют вид:

$$A_1 > 0, A_2 > 0, A_4 > 0, A_5 > 0, A_6 > 0, 1 - \mu_{12}^2 > 0 \quad (9)$$

или, с учетом соотношений (7),

$$A_1 A_2 - \frac{1}{4} (A_3 - A_1 - A_2)^2 > 0. \quad (10)$$

Преобразовывая соотношение (10) и делая обратную замену переменных  $E_i = \frac{1}{A_i}$ , можно получить

$$\left( E_1 E_2 - E_3 \left( \sqrt{E_1} - \sqrt{E_2} \right)^2 \right) \left( E_1 E_2 - E_3 \left( \sqrt{E_1} + \sqrt{E_2} \right)^2 \right) < 0. \quad (11)$$

Пусть  $E_2 = aE_1, E_3 = bE_1$ , тогда, проводя преобразования, из условия (11) можно получить

$$\left( b - \frac{a}{(1 - \sqrt{a})^2} \right) \left( b - \frac{a}{(1 + \sqrt{a})^2} \right) < 0. \quad (12)$$

На рис. 1 в заштрихованной области соотношение (12) показывает ограничение на возможные соотношения модулей упругостей в различных направлениях в случае несжимаемости материала, что согласуется с исследованиями, описанными в работе [3].

Для трансверсально-изотропного несжимаемого тела плоскость изотропии  $\alpha_3 = const, E_1 = E_2$ . Тогда

$$E_1^2 - 4E_3 E_1 < 0, \quad \frac{E_3}{E_1} > \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad E_3 > \frac{E_1}{4}. \quad (13)$$

То есть это означает, что модуль упругости в направлении толщины роговицы не может быть меньше чем в 4 раза тангенциального модуля упругости. При этом выполняется следующее:

$$\nu_{12} = 1 - \frac{E_1}{2E_3}, \quad \nu_{23} = \frac{1}{2}, \quad \nu_{13} = \frac{1}{2}. \quad (14)$$

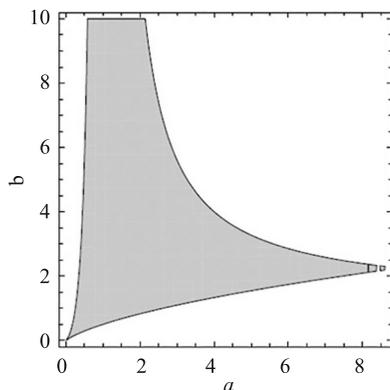


Рис. Возможные соотношения модулей упругостей в различных направлениях при несжимаемости

Согласно экспериментальным данным, соотношения модулей упругости в направлении толщины и в тангенциальном направлении различаются более чем на порядок.

### 3. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ РОГОВИЦЫ

Внутриглазное давление (ВГД) является важным индикатором при выявлении различных отклонений и глазных заболеваний. Для измерения ВГД обычно используются различные апланационные тонометры, суть которых заключается в приложении нагрузки на роговую оболочку глаза и последующим измерением зоны контакта тонометра и роговицы реакции на эту нагрузку. В работе строится конечно-элементная модель нагружения роговой оболочки штампом с плоским основанием, моделирующим апланационный тонометр, и изучается влияние такого нагружения на изменение толщины роговой оболочки в ее центре.

Роговая оболочка разделена на 4 слоя:

- 1) эпителий,
- 2) боуменову мембрану,
- 3) строму,
- 4) десцеметову оболочку.

Она моделируется сферическим сегментом переменной толщины с внешним радиусом кривизны  $R_0$ . В данной модели только строма имеет переменную толщину, которая изменяется от 535 мкм в центре до 1135 мкм на краю, другие слои задаются с постоянной толщиной. Эндотелий, пятый слой роговой оболочки, не моделируется, так как имеет незначительную толщину (1 мкм). Все слои моделируются как однородные.

По данным работ [4–6], роговицу можно рассматривать как трансверсально-изотропную оболочку, для которой поверхность изотропии  $\alpha_3 = \text{const}$ , и имеют место соотношения [2]

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E_i} (\sigma_{11} - \nu_i \sigma_{22}) - \frac{\nu'_i}{E'_i} \sigma_{33}, & e_{13} &= \frac{1}{G'_i} \sigma_{13}, \\ e_{22} &= \frac{1}{E_i} (\sigma_{22} - \nu_i \sigma_{11}) - \frac{\nu'_i}{E'_i} \sigma_{33}, & e_{23} &= \frac{1}{G'_i} \sigma_{23}, \\ e_{33} &= -\frac{\nu'_i}{E'_i} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{E'_i} \sigma_{33}, & e_{12} &= \frac{1}{G_i} \sigma_{12}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $e_{11}$ ,  $e_{22}$ , и  $e_{33}$  — относительные удлинения элементов по направлениям ортов;  $e_{12}$  и  $e_{13}$  — относительные сдвиги;  $E_i$  и  $E'_i$  — модули упругости при растяжении — сжатии на поверхности изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней;  $\nu_i$  и  $\nu'_i$  — коэффициенты Пуассона.

Модуль сдвига поверхности изотропии определяется соотношением

$$G_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}. \quad (16)$$

Так как упругий потенциал представляет собой положительно-определенную квадратичную форму, то коэффициенты упругости должны удовлетворять системе неравенств [2]:

$$\begin{aligned} |\nu'_i| &< \left( \frac{E'_i}{E_i} \right)^{1/2}, & -1 &< \nu_i < 1 - 2 \left( \nu'_i \right)^2 \frac{E'_i}{E_i}, \\ & & (E_i > 0, E'_i > 0), & i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (17)$$

В таблице указаны толщины слоев роговой оболочки, значения модулей упругости и коэффициенты Пуассона в тангенциальном и продольном направлениях, при которых решается конечно-элементная модель. Предполагается, что материал роговой оболочки близок к несжимаемому и  $\nu_i' = 0,48$ .

Таблица. Значения толщин и упругих коэффициентов

Параметр	Единица измерения	Эпителий	Боуменова мембрана	Строма	Десцеметова оболочка
$h_i$	мм	0,043	0,012	0,5–1,1	0,010
$E_i$	МПа	0,060	0,600	0,300	0,900
$E_i'$	МПа	0,003	0,030	0,015	0,045
$G_i$	МПа	0,030	0,300	0,150	0,450
$G_i'$	МПа	0,001	0,010	0,005	0,015

Апланационный тонометр моделируется плоским штампом, состоящим из изотропного материала со значением модуля Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$  (соответствующим стали). В конечно-элементной модели нагружение производилось четырьмя различными по массе штампами (5; 7,5; 10,0 и 15,0 г) и ВГД менялось в диапазоне 10–30 мм рт. ст.

В результате нагружения измерялись изменения толщины роговой оболочки в ее центре. Как показано на рис. 5 цв. вклейки, общая толщина роговой оболочки уменьшается на 18,4% при нагружении плоским штампом массой 15,0 г в случае нормального ВГД, равного 15 мм рт. ст. Так как толщина боуеновой мембраны мала, то она учитывается в данном анализе в составе слоя эпителия. Отметим, что при нагружении самым легким штампом массой 5 г общая толщина слоев эпителия и боуеновой мембраны уменьшается с 55,0 до 23,4 мкм, т. е. более чем в 2 раза. А при нагружении штампом массой 15,0 г их толщина сокращается до 11,2 мкм. Таким образом, общая толщина эпителия и боуеновой мембраны сокращается примерно в 5 раз при нагружении плоским штампом массой 15,0 г.

Строма роговицы при нагружении плоским штампом также сжимается на 5,1, 7, 9,2, и 12,4% для штампов массой 5; 7,5, 10,0 и 15,0 г соответственно. Изменение ВГД в диапазоне 10–30 мм рт. ст. при нагружении плоским штампом различной массы приводит к незначительным изменениям толщины слоев роговой оболочки (менее 1%) по отношению к приведенному случаю (ВГД 15 мм рт. ст.).

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для несжимаемого материала получены ограничения на возможные соотношения модулей упругостей в различных направлениях при несжимаемости материала. Однако полученные ограничения не совпадают с экспериментальными данными, согласно которым модули упругости в продольном и тангенциальном направлениях различаются более чем на порядок [6].

Так при конечно-элементном моделировании рассмотрена контактная задача нагружения близкой к несжимаемой роговой оболочки плоским штампом под действием ВГД. В результате моделирования выявлено пятикратное сокращение совместной толщины эпителия и боуменовской мембраны, которое составляет около 30% общего сокращения толщины роговой оболочки в ее центре. Также установлено, что уменьшение толщины роговой оболочки при нагружении штампом с плоским основанием почти не зависит (менее 1%) от ВГД.

Построенная конечно-элементная модель позволяет рассчитывать изменение толщины роговой оболочки по ее слоям при нагружении плоскими штампами различной массы при различных значениях ВГД.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Uchio E., Ohno S., Kudoh J., Aoki K.* et al. Simulation model of an eyeball based on finite element analysis on a supercomputer // *The British J. of Ophthalmol.* 1999. Vol. 83 (10). P. 1106–1111.
2. *Родионова В. А., Тутаев Б. Ф., Черных К. Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996. 278 с.
3. *Itskov M., Aksel N.* Elastic constants and their admissible values for incompressible and slightly compressible anisotropic materials // *Acta Mechanica.* 2002. Vol. 157. P. 81–96.

4. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Математическое моделирование в офтальмологии // Тр. семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды», 2013-2014 гг. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014. С. 5–48.
5. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Модели теории оболочек и пластин в задачах офтальмологии // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Т. 1 (59), вып. 3. С. 438–458.
6. Иомдина Е. Н., Бауэр С. М., Котляр К. Е. Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. М.: Реал Тайм, 2015. 208 с.

# ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕКРУГОВОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

А. В. ЗЕЛИНСКАЯ, П. Е. ТОВСТИК

Исследуются свободные колебания тонкой цилиндрической оболочки средней длины. Для вывода уравнений используется обобщенная модель Тимошенко—Рейсснера (ТР), согласно которой неоднородная по толщине оболочка заменяется однородной оболочкой с эквивалентными жесткостями при изгибе и поперечном сдвиге. Получена приближенная асимптотическая формула для собственных частот, учитывающая влияние поперечного сдвига и переменность кривизны направляющей. Эта формула обобщает классическую формулу Саусвэлла—Папковича для круговой однородной оболочки. В качестве примера рассматривается эллиптическая оболочка с шарнирно опирающимися краями. Обсуждается влияние поперечного сдвига на собственные частоты и формы колебаний.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследуются свободные колебания тонкой некруговой цилиндрической оболочки, изготовленной из трансверсально изотропного материала с малой жесткостью при поперечном сдвиге. Края оболочки предполагаются шарнирно опирающимися. Рассматриваются собственные частоты и формы колебаний, локализованные вблизи слабой образующей. При построении собственных функций используется прием асимптотического разделения переменных, в результате которого двумерная краевая задача сводится к одномерным краевым задачам. В связи с этим наряду с приближенным асимптотическим решением можно найти численное решение с высокой степенью точности, недостижимой для метода конечных элементов.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-12-00138), а также при использовании ресурсов РЦ ВЦ СПбГУ.

Доклад на семинаре 14 февраля 2017 г.

© Зелинская А. В., Товстик П. Е., 2017

В работе [6] описан метод асимптотического интегрирования, позволяющий приближенно определить собственные частоты и формы колебаний для некруговых цилиндрических оболочек (по модели Кирхгофа—Лява (КЛ)). Для таких оболочек форма колебаний вытянута вдоль образующей и локализуется в окрестности образующей, для которой кривизна направляющей минимальна. В случае оболочки из трансверсально изотропного материала точность модели КЛ оказывается недостаточной. Здесь этот метод используется для уравнений пологих оболочек, учитывающих сдвиг по модели Тимошенко—Рейсснера (ТР). Для этой модели построено два приближения. Собственная функция по первому приближению равна собственной функции для круговой оболочки, кривизна которой равна минимальной кривизне направляющей некруговой оболочки.

## 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматриваются свободные колебания тонкой цилиндрической оболочки радиусом  $R$ , длиной  $L$  и толщиной  $h$ . В качестве криволинейных координат на поверхности цилиндра возьмем  $\varphi$  и  $s$  — длины дуг на направляющей ( $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ ) и образующей ( $0 \leq s \leq L$ ,  $L$  — высота цилиндра) (рис. 1).

Направляющую считаем достаточно гладкой замкнутой выпуклой ( $\kappa(\varphi) > 0$ ) кривой. Начало координат возьмем в точке на направляющей, в которой кривизна минимальна, т. е.

$$R^{-1} = \kappa(0) = \min_{\varphi} \kappa(\varphi).$$

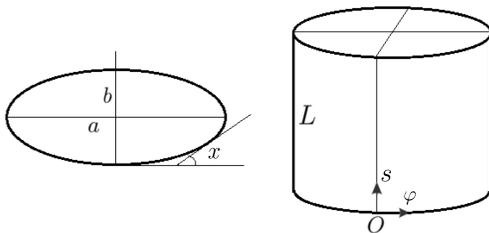


Рис. 1. Эллиптическая цилиндрическая оболочка

Предполагаем, что

$$\kappa_0'' = d^2\kappa/d\varphi^2|_{\varphi=0} > 0.$$

В частности, для рассматриваемого ниже эллиптического цилиндра с полуосями  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ) будет

$$\kappa(x) = \frac{dx}{d\varphi} = e^{-2}(\sin^2(x) + e^2 \cos^2(x))^{\frac{3}{2}}, \quad e = \frac{a}{b} > 1, \quad (1)$$

где  $x$  — угол между касательной к направляющей и главной осью эллипса.

### 3. УРАВНЕНИЯ ТР для цилиндрической оболочки с учетом поперечного сдвига

Основные уравнения равновесия оболочки определяются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial s} + \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + \frac{T_2}{R} + q_n = 0, \\ \frac{\partial M_1}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \varphi} - Q_1 = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} - Q_2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $T_1, S, T_2$  — тангенциальные усилия;  $Q_1, Q_2$  — перерезывающие усилия;  $M_1, M_2, H$  — изгибающие и крутящий моменты.

В модели ТР приняты следующие соотношения, связывающие усилия и моменты с деформациями срединной поверхности:

$$\begin{aligned} T_1 = K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \{1, 2\}, \quad S = \frac{K(1-\nu)}{2}\omega, \quad K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \\ M_1 = D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), \{1, 2\}, \quad H = D(1-\nu)\tau, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \\ Q_1 = G^*h\gamma_1, \quad Q_2 = G^*h\gamma_2, \quad G^* = kG_{13}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E, \nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $h$  — толщина оболочки;  $G_{13}$  — модуль сдвига в поперечном направлении;  $k = 5/6$  —

поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения напряжений поперечного сдвига по толщине оболочки; тангенциальные ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ ) и изгибные ( $\kappa_1, \kappa_2, \tau$ ) деформации равны:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R}, & \omega &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \kappa_1 &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}, & \kappa_2 &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi}, & \tau &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right), \\ \gamma_1 &= \varphi_1 + \frac{\partial w}{\partial s}, & \gamma_2 &= \varphi_2 - \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $u, v, w$  — проекции перемещения;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы поворота нормальных волокон;  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — углы поперечного сдвига.

Модель ТР содержит пять неизвестных функций  $\{u, v, w, \varphi_1, \varphi_2\}$ , а система (2)–(4) имеет десятый порядок.

Введем функцию усилий  $\Phi(s, \varphi)$  и функции  $\Psi(s, \varphi)$  и  $\Theta(s, \varphi)$  вместо  $\varphi_1, \varphi_2$  по формулам:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, & T_2 &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}, & S &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial s}, \\ \varphi_1 &= -\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}, & \varphi_2 &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Theta}{\partial s}. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений пологих оболочек по модели ТР состоит из уравнений

$$\begin{aligned} (Eh)^{-1} \Delta \Delta \Phi - \Delta_R w &= 0, & (w &= \Psi - \Psi D / (G^* h)), \\ -G^* h (\Delta w - \Delta \Psi) + \Delta_R \Phi + q_n &= 0, \\ -D \Delta \Psi &= G^* h (w - \Psi), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $w(s, \varphi)$  — функция прогиба;  $\kappa(\varphi)$  — кривизна направляющей;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\Delta_R$  — оператор второго порядка, зависящий от кривизны оболочки:

$$\Delta_R = \frac{\kappa(\varphi)}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial s^2}. \quad (7)$$

Нагрузочный член  $q_n$  зависит от рассматриваемой задачи. В задаче о свободных колебаниях следует считать

$$q_n = \rho h \omega^2 w, \quad (8)$$

где  $\rho$  — плотность материала,  $\omega$  — частота колебаний. Для исследования колебаний оболочки вблизи наиболее слабой образующей можно не рассматривать уравнение  $(1 - \nu)D\Delta^2\Theta - 2G\Delta\Theta = 0$ , которое описывает интеграл пограничного слоя.

Теперь система (6) допускает разделение переменных вида [11]

$$w(\varphi, s) = w(\varphi)Z(s),$$

где для шарнирно опертых краев оболочки

$$Z(s) = \sin(\pi s/L).$$

#### 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Перейдем к безразмерным переменным, положив

$$\begin{aligned} \mu^4 &= \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad l = \frac{L}{R}, \quad g = \frac{E\mu^4}{G^*}, \\ \{s, \varphi, u, v, w, \Psi\} &= R\{\hat{s}, \hat{\varphi}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\Psi}\}, \\ \{T_i, S, Q_i\} &= Eh\{\hat{T}_i, \hat{S}, \hat{Q}_i\}, \quad \{M_i, H\} = EhR\{\hat{M}_i, \hat{H}\}, \\ \Phi &= EhR^2\hat{\Phi}, \quad i = 1, 2, \quad q_n = \frac{Eh\lambda}{R}w, \quad \lambda = \frac{\rho R^2\omega^2}{E}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $l$  — безразмерная длина,  $\mu$  — малый параметр относительной толщины,  $g$  — сдвиговой параметр,  $\lambda$  — искомый параметр частоты. В дальнейшем значок  $\hat{\phantom{x}}$  будет опущен. Тогда система (6) после разделения переменных запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^4\Phi}{d\varphi^4} - \frac{\kappa(\varphi)\pi^2}{l^2}w &= 0, \quad w = \Psi + g\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2}, \\ \mu^8\frac{d^4\Psi}{d\varphi^4} + \frac{\kappa(\varphi)\pi^2}{l^2}\Phi + \lambda w &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для однородного изотропного материала ( $g = 0$ ) локализованное вблизи наиболее слабой образующей  $\varphi = 0$  решение системы (10) построено в работе [11]. В том же виде ищем решение и при  $g \neq 0$

$$w(\varphi, \mu) = \left(1 + O(\mu^{1/2})\right) \exp(i\mu^{-1}(q\varphi + \alpha\varphi^2/2)), \quad \text{Im}(\alpha) < 0. \quad (11)$$

Перейдем от дуговой переменной  $\varphi$  к углу между касательной к направляющей и главной осью эллипса  $x$  (рис. 1). Отбросим в операторе  $\Delta$  малые слагаемые. Тогда система (10) примет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \kappa^4(x) \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} - \lambda \left( \Psi(x) - g \kappa^2(x) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) + \kappa(x) \Phi(x) &= 0, \\ \varepsilon^4 \kappa^4(x) \Phi(x)^{IV} - \kappa(x) \left( \Psi(x) - g \kappa^2(x) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\varepsilon$  — совмещенный малый параметр:

$$\varepsilon^8 = \frac{h^2 l^4}{12\pi^2(1-\nu^2)a^2}, \quad g = \frac{E\varepsilon^4}{G^*}, \quad \lambda = \frac{\rho\omega^2 l^4}{\pi^2 \varepsilon^4 E a^2}. \quad (13)$$

Как и в работе [11], искомые параметры  $q, \alpha$  определяются из анализа функции

$$\lambda = f(q, x) = \frac{q^4 \kappa^4(x)}{1 + \kappa^2(x) q^2 g / \varepsilon^2} + \frac{1}{\kappa^2(x) q^4}. \quad (14)$$

Собственная частота  $\lambda$  определяется по формулам:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + O(\varepsilon^2), \quad \lambda_0 = \min_q f(q, 0) = f(q_0, 0), \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^{1/2} \Bigg|_{q=q_0, x=0} \end{aligned} \quad (15)$$

При  $g = 0$  из величины  $\lambda_0$  следует формула Саусвэлла—Панковича для круговой однородной по толщине цилиндрической оболочки радиусом  $R$ , а поправка  $\varepsilon \lambda_1$  учитывает переменность кривизны направляющей.

Формы прогиба  $w(s, \varphi)$  локализуются в окрестности наиболее слабой образующей  $\varphi = \varphi_0$ . В данной задаче две наиболее слабые образующие  $x = \pm\pi/2$ . Таким образом, частоты собственных колебаний асимптотически четырехкратные, поскольку в окрестности каждой из образующих возможны две формы колебаний, которым соответствуют близкие частоты. В силу симметрии собственные функции являются четными или нечетными по отношению к диаметрам эллипса (рис. 2).

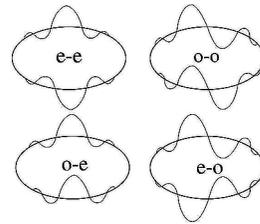


Рис. 2. Четные (е) и нечетные (о) собственные функции

Для вычисления собственных значений параметра  $\lambda$  достаточно провести численное интегрирование на промежутке  $0 \leq x \leq \pi/2$  и удовлетворить граничным условиям четности ( $\Psi' = \Psi'' = \Phi' = \Phi'' = 0$ ) и нечетности ( $\Psi' = \Psi'' = \Phi' = \Phi'' = 0$ ).

Приведем численные результаты, из которых видно, что асимптотически четырехкратные собственные значения очень близки. Примем следующие параметры:  $e = b/a = 1,4$ . Рассмотрим наименьшие собственные значения, а параметр  $g$  будем менять.

Таблица. Асимптотически кратные собственные значения

$g$	$\lambda^a$	$\lambda^{ee}$	$\lambda^{oo}$	$\lambda^{eo}$	$\lambda^{oe}$
0	1,43856	1,43389	1,43394	1,48625	1,48654
0,01	1,28147	1,26699	1,26699	1,33391	1,33402
0,10	0,65783	0,67757	0,67757	0,67133	0,67133
0,50	0,25066	0,25784	0,25784	0,25752	0,25752
0,90	0,16955	0,17369	0,17369	0,17383	0,17383

В таблице приведены собственные значения  $\lambda^a$ , найденные по формуле (15), и собственные значения  $\lambda^{ee}$ ,  $\lambda^{oo}$ ,  $\lambda^{eo}$  и  $\lambda^{oe}$ , найденные при численном интегрировании системы (12) (индексы соответствуют обозначениям на рис. 2). При сдвиге параметре  $g = 0,9$  собственные значения неразличимы при фиксированном  $\epsilon = 0,2$ . С уменьшением  $g$  эти различия растут.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдена асимптотическая формула и формы колебаний для некруговой цилиндрической оболочки. Предполагается, что оболочка изготовлена из трансверсально изотропного материала с малой жесткостью на поперечный сдвиг. В этом случае показано, что формы колебаний локализуются в окрестности образующей, для которой кривизна минимальна. Безразмерная собственная функция  $\lambda(q, g)$  зависит от двух основных безразмерных параметров: 1) волнового числа в окружном направлении  $q$  и 2) параметра поперечного сдвига  $g$ . С ростом  $g$  (или с уменьшением модуля сдвига в поперечном направлении) собственная функция уменьшается. Для эллиптической оболочки собственные значения асимптотически четырехкратные. Исследованы различия между асимптотическими и численными собственными значениями.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Bushnell D.* Buckling of shells — pitfalls for designers // AIAA. Vol. 19 (9). 1981. P. 1183–1226.
2. *Родионова В. А., Тумаев Б. Ф., Черных К. Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996. 278 с.
3. *Donnell L. H.* Beams, Plates and Shells. N. Y.: McGraw-Hill, 1976. 453 p.
4. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
5. *Kienzler R., Shneider P.* Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation // Shell Structures: Theory and Applications. Vol. 3. London, 2014. P. 109–112.
6. *Михасев Г. И., Товстик П. Е.* Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М.: Физматлит, 2009. 260 с.
7. *Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Generalized Timoshenko—Reissner models for multilayered plate // Mechanics of Solids. 2016. Vol. 51, iss. 5. P. 527–537.
8. *Novozhilov V. V.* Theory of thin shells. Groningen: Volters-Noordhoff, 1970.
9. *Papkovich P. F.* Design formulas for a stability test of a cylindrical shell of a submarine strength body // Dul. nauchno-tekhn. com. UMVS RKKK. 1929. Vol. 2 (2). P. 113–123.
10. *Southwell R.* On the collapse of tubes by external pressure. Parts 1–3 // Philos. Mag. Ser. 6. 1913. Vol. 25 (149). P. 687–697.

11. *Tovstik P. E., Smirnov A. L.* Asymptotic Methods in the Buckling Theory of Thin Shells. Singapore at al.: World scientific, 2002. 128 p.
12. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* A thin-plate bending equation of second-order accuracy // *Doklady Physics*. 2014. Vol. 59 (8). P. 389–392.
13. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Generalized Timoshenko–Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // *ZAMM*. 2016. doi:10.1002/zamm.201600052

# ПОЛУАВТОМАТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДЕМПФИРОВАНИЯ КАЧКИ ГРУЗА

В. Г. Дружинин, А. В. Валов

В данной статье предложен вариант математической модели грузоподъемного механизма, учитывающий взаимовлияние внутри системы. Рассмотрен алгоритм демпфирования качки груза, основанный на опыте работы оператора. Данный алгоритм реализован при помощи нечеткой логики.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В современном мире большую долю всех подъемно-транспортных механизмов занимают краны, выполняющие разнообразные задачи и функции. Значительным развитием грузоперевозок в контейнерах определилось создание специальных подъемно-транспортных средств высокой производительности, в частности козловых складских кранов на рельсовом ходу, способных перемещать грузы из одного вида транспорта в другой.

Козловые контейнерные краны — это грузоподъемные машины прерывного циклического действия. Сегодня они являются основными подъемными средствами для перегрузки контейнеров различных типов. В настоящее время в связи с развитием технологического прогресса появилось много различных конструкций козловых кранов. Однако принципы их работы не меняются и заключаются в плавном начале и окончании движения с целью исключить раскачку груза. При этом многие краны имеют недостаток — небольшую циклическую скорость даже при использовании различных технологических решений, позволяющих уменьшить колебания груза.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-12-00138), а также при использовании ресурсов РЦ ВЦ СПбГУ.

Доклад на семинаре 14 марта 2017 г.

© В. Г. Дружинин, А. В. Валов, 2017

В то же время в России существует множество кранов старых конструкций (выпущенных до 2000 г.), которые работают по сходным принципам, но не оснащены никакими системами автоматического гашения колебаний. Однако за счет большого опыта крановщиков такие краны могут работать на максимуме своих возможностей и, как правило, показывают хорошие результаты и большую циклическую скорость работы.

Предлагается разработать полуавтоматическую систему гашения качки для кранов старого поколения, что позволит сохранить и увеличить производительность грузовых контейнерных терминалов. За основу работу алгоритма гашения качки предполагается взять алгоритм работы крановщиков.

## 2. АЛГОРИТМ РАБОТЫ СИСТЕМЫ

Для успешного проектирования системы необходимо описать предполагаемый алгоритм работы оператора (крановщика). Предполагается, что оператор будет устанавливать и задавать конечное и начальное положения для груза вручную. Закрепив и подняв груз, оператор начинает перемещать груз в необходимом направлении с заданной скоростью. Когда груз приближается к конечному положению, оператор подает управляющий сигнал для системы, чтобы она за несколько итераций погасила колебания с большой амплитудой. После успокоения высокоамплитудной качки оператор подводит минимально колеблющийся груз к требуемой точке.

## 3. ОБЪЕКТ УПРАВЛЕНИЯ

Для разработки требуемой системы управления необходимо разработать модель объекта управления — крана. Модель должна отражать взаимовлияние груза на подвижную каретку и определять угол отклонения груза от вертикали. На рис. 1 приведена приближенная схема крана, которой мы будем пользоваться для построения модели объекта управления, где  $d$  — расстояние передвигания каретки крана,  $\varphi$  — угол отклонения троса,  $L$  — длина троса от каретки до контейнера с грузом,  $m_1$  — каретка крана с кабиной оператора,  $m_2$  — контейнер с грузом,  $h$  — высота крана.

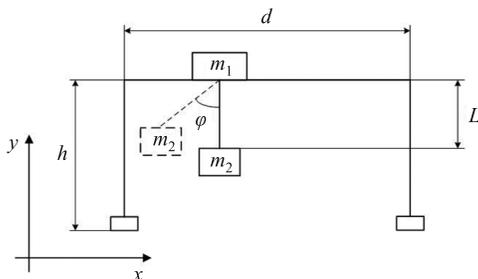


Рис. 1. Схема козлового крана, усл. обозначения см. в тексте

На рис. 2 приведена структурная схема модели объекта управления. Далее рассмотрим некоторые элементы структурной схемы: оператор задает необходимую скорость движения каретки и подает сигнал для включения системы гашения качки; блок формирования управляющего воздействия транслирует управляющее воздействие с пульта оператора либо формирует управляющее воздействие для успокоения качки, формирует вид переменной  $q_1(t)$ ; блок моделирования работы электродвигателей отражает работу электродвигателей, на выходе из данного блока формируются переменные  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ , отражающие все необходимые переходные процессы при работе электродвигателей [1, 2].

Блок расчета угла отклонения груза рассчитывает колебания груза в зависимости от координат  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  [3]. Через обратную связь рассчитанный угол отклонения подается на блок расчета взаимовлияния элементов системы. В этом блоке формируются сила и моментные воздействия [4], которые система оказывает сама на себя при работе. Они передаются через обратную связь на блок электродвигателей.

Для расчета угла отклонения будем использовать следующее уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\lambda\dot{\varphi}}{q_2^2(t)} + \frac{g}{q_2(t)} \sin \varphi + \frac{\ddot{q}_1(t) \cos \varphi}{q_2(t)} + \frac{\dot{q}_2(t)\dot{\varphi}}{q_2(t)} = 0, \quad (1)$$

где  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  — координата перемещения основания маятника по горизонтальной оси и длина нити маятника,  $\varphi$  — угол отклонения

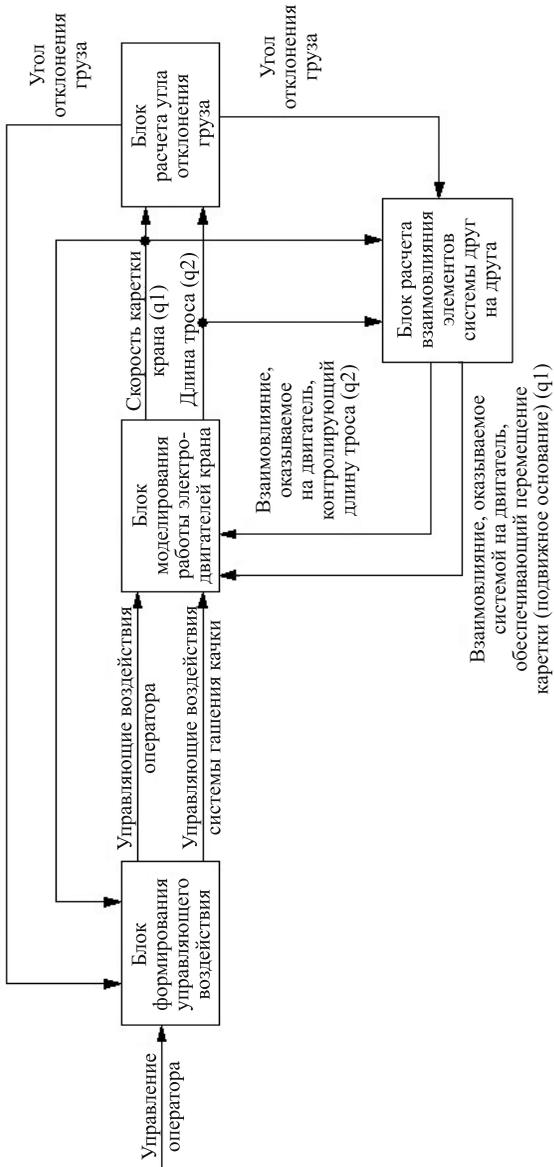


Рис. 2. Структурная схема модели объекта управления

маятника от вертикальной оси,  $\lambda$  — коэффициент затухания колебаний.

Уравнения для блока формирования взаимовлияния получается из уравнения Лагранжа—Эйлера:

$$P_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial q_i}, \quad (2)$$

где  $T$  — полная кинетическая энергия,  $\Pi$  — полная потенциальная энергия —  $L = T - \Pi$  — функция Лагранжа,  $q$  — вектор обобщенных координат,  $\dot{q}$  — вектор обобщенных скоростей,  $P_i$  — обобщенные силы (или моменты), создаваемые в  $i$ -м сочленении для реализации заданного движения  $i$ -го звена.

Вектор обобщенных моментов (сил) можно представить в виде

$$P_i = H(q)\ddot{q}_i + h(q, \dot{q})\dot{q}_1 + M_{int},$$

где  $\ddot{q}$  — вектор обобщенных ускорений,  $H(q)$  — матрица инерционных свойств системы,  $h(q, \dot{q})$  — матрица, определяемая инерционными силами,  $M_{int}$  — моментное воздействие, учитывающие взаимовлияние со стороны остальных степеней свободы и гравитационную составляющую.

Используя уравнение Лагранжа—Эйлера, вычисляем параметры:  $P_1$  — влияние, оказываемое системой на двигатель, формирующий движение  $q_1(t)$ , и  $P_2$  — влияние, оказываемое системой на двигатель, формирующий движение  $q_2(t)$ :

$$\begin{aligned} P_1 &= \ddot{q}_1(m_1 + m_2) + q_2(\ddot{\varphi}m_2 \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 m_2 \sin \varphi) + \\ &+ \ddot{q}_2 m_2 \sin \varphi + 2\dot{\varphi}m_2 \dot{q}_2 \cos \varphi, \\ P_2 &= \ddot{q}_2 m_2 + \ddot{q}_1 m_2 \sin \varphi - gm_2 \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 m_2 q_2. \end{aligned}$$

Для проверки работоспособности модели зададим управляющие воздействия  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  (см. рис. 3 на цв. вклейке; на нем же показаны управляющие воздействия).

Сравнение работы разработанной модели и крана показали достаточно быстрое затухание колебаний после остановки крана.

#### 4. АЛГОРИТМ ДЕМПФИРОВАНИЯ

Алгоритм демпфирования построен аналогично действиям опытных операторов. Данный метод позволяет минимизировать

высокоамплитудные колебания груза, вызванные быстрым разгоном и быстрым торможением при перемещении. Алгоритм заключается в следующем:

- 1) оператор подает сигнал для начала работы;
- 2) система максимально быстро останавливает подвижное основание  $q_1(t) = 0$ ;
- 3) система отслеживает положение груза относительно основания;
- 4) когда груз перемещается в сектор А (рис. 4, б на цв. вклейке) и направление движения груза совпадает с предыдущим направлением движения основания, то  $q_1(t)$  задается равным скорости груза;
- 5) во всех остальных случаях  $q_1(t) = 0$ .

Данный алгоритм был реализован при помощи нечеткой логики. Это позволило перевести количественные характеристики переменных в лингвистические переменные, что упростило настройку регулятора и позволило перевести системы на более объектно-ориентированный уровень. В результате система получает достаточный запас для последующей модернизации.

На рис. 3 показаны колебания груза при работе данного регулятора. Из графика видно, что остановка происходит за 40 с в соответствии с рис. 3 на цв. вклейке, из которого видно, что регулятор убрал высокоамплитудные колебания.

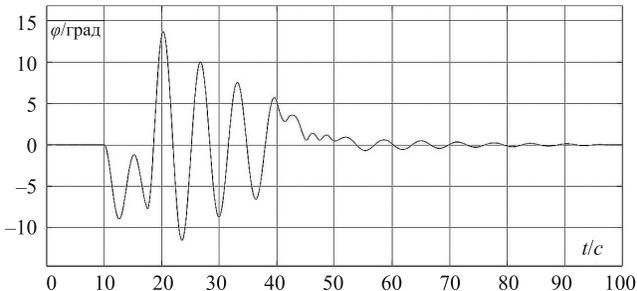


Рис. 3. Алгоритм демпфирования

## 5. Выводы

Разработана модель объекта управления, которую можно использовать не только для синтеза рассмотренного регулятора, но и для дальнейшей разработки более сложных систем. Разработана полуавтоматическая система демпфирования для обеспечения квалифицированных действий менее опытных операторов. Она позволит использовать устаревшие грузоподъемные системы, приведя их в соответствие с современными условиями рынка и объемами грузоперевозок.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Голоденко Б. А., Чеснокова Е. В. Моделирование одномерного гармонического осциллятора в среде MATLAB/SIMULINK // Вестник Воронеж. ун-та инженерных технологий. 2012. Вып. 2. С. 81–84.
2. Неспирный В. Н., Королев В. А. Стабилизация колебаний маятника с подвижной точкой подвеса относительно наклонного равновесия // Механика твердого тела. 2009. Вып. 39. С. 195–206.
3. Поляхов Н. Н., Зегзёда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. 3-е изд. М.: Юрайт, 2012. 592 с.
4. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособие. В 10 т. Т. 1. Механика. М.: Наука, 2008. 216 с.

## **РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК**

### **Анализ чувствительности моделей БИОМЕХАНИКИ ГЛАЗА ЧЕЛОВЕКА**

Д. И. ЖУРАВЛЕВА

Доклад на семинаре 13 сентября 2016 г.

В работе рассматриваются четыре метода глобального анализа чувствительности: метод элементарных эффектов, метод Соболя, метод разложения в полиномиальный хаос и метод PAWN. Проводятся анализ и валидация трех моделей изменения внутриглазного давления при интравитреальных инъекциях. Во всех моделях глаз человека полагается оболочкой, заполненной несжимаемой жидкостью. В первой модели — это изотропная сферическая оболочка, во второй — трансверсально-изотропная сферическая оболочка, а в третьей — трансверсально-изотропная эллипсоидальная оболочка.

### **Твердость циркониевых стекол, полученных методом интенсивной пластической деформации кручением**

С. И. РЕРИХ

Доклад на семинаре 27 сентября 2016 г.

Влияние интенсивных пластических деформаций на механические свойства объемных металлических стекол (Bulk Metallic Glasses — BMG) стало объектом научного изучения в последние несколько лет. Цель данной работы — провести анализ изменений значений микротвердости объемного металлического стекла  $Zr_{62}Cu_{22}Al_{10}Fe_5Dy_1$ , обработанного путем кручения под высоким давлением, как одним из методов интенсивной пластической деформации. Кручение проводилось при комнатной температуре и температуре  $150\text{ }^{\circ}\text{C}$  под давлением 6 ГПа на пять оборотов. Твердость измерялась по Виккерсу. Величина микротвердости материала, подвергнутого кручению под давлением при комнатной температуре, была значительно ниже, чем у материала в недеформированном состоянии. Обработка при  $150\text{ }^{\circ}\text{C}$  не приводит к значительным изменениям значений микротвердости. Наблюдаемые изменения могут быть объяснены за счет перераспределения и эволюции свободного объема. Для выявления природы наблюдаемых изменений будут проведены детальные исследования внутренней структуры.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
ЭЛЕМЕНТОВ СУДОВЫХ ПЛАСТИН ПАЛУВНОГО НАСТИЛА**

В. А. МАЛЬЦЕВ

Доклад на семинаре 4 октября 2016 г.

Цель работы — исследование напряженно-деформированного состояния палубы контейнеровоза в период эксплуатации и на стадии проектирования. Проведен анализ современных методов оценки напряженно-деформированного состояния судовых пластин. В качестве обзора рассмотрены основные программные комплексы, позволяющие проводить подобные расчеты, их положительные и отрицательные стороны. Для решения поставленной задачи разработано программное обеспечение, основанное на решении нелинейной системы дифференциальных уравнений Кармана методом конечных разностей. Ввиду нелинейности, для решения предлагается использовать метод Левенберга—Марквардта. Приведены результаты работы созданного в рамках исследования программного обеспечения.

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ АСПЕКТЫ ДИНАМИКИ  
ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ  
ЭКРАНИРОВАННОГО ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ  
ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС**

Д. Ю. НИКИТИН

Доклад на семинаре 18 октября 2016 г.

Рассматривается ИСЗ с системой трех экранов электростатической защиты (ЭСЗ), выполненных в виде заряженных тороидальных оболочек, имеющих внешние радиусы порядка 100 м. В результате взаимодействия электрического заряда экранов с магнитным полем Земли (МПЗ) возникает момент сил Лоренца, влияющий на вращательное движение искусственных спутников Земли (ИСЗ). Ввиду больших размеров конструкции ЭСЗ момент лоренцевых сил вычисляется с учетом сложной формы экранов, а также градиентности МПЗ в объеме экранов. Предполагается, что центр заряда ИСЗ совпадает с его центром масс. В качестве расчетной модели МПЗ принимается модель «прямой магнитный диполь». В данной работе исследуется возможность использования лоренцева момента для пассивной и полупассивной стабилизации ИСЗ, оснащенного ЭСЗ, движущегося по круговой околоземной экваториальной орбите. В работе построена математическая модель, описывающая динамику вращательного движения ИСЗ, оснащенного системой ЭСЗ, в МПЗ и построен ее первый интеграл. Найдено прямое положение равновесия (ППР) ИСЗ в орбитальной системе координат. Получены достаточные условия устойчивости ППР с использованием построенного первого интеграла с учетом влияния гравитационного момента и в предположении об его отсутствии. Проанализирована область устойчивости ППР в зависимости от параметров системы. Для дина-

мически и электростатически симметричных ИСЗ найдены стационарные режимы вращения в орбитальной системе координат и получены достаточные условия устойчивости этих вращений.

**ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
ТИТАНА GRADE 4 ПОСЛЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ  
МЕТОДОМ «РКУП-КОНФОРМ»**

А. Г. Стоцкий

Доклад на семинаре 15 ноября 2016 г.

Целью работы является повышение механических свойств титана Grade 4 за счет формирования ультрамелкозернистой (УМЗ) структуры методом «РКУП-Конформ», а также получение плазменно-электролитических оксидных (ПЭО) покрытий на поверхности титана Grade 4. В результате интенсивной пластической деформации методом «РКУП-Конформ» при температуре 200°С существенно повышается предел прочности и микротвердость на начальных этапах деформации. При дальнейшей деформации предел прочности растет постепенно. Микротвердость к четвертому проходу выходит на насыщение, что может быть связано с динамическим возвратом. Результаты ПЭО титана показывают, что в зависимости от условий процесса электролитно-плазменной обработки можно получить покрытие с необходимыми характеристиками. При этом добавление биоорганической добавки ацетата кальция позволяет получать покрытия на металлических имплантатах, что, в свою очередь, представляет большой интерес для современной медицины.

**К ВОПРОСУ ОБ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ  
ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС  
ЭКРАНИРОВАННОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА,  
НАХОДЯЩЕГОСЯ НА РЕГРЕССИРУЮЩЕЙ ОРБИТЕ**

Д. Г. Корытников

Доклад на семинаре 22 ноября 2016 г.

В работе изучается вращательное движение космического аппарата (КА), относительно центра масс, движущегося по околоземной орбите. КА снабжен заряженным экраном электростатической защиты с управляемым распределением заряда, а также управляемым собственным магнитным моментом. Учитывается возмущающее влияние гравитационного момента. Учитываются вековые возмущения орбиты, вызванные второй зональной гармоникой геопотенциала. Используется окупольное приближение геомагнитного поля. Решается задача электродинамической стабилизации вращательного движения КА в орбитальной системе координат в случае регрессирующей орбиты при помощи лоренцева момента и момента магнитного взаимодействия.

Для решения поставленной задачи используется система электродинамической стабилизации КА. Нецентральность гравитационного поля приводит к возникновению в выражении гравитационного момента слагаемых, не зависящих от ориентации КА. Разработана методика электродинамической компенсации постоянно действующего возмущающего момента, которая затем применяется к решению поставленной задачи. Представленные в работе численные эксперименты подтверждают эффективность предложенного метода стабилизации КА.

### **ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТИТАНОВОГО СПЛАВА ВТ8М-1, ПОДВЕРГНУТОГО ИНТЕНСИВНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

И. А. МЕЛЕМЧУК

Доклад на семинаре 6 декабря 2016 г.

Целями работы являются формирование ультрамелкозернистой (УМЗ) структуры и повышение механических характеристик сплава ВТ8М-1 посредством интенсивной пластической деформации (ИПД). Микроструктурные исследования показали, что в ходе ИПД сплава ВТ8М-1 методом равноканального углового прессования (РКУП) развиваются процессы фрагментации и глобуляризации пластинчатой составляющей сплава. После шести проходов РКУП формируется бимодальная структура с глобулями первичной  $\alpha$ -фазы и мелкодисперсной глобулярной смеси ( $\alpha + \beta$ )-фаз, со средним размером частиц 0,67 мкм.

Прочностные свойства сплава в результате формирования в нем УМЗ структуры существенно повышаются при незначительном снижении пластичности.

### **ВЛИЯНИЕ ИНТЕНСИВНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ КРУЧЕНИЕМ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ И УСТАЛОСТНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВА ВТ6**

Ф. А. ГАДЖИЕВ

Доклад на семинаре 21 февраля 2017 г.

Целью данного исследования является изучение влияния размеров образца из сплава ВТ6 на его усталостные и механические свойства. Статическое растяжение образцов показало, что деформация, возникающая до разрушения малых образцов, почти в 2 раза больше деформации больших образцов, что можно связать со статистическим фактором. Малоцикловые ветви усталостных кривых образцов малого и стандартного размера хорошо соответствуют друг другу, в то время как многоцикловые испытания показали, что предел выносливости больших образцов существенно выше. Кроме того, было исследовано влияние режима интенсивной пластической деформацией кручением (ИПДК) и последующей термобработки на механические свойства ВТ6.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВ МАГНИЕВОГО СПЛАВА, ПОДВЕРГНУТОГО ИПДК

Я. В. Чернейкина

Доклад на семинаре 28 февраля 2017 г.

Целью данного исследования является повышение механических свойств и улучшение коррозионных свойств магниевого сплава Mg-1% Ca, подвергнутого интенсивной пластической деформации (ИПДК). Результатом исследования является получение ультрамелкозернистой (УМЗ) структуры методом ИПДК со средним размером зерна  $210 \pm 9$  нм. К УМЗ-образцам были применены отжиги при различных температурах. Установлено оптимальное сочетание прочности ( $245 \pm 12$  МПа) и пластичности ( $4,0 \pm 0,3$  %) в образцах после ИПДК и дополнительной термической обработки при температуре  $250^\circ\text{C}$ . Для повышения коррозионной стойкости на образцы с разным средним размером зерен было нанесено покрытие методом плазменно-электролитического оксидирования (ПЭО). Было выявлено, что образцы без покрытия сильно подвержены коррозионному износу. ПЭО-покрытие благоприятно сказывается на коррозионной стойкости материала.

## ВЛИЯНИЕ ДИСИПАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЗАКОНОМЕРНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ СТАРЕЮЩИХ ВЯЗКО-УПРУГИХ СРЕД

М. Д. Ушаков

Доклад на семинаре 21 марта 2017 г.

Эксплуатационные условия, в которых могут находиться пластмассы, полимерные изделия и конструкции, защитные покрытия, не всегда бывают благоприятными для устойчивого состояния материала. Полимерные материалы подвергаются влиянию механических (напряжения различной интенсивности), физических (тепло, свет, радиация), химических (кислород, вода и др.) факторов. Внутренние физико-химические процессы, протекающие в результате этих воздействий, приводят к изменению характеристик полимеров. В совокупности эти процессы определяют старение материала.

В связи с массовым внедрением полимеров и композитов на их основе в машиностроении, сельском хозяйстве, медицине, автомобиле- и аэростроении стоит актуальный вопрос прогнозирования работоспособности этих материалов с учетом факторов старения.

Хорошо известны многочисленные факты внезапного разрушения элементов конструкций при сравнительно малых деформациях после длительного времени нормальной работы. Этот процесс связан с накоплением повреждений, различных дефектов, микропор, трещин. Когда повреждения достигают опасного уровня, происходит разрушение конструкции. В простейшем варианте поврежденность можно описать некоторым скаляром, который можно интерпретировать как сплошность.

В данной работе рассматривается параметр поврежденности Качанова—Работнова на примере упруго-вязкой модели Максвелла с использованием эффективного времени. Параметр эффективного времени позволяет описать взаимосвязанные деформационные и физико-химические процессы, что способствует более качественному описанию разрушения в процессе старения.

### **ИЗМЕНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА РАССЕЯНИЯ СОЛЕВЫХ АЭРОЗОЛЕЙ В РЕЗУЛЬТАТЕ ГИГРОСКОПИЧЕСКОГО РОСТА**

В. Э. Кондренкина

Доклад на семинаре 28 марта 2017 г.

Одним из основных факторов неопределенности в понимании климатической системы Земли является взаимодействие между солнечным излучением и атмосферными аэрозолями. Это обусловлено тем, что аэрозоли представляют собой наиболее изменчивый компонент атмосферы. Один из аспектов такой изменчивости связан с зависимостью оптических свойств гигроскопических аэрозолей от относительной влажности воздуха. Именно поэтому при оценках аэрозольного радиационного форсинга необходимо рассчитывать коэффициенты рассеяния увлажненных аэрозолей. Данная работа посвящена решению этой задачи для солевых аэрозольных частиц, закономерности гигроскопического роста которых хорошо изучены. Расчет коэффициентов рассеяния для полидисперсных аэрозолей выполнен на основе теории Ми. Обнаружена сильная зависимость коэффициента рассеяния солевых частиц от влажности, что позволяет сделать вывод о важности учета гигроскопического роста аэрозолей в задачах оптики атмосферы.

### **ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА—ЧЕПМЕНА И ИХ СВЯЗЬ С УРАВНЕНИЯМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

О. В. Баринаова

Доклад на семинаре 4 апреля 2017 г.

В настоящей работе устанавливается связь некоторых частных решений билинейного уравнения Колмогорова—Чепмена с линейными дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями. При этом рассмотрены примеры случайных марковских процессов с непрерывной и разрывной траекториями. Получены дифференциальные уравнения диффузии, интегро-дифференциальные уравнения. Оказалось, среди последних есть уравнения с сингулярными интегралами и уравнения с дробными производными, ранее неизвестные в теории марковских процессов. При выводе использовались асимптотический анализ, нестандартные оценки интегралов посредством леммы Эрдейи, процедуры вычисления интеграла в смысле главного значения по Коши и другие приемы из математической физики.

**Одноосное растяжение бесконечных пластин  
с эллиптическими вставками**

А. В. ТАРАСОВ

Доклад на семинаре 18 апреля 2017 г.

В работе произведен сравнительный анализ двух решений для данного типа задач: решения Дж. Н. Хардиман и решения В. М. Малькова и Ю. В. Мальковой. Решения были получены при использовании различных подходов к задачам теории упругости. Также проведен анализ устойчивости пластин с использованием метода виртуальных перемещений и произведена оценка приращения энергии деформации пластины.

**Исследование возможности  
анализа биомеханики легких  
для применения в клинической практике**

В. В. МАКЕВНИНА

Доклад на семинаре 25 апреля 2017 г.

Доклад посвящен исследованию возможности и актуальности создания способа, позволяющего оценивать и наглядно отображать регионарное распределение вентиляции в легких. Представлен краткий обзор моделей легких человека и предложен способ, позволяющий реализовать поставленную задачу: оценивать и наглядно отображать влияние вентиляции на биомеханику легких конкретного пациента.

## ХРОНИКА

### 28-й СЕМИНАР СЕВЕРНЫХ СТРАН ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

22–23 октября 2016 г. в Гетеборге (Швеция) состоялся 29-й Семинар северных стран по вычислительной механике. Организатором семинара являлась Северная ассоциация вычислительной механики (NoACM, <http://www.noacm.org/>), представляющая интересы Международной ассоциации вычислительной механики (IACM). Первый подобный ежегодный семинар прошел в 1988 г. в Гетеборге (Швеция). В семинаре традиционно участвуют представители стран Северной Европы (Дании, Финляндии, Исландии, Норвегии, Швеции) и Прибалтики (Эстонии, Латвии и Литвы).

Семинар проводился в Швеции на базе Технического университета Чалмерса (Chalmers tekniska högskola) и был посвящен вопросам, связанным с развитием вычислительных методов и их использованию для решения широкого класса задач механики. Председателем оргкомитета был профессор Рагнар Ларссон (Ragnar Larsson).

Четыре пленарных доклада были посвящены актуальным вопросам вычислительной механики:

- Marie E. Rognes (Simula Research Laboratory AS). “High-level abstractions, algorithms and applications in forward and inverse finite element solution of PDEs”;
- Bo Gervang (Aarhus University). “Mimetic Discretisation Methods”;
- Timo Saksala (Tampere University). “Numerical modeling of rate-sensitive materials with embedded discontinuity finite elements”;
- Iman Lashgari (Linne FLOW Centre and SeRC, KTH Mechanics). “Interface-resolved simulations of inertial suspension of rigid particles”.

На секциях семинара выступили постоянные участники семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”:

- профессор С.М. Бауэр и аспирант Е.О. Боденкова с докладом “Mathematical Modeling of Elastotonometry of an Eye” на секции биомеханики;

- профессор С.Б. Филишов и аспирант Г.А. Нестерчук с докладом “Buckling of thin ring-stiffened cylindrical shells under uniform pressure” на секции механики конструкций;
- доценты А.Л. Смирнов и А.Н. Бестужева с докладом “Propagation Dynamics of a Diffusing Substance on the Surface and in the Bulk of Water” на секции методов вычислительной механики жидкости.

Научный уровень докладов был очень высоким, атмосфера на семинаре — творческой и дружественной, чему способствовали комфортные условия для общения, равноправие участников, отсутствие барьеров для обмена мнениями, обсуждение актуальных задач и перспективы партнерства по итогам конференции. Заключительное заседание семинара, на котором были подведены его итоги, прошло в Научном центре-музее “Универсум” (Universeum).

Следующий, 30-й семинар прошел 23–25 октября 2017 г. в Ольборге (Норвегия).

*А. Л. Смирнов*

## ОБ АВТОРАХ

**Баринова Ольга Вячеславовна** — аспирантка 1-го курса кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Научные интересы — теория случайных марковских процессов, теория вероятностей и математической статистики, стохастические модели в механике и экономике, асимптотический анализ функций. Научный руководитель — проф. Р. Н. Мирошин. E-mail: barinova.o.v@bk.ru

**Валов Андрей Владимирович** — выпускник магистратуры Дальневосточного федерального университета по специальности «Мехатроника и робототехника», инженер транспортно-погрузочных систем ОАО «Владивостокский морской торговый порт».

**Гаджиев Фарид Алиевич** — студент 1-го курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — материаловедение и обработка металлов давлением. Научный руководитель — проф. Р. З. Валиев. E-mail: gadzhiev.farid@gmail.com

**Дружинин Василий Григорьевич** — студент 1-го курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — физическая механика, теория автоматического управления. Научный руководитель — проф. В. А. Морозов. E-mail: vasily.dr.mob@gmail.com

**Журавлева Дарья Ильинична** — студентка 1-го курса магистратуры кафедры математического моделирования энергетических систем факультета прикладной математики и процессов управления Санкт-Петербургского государственного уни-

верситета. Область научных интересов — анализ чувствительности, математическое моделирование. Научный руководитель — доц. Е. Б. Воронкова. E-mail: dazhu912@gmail.com

**Зелинская Анна Владимировна** — аспирантка кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — механика тонкостенных конструкций. Научный руководитель — проф. П. Е. Товстик. E-mail: anna\_zelinskaya@inbox.ru

**Каштанова Станислава Викторовна** — выпускница аспирантуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (2016 г.). Автор работ в области наномеханики и устойчивости тонких пластин. Научный руководитель — академик РАН Н. Ф. Морозов, научный консультант — проф. С. М. Бауэр. E-mail: kastasya@yandex.ru

**Кондренкина Владлена Эдуардовна** — студентка 1-го курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Научный руководитель проекта — доц. С. С. Власенко. E-mail: vladlenak2307@gmail.com

**Корниенко Ольга Валерьевна** — студентка 1-го курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Автор одной опубликованной работы. Научный руководитель — проф. Е. В. Кустова. E-mail: st013775@student.spbu.ru

**Корытников Дмитрий Геннадьевич** — студент 1-го курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — электродинамическое управление вращательным движением космического аппарата относительно центра масс. Научный руководитель — проф. А. А. Тихонов. E-mail: dgkorytnikov@gmail.com

**Макевнина Виктория Валерьевна** — студентка 1-го курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — респираторная поддержка,

биомеханика легких. Научный руководитель — проф. С. К. Матвеев. E-mail: [nikvik29@mail.ru](mailto:nikvik29@mail.ru)

**Мальцев Валерий Александрович** — аспирант 4-го курса кафедры прикладной математики факультета информационных технологий Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. Область научных интересов — теория упругости, исследование напряженно-деформированного состояния пластин, САПР. Научный руководитель — доц. С. С. Соколов. E-mail: [arelav90@mail.ru](mailto:arelav90@mail.ru)

**Мелемчук Илья Антонович** — студент 1-го курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — материаловедение и обработка металлов давлением. Научный руководитель — канд. техн. наук Г. С. Дьяконов. E-mail: [melemchuk@yandex.ru](mailto:melemchuk@yandex.ru)

**Никитин Данил Юрьевич** — студент 1-го курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — математическое моделирование, устойчивость движения. Научный руководитель — проф. А. А. Тихонов. E-mail: [danil\\_nikitin94@mail.ru](mailto:danil_nikitin94@mail.ru)

**Рерих Степан Иванович** — студент 1-го курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — материаловедение, теория пластичности. Научный руководитель — проф. Р. З. Валиев. E-mail: [osteban1995@gmail.com](mailto:osteban1995@gmail.com)

**Смирнов Алексей Сергеевич** — студент 2-го курса магистратуры кафедры механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, стажер-исследователь института проблем машиноведения РАН. Область научных интересов — аналитическая механика, теория колебаний, динамика твердого тела, теория устойчивости, оптимизация в механике, волны в деформируемых средах. Научный руководитель — проф. Б. А. Смольников. E-mail: [smirnov.alexey.1994@gmail.com](mailto:smirnov.alexey.1994@gmail.com)

**Смирнов Андрей Леонидович** — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербур-

ского государственного университета, автор публикаций по вопросам механики тонкостенных конструкций.

E-mail: a\_l\_smirnov@mail.ru

**Смольников Борис Александрович** — проф. кафедры механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов — общая механика, биомеханика и робототехника, движение космических объектов, теория управления. Автор четырех книг и многочисленных статей по вопросам динамики твердого тела, робототехники и механики управляемых космических объектов. E-mail: smolnikovba@yandex.ru

**Стоцкий Андрей Геннадиевич** — студент 1-го курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — материаловедение и обработка металлов давлением. Научный руководитель — канд. техн. наук Г. С. Дьяконов. E-mail: stockii\_andrei@mail.ru

**Тарасов Андрей Викторович** — аспирант 1-го курса кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, научный руководитель — доц. Г. В. Павилайнен. E-mail: andtarasov1993@rambler.ru

**Товстик Петр Евгеньевич** — проф., зав. кафедрой теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Автор многочисленных работ в области механики тонкостенных конструкций, теоретической механики и механики сплошной среды. E-mail: peter.tovstik@mail.ru

**Ушаков Максим Дмитриевич** — студент 1-го курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — старение и длительная прочность полимерных материалов. Научный руководитель — проф. Р. А. Арутюнян. E-mail: maks1003kecu@yandex.ru

**Франус Дмитрий Валерьевич** — аспирант кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — теория оболочек, биомеханика. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр. E-mail: franus@mavis.ru

**Чернейкина Яна Владимировна** — студентка 1-го курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — материаловедение и обработка металлов давлением. Научный руководитель — канд. техн. наук О. Б. Кулясова. E-mail: yanochka-1994-ch@mail.ru

**Шелковина Вероника Александровна** — аспирантка 2-го курса кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — роторная динамика, автобалансировка. Научный руководитель — доц. В. Г. Быков. E-mail: weronik-s@yandex.ru

## SUMMARIES

### *Shelkovina V. A.* **Mathematical models of a rotor equipped with a ball self-balancing system**

A static unbalanced Jeffcott rotor equipped with a ball self-balancing system is studied. The rotor rotates with the given constant angular velocity. Assuming a “slow” change in the sought variables describing the movement of the rotor center and the balance balls in the coordinate system rotating with the rotor, two approximate systems of “short” equations are derived. Numerical studies of the transient modes and the investigation of the stability of balanced/unbalanced stationary modes show that under some constraints on the parameters of the system, the use of “short” equations is justified and does not lead to serious loss of accuracy.

MSC class: 37M06, 58K25.

*Keywords:* rotor, ball self-balancing device, Routh criterion, diagrams of stability.

#### REFERENCES

1. *Blekhman I. I.* Synchronization of dynamical systems. Moscow: Nauka, 1971. 896 p. [in Russian]
2. *Genta D.* Dynamics of Rotating Systems. Springer, 2005. 658 p.
3. *Bykov V. G.* Stationary modes of motion of an unbalanced rotor with the automatic balancer // Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy. 2006. N 2. P. 90–101. [in Russian]
4. *Bykov V. G., Shelkovina V. A.* Dynamics and stability analysis of static unbalanced rotor with the automatic balancer using simplified mathematical model // The Seventh Polyakhov's Reading. Book of abstracts. 2015. P. 198. [in Russian]

### *Kornienko O. V.* **Influence of variable molecular diameter on the transport coefficients in the state-to-state approach**

The influence of variable diameter of vibrationally excited molecules on the shear viscosity and thermal capacity coefficients in the state-to-state approach is studied. For various potentials, temperatures in

case of equilibrium vibrational distribution the ratio of state-to-state shear viscosity coefficient to that for the molecule in the ground state and the same ratio for thermal capacity is calculated. For all cases considered, rising of molecular size with the vibrational state does not affect the coefficients; the deviation does not exceed 13%. Thus we prove the validity of the assumption that dependence of elastic collision cross section on the vibrational state can be neglected while calculating state-to-state transport coefficients. This gives justification for applying simplified algorithms for simulation of state-specific transport coefficients which reduce considerably computational resources required for the solution of modern non-equilibrium fluid dynamic problems.

MSC class: 82C40.

*Keywords:* transport coefficients, molecular diameter, vibrational excited state, state-to-state approach.

#### REFERENCES

1. *Nagnibeda E. A., Kustova E. V.* Non-Equilibrium Reacting Gas Flows. Springer, 2009. [in Russian]
2. *Kustova E. V., Nagnibeda E. A.* Transport properties of a reacting gas mixture with strong vibrational and chemical nonequilibrium // *Chem. Phys.* 1998. Vol. 233. P. 57–75.
3. *Kang S. H., Kunc J. A.* Molecular diameters in high-temperature gases // *J. Phys. Chem.* 1991. Vol. 95. P. 6971–6973.
4. *Gorbachev Yu. E., Gordillo-Vazquez F. J., Kunc J. A.* Diameters of rotationally and vibrationally excited diatomic molecules // *Physica A.* 1997. Vol. 247. P. 108–120.
5. *Gordillo-Vazquez F. J., Kunc J. A.* Rotational-Vibrational levels of diatomic molecules represented by the Tietz–Hua rotating oscillator // *J. Phys. Chem.* 1997. Vol. 101. P. 1595–1602.
6. *Gordillo-Vazquez F. J., Kunc J. A.* Radial probability of atoms in diatomic molecules represented by the rotating Morse and Tietz–Hua oscillators // *J. Theo. Chem.* 1998. Vol. 425. P. 263–270.
7. *Kornienko O. V., Kustova E. V.* Influence of variable molecular diameter on the viscosity coefficient in the state-to-state approach // *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy.* 2016. Vol. 3 (61), iss. 3. P. 457–468. [in Russian]

8. *Kustova E. V., Kremer G. M.* Effect of molecular diameters on state-to-state transport properties: the shear viscosity coefficient // *Chem. Phys. Lett.* 2015. Vol. 636. P. 84–89.
9. *Jaffe R. L.* The calculation of high-temperature equilibrium and nonequilibrium specific heat data for N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub> and NO // *AIAA Paper 87-1633*, AIAA 22<sup>nd</sup> Thermophys. Conference, 1987.
10. *Kustova E. V., Kremer G. M.* Influence of state-to-state vibrational distributions on transport coefficients of a single gas // *AIP Conf. Proc.* 1786, 070002 (2016). doi: 10.1063/1.4967578

*Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* **Resonance oscillations control in the nonlinear mechanical systems**

The existence and location questions of controlled resonance modes in the nonlinear mechanical systems with several degrees of freedom are studied in the work. Such a resonance can be treated as autoresonance because the control actions in the system based on the principle of feedback. The main subject of research is a double mathematical pendulum, although the proposed technique is suitable for other systems. So-called collinear control of the system motion is formed. It is kinetic i. e. taking into account the dynamic structural features. This control doesn't violate the oscillation forms of the linearized system, but only amplifies their amplitudes. It's possible to sway the double pendulum for each of its free oscillation forms separately by means of collinear control specifying the corresponding initial conditions so that all the supplied energy goes entirely to the excitation of only one form. However, such a flexible control of forms is possible only in a linear system in which there is a classical definition of the oscillation forms. Nevertheless, it is possible to analyze the drift of oscillations forms and frequencies during a smooth transition from the linear zone to the nonlinear one. Asymptotic formulas are constructed for the analytical description of nonlinear single-frequency oscillations. They reflect the behavior of the system for sufficiently large amplitudes quite adequately and are in good agreement with the results obtained by numerical integration of the motion equations.

MSC class: 70K30.

*Keywords:* resonance mode, nonlinear mechanical system, collinear

control, double mathematical pendulum, oscillation forms, asymptotic solutions.

#### REFERENCES

1. *Timoshenko S. P.* Vibration problems in engineering. Moscow: Nauka, 1967. 442 p. [in Russian]
2. *Biderman V. L.* The theory of mechanical vibrations. Moscow: Vyshaya Shkola, 1980. 408 p. [in Russian]
3. Strength, stability, vibrations. Vol. 3 / Eds I. A. Birger, Ya. G. Panovko. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 567 p. [in Russian]
4. *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Controlling the sway process of the swing // Week of Science of SPbPU: materials of the scientific and practical conference with international participation. Institute of Applied Mathematics and Mechanics. St. Petersburg: SPbPU, 2016. P. 106–109. [in Russian]
5. *Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E.* The theory of oscillations. Moscow: Nauka, 1981. 918 p. [in Russian]
6. *Fradkov A. L.* Cybernetical physics: principles and examples. St.-Petersburg: Nauka, 2003. 208 p. [in Russian]
7. Control of mechatronic vibration installations. / Eds I. I. Blekhman, A. L. Fradkov. St. Petersburg: Nauka, 2001. 278 p. [in Russian]
8. *Smolnikov B. A., Yurevich E. I.* About the problem of biomorphic motion control // Robotics and technical cybernetics. 2015. N 1 (6). P. 17–20. [in Russian]
9. *Smolnikov B. A.* Mechanics problems in advanced robotics // Robotics and technical cybernetics. 2016. N 1 (10). P. 3–6. [in Russian]
10. *Merkin D. R., Smolnikov B. A.* Applications of rigid body dynamics. St.-Petersburg: St. Petersburg University, 2003. 534 p.
11. *Smolnikov B. A.* Problems of mechanics and optimization of robots. Moscow: Nauka, 1991. 232 p. [in Russian]
12. *Lamb G.* Theoretical mechanics. Vol. 2. Dynamics. Moscow, Leningrad: GTTI, 1935. 311 p. [in Russian]
13. *Butenin N. V., Luntz Ya. L., Merkin D. R.* Course of theoretical mechanics. Vol. 2: Dynamics. Moscow: Nauka, 1979. 544 p. [in Russian]
14. *Vilke V. G.* Theoretical mechanics. St. Petersburg: Lan, 2003. 304 p. [in Russian]
15. *Golubeva O. V.* Theoretical mechanics. Moscow: Vyshaya Shkola, 1968. 487 p. [in Russian]
16. *Markeev A. P.* Theoretical mechanics. M., Izhevsk: R&C Dynamics, 2007. 591 p. [in Russian]

17. *Nayfe A. H.* Introduction to perturbation methods. Moscow: Mir, 1984. 536 p. [in Russian]
18. *Bogolyubov N. N., Mitropolsky Yu. A.* Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. Moscow: GIFML, 1958. 406 p. [in Russian]

***Kashtanova S. V.* The stability of plates of nano-sized thickness**

In the first part of the paper two cases of the surface tensions effects on the stability of a stretched infinite plate with a hole (on the boundary of the hole and along the plate) are examined and qualitative comparison of these cases and comparison with the experiment are conducted.

In the second part of the paper the stability loss of an infinite plate with a circular inclusion of another elastic material and the influence of the elastic moduli on the stability loss are studied. The qualitative comparison of the results with the ANSYS data is made.

MSC class: 74K04, 82D80.

*Keywords:* stability loss, shells and plates, nanomechanics, theory of elasticity.

**REFERENCES**

1. *Miller R. E., Shenoy V. B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // Nanotechnology. 2000. Vol. 11, iss. 3. P. 139–147.
2. *Shenoy V. B.* Atomistic calculations of elastic properties of metallic for crystal surfaces // Phys. Rev. 2005. B 71, N9. P. 94–104.
3. *Eremeev V. A., Ivanova E. A., Morozov N. F.* Mechanical Problems in Nanotechnology // Izv. Saratov University. Ser. Math., Mech., Inform. 2008. Vol. 8, iss. 3. P. 25–32. [in Russian]
4. *Ivanova E. A., Indeitzev D. A., Morozov N. F.* To the question of the determination of the rigidity parameters of nanoobjects // J. of Tech. Phys. 2006. Vol. 76 (10). P. 74–80. [in Russian]
5. *Jing G. Y., Duan H. L., Sun X. M., Zhang Z. S.* et al. Surface effects on elastic properties of silver nanowires: contact atomic-force microscopy // Phys. Rev. B. 2006. Vol. 73, iss. 23. P. 235409.
6. *Grekov M. A., Morozov N. F.* Solution of the Kirsch problem in view of surface stresses // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2011. Vol. 52. P. 123–129; Vol. 53. P. 163–164.

7. *Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. N.Y.: McGraw Hill, 1959. 595 p.
8. *Altenbach H., Eremeev V., Morozov N.* Linear theory of shells taking into account surface stresses // Doklady Physics. 2009. Vol. 54 (12), P. 531–535.
9. *Deryugin Ye. Ye., Lasko G. V.* Field of stresses in an isotropic plane with circular inclusion under tensile stresses. Engineering. 2012. Vol. 4. P. 583–589.

### ***Franus D. V.* The model of corneal shell during applanation tonometry**

The paper presents the analysis and research of possible relations between elastic moduli of the corneal shell in the tangential direction and the thickness direction in case of incompressibility, while Hooke's law for transversely isotropic shells is applied. Relation of possible elastic moduli in different directions are received in case of incompressibility. Finite-element model of "slightly" compressible multilayered corneal shell loaded with a flat base stamp at different values of intraocular pressure is considered. The result of FE modeling is that epithelium together with Bowman's membrane, while being loaded, loses its thickness in five times, which is approximately 30% of the total thickness loss of the corneal shell in its center. The study shows reduction of the thickness of corneal shell when it is loaded with a flat base stamp almost doesn't depend on the value of intraocular pressure. However, it depends on the weight of the flat base stamp. The FE model allows to measure the change of thickness of different layers of the corneal shell when it is loaded with a flat base stamp of different weights in case of variable value of intraocular pressure.

MSC class: 74K25, 74S05.

*Keywords:* corneal shell, applanation tonometry, intraocular pressure, incompressibility.

#### **REFERENCES**

1. *Uchio E., Ohno S., Kudoh J., Aoki K.* et al. Simulation model of an eyeball based on finite-element analysis on a supercomputer // The British J. of Ophthalmol. 1999. Vol. 83 (10). P. 1106–1111.
2. *Rodionova V. A., Titaev B. F., Chernikh K. F.* Applied theory of anisotropic plates and shells. SPb.: SPbSU, 1996. 278 p. [in Russian]

3. *Itskov M., Aksel N.* Elastic constants and their admissible values for incompressible and slightly compressible anisotropic materials // *Acta Mechanica*. 2002. Vol. 157. P. 81–96.
4. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Mathematical modeling in ophthalmology // *Proc. of seminar “Computer methods in continuum mechanics” 2013–2014*. SPb.: SPbSU, 2014. P. 5–48. [in Russian]
5. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Models of shells and plates in the problems of ophthalmology // *Vestnik SPbSU. Ser. 1*. 2014. Vol. 1 (59), iss. 3. P. 438–458. [in Russian]
6. *Iomdina E. N., Bauer S. M., Kotlyar K. E.* Biomechanics of the eye: theoretical aspects and clinical application. Moscow: Real Time, 2015. 208 p. [in Russian]

*Zelinskaya A. V., Tovstik P. E.* **Free vibrations of the transversely isotropic cylindrical elliptical shell**

Free vibrations localized in a neighbourhood of the weakest generatrix of the cylindrical elliptical shell are considered. The edges of shell are articulately supported. The equations of free vibration of an isotropic shell can be obtain on the basis of the classical Kirchhoff–Love model. The accuracy of the Kirchhoff–Love equations for a transversely isotropic shell is not enough. The Timoshenko–Reissner model taking into account a transversal shear are used in this study.

MSC class: 4G10, 74G15, 74K25, 74J15.

*Keywords:* cylindrical shell, free vibrations, the generalized Timoshenko–Reissner model.

**REFERENCES**

1. Bushnell D. Buckling of shells – pitfalls for designers // *AIAA J*. 1981. Vol. 19 (9). P. 1183–1226.
2. *Rodionova V. A., Titaev V. F., Chernykh K. F.* Applied Theory of Anisotropic Plates and Shells. St. Petersburg: St. Petersburg University Press, 1996. 278 p.
3. *Donnell L. H.* Beams, Plates and Shells. N. Y.: McGraw-Hill, 1976. 453 p.
4. *Grigolyuk E. I., Kabanov V. V.* Stability of shells. Moscow: Nauka, 1978. 360 p. [in Russian]
5. *Kienzler R., Shneider P.* Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation // *Shell Structures: Theory and Applications*. Vol. 3. London, 2014. P. 109–112.

6. *Mikhasev G. I., Tovstik P. E.* Localized vibrations and waves in elastic thin shells. Moscow: Fizmatlit., 2009. 260 p. [in Russian]
7. *Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Generalized Timoshenko–Reissner models for multilayered plate // *Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 51, iss. 5. P. 527–537.
8. *Novozhilov V. V.* Theory of thin shells. Groningen: Volters-Noordhoff, 1970. 422 p.
9. *Papkovich P. F.* Design formulas for a stability test of a cylindrical shell of a submarine strength body // *Dul. nauchno-tekh. com. UMVS RKKK*. 1929. Vol. 2 (2). P. 113–123.
10. *Southwell R.* On the collapse of tubes by external pressure. Parts 1–3 // *Philos. Mag. Ser. 6*. 1913. Vol. 25 (149). P. 687–697.
11. *Tovstik P. E., Smirnov A. L.* Asymptotic methods in the buckling theory of thin shells. Singapore at al.: World scientific, 2002. 128 p.
12. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* A thin-plate bending equation of second-order accuracy // *Doklady Physics*. 2014. Vol. 59(8). P. 389–392.
13. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Generalized Timoshenko–Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // *ZAMM*. 2016. doi: 10.1002/zamm.201600052

*Druzhinin V. G., Valov A. V.* **Semi-automatic system for cargo damping**

The aim of this work is to create a semi-automatic system for damping of cargo, suitable for all obsolete load-lifting systems. The damping system is based on the work principle of experienced crane operators. It is required that when the system is stopped, the oscillations are damped within 10–15 s, until the residual amplitude of 1–2°.

The control object model was developed to create a damping system based on this model. A damping system was developed to control the crane carriage. Simulation of the work of the synthesized regulator was conducted and its work was evaluated.

MSC class: MSC2010: 93C42.

*Keywords:* damping system, pendulum, fuzzy logic.

**REFERENCES**

1. *Golodenko B. A., Chesnokova E. V.* Modeling of a one-dimensional harmonic oscillator in the MATLAB/SIMULINK environment // Vestnik Voronezh State University of Engineering Technologies. 2012. N 2. P. 81–84. [in Russian]
2. *Nespirny V. N., Korolev V. A.* Stabilization of oscillations of a pendulum with a movable suspension point relative to an oblique equilibrium // Mechanics of a Solid Body. 2009. N 39. P. 195–206. [in Russian]
3. *Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P.* Theoretical mechanics. 3<sup>rd</sup> ed. Moscow: Yurayt, 2012. 592 p. [in Russian]
4. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Theoretical Physics: Tutorial / In 10 vols. Vol. 1. Mechanics. Moscow: Nauka, 2008. 216 p.

## РЕФЕРАТЫ

УДК 531.36:534.013

*Шелковина В. А.* **Математические модели ротора, оснащенного шаровым автобалансирующим механизмом** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2016–2017 гг. С. 5–14.

В работе рассмотрена модель ротора с шаровым автобалансирующим механизмом, состоящим из двух одинаковых металлических шариков, вращающаяся с постоянной угловой скоростью. Построены две приближенные системы уравнений. Их решения сравнены с решениями, полученными на основе точных уравнений. Выведены условия существования сбалансированных и несбалансированных стационарных режимов. Устойчивость стационарных режимов исследована при помощи критерия Рауса. Построены диаграммы устойчивости приближенных систем.

Библиогр. 4 назв. Ил. 8.

*Ключевые слова:* ротор, автобалансирующий механизм, АБУ, критерий Рауса, диаграмма устойчивости.

УДК 533.6.011

*Корниенко О. В.* **Влияние переменного диаметра молекул на коэффициенты переноса в поуровневом приближении** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2016–2017 гг. С. 15–22.

В работе изучено влияние переменного диаметра колебательно возбужденной молекулы на коэффициенты сдвиговой вязкости и теплоемкости в приближении поуровневой кинетики.

Для разных потенциалов и температур в случае равновесного больцмановского колебательного распределения рассчитаны отношения поуровневых коэффициентов сдвиговой вязкости и теплоемкости к коэффициентам для газа, состоящего из невозбужденных молекул. Во всех рассмотренных случаях эффект увеличения молекулы с ростом колебательного уровня практически не влияет на вязкость и теплопроводность, отклонение не превышает 13%. Таким образом, доказана справедливость предположения о том, что

при расчете поуровневых коэффициентов переноса зависимость сечения упругого столкновения от колебательного состояния можно не учитывать. Это позволяет обоснованно применять упрощенные алгоритмы расчета коэффициентов переноса в приближении поуровневой кинетики, заметно сокращающие требования к вычислительным ресурсам при решении задач неравновесной газовой динамики.

Библиогр. 10 назв. Табл. 2.

*Ключевые слова:* коэффициенты переноса, диаметр молекулы, возбужденное колебательное состояние, поуровневое приближение.

УДК 534.014.4

*Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями в нелинейных механических системах // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2016–2017 гг. С. 23–39.*

В работе изучаются вопросы существования и построения режимов управляемого резонанса в нелинейных механических системах с несколькими степенями свободы. Такой резонанс можно трактовать как авторезонанс, поскольку управляющие воздействия в системе строятся по принципу обратной связи. Основным объектом исследования выступает двойной математический маятник, хотя предлагаемая методика пригодна и для других систем. Формируется так называемое коллинеарное управление движением системы, являющееся кинетическим, т. е. учитывающим динамические особенности конструкции. Это управление не нарушает форм колебаний линеаризованной системы, а лишь усиливает их амплитуды. Путем такого уравнения можно раскачивать двойной маятник по каждой из форм его свободных колебаний в отдельности, задавая соответствующие начальные условия, ввиду чего вся подводимая энергия полностью идет на возбуждение только одной формы колебаний. Однако столь гибкое управление формами колебаний возможно лишь в линейной системе, в которой и существует их классическое определение. Тем не менее на основе коллинеарного управления можно проанализировать дрейф форм и частот резонансных колебаний при плавном переходе из линейной зоны в нелинейную. Для аналитического описания нелинейных одночастотных колеба-

ний строятся асимптотические формулы, которые вполне адекватно отражают поведение системы при достаточно больших амплитудах и неплохо соотносятся с результатами, полученными путем численного интегрирования уравнений движения.

Библиогр. 18 назв. Ил. 7.

*Ключевые слова:* резонансный режим, нелинейная механическая система, коллинеарное управление, двойной математический маятник, формы колебаний, асимптотические решения.

УДК 624.04

*Кашитанова С. В. Устойчивость пластин наноразмерной толщины* // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2016–2017 гг. С. 40–49.

В первой части статьи рассматривается влияние поверхностных эффектов на устойчивость растягиваемой бесконечной пластины с отверстием для двух случаев: на границе отверстия и вдоль всей пластины. Проведено качественное сравнение этих случаев, и аналитические результаты сравниваются с экспериментальными.

Вторая часть статьи посвящена изучению потери устойчивости бесконечной пластины с круговой вставкой из другого материала, влиянию модулей упругости вставки на потерю устойчивости и сравнению качественных результатов с численными, полученными при помощи программы ANSYS.

Библиогр. 9 назв. Табл. 1. Ил. 2.

*Ключевые слова:* устойчивость, пластины и оболочки, наномеханика, теория упругости.

УДК 539.3/51-76

*Франус Д. В. Модель роговой оболочки при аппланационной тонометрии* // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2016–2017 гг. С. 50–58.

В работе проводится анализ и исследуются ограничения, накладываемые на соотношения модулей упругости роговицы в тангенциальном направлении и направлении толщины при применении закона Гука для трансверсально-изотропных оболочек в случае несжимаемости. Рассматривается конечно-элементная модель многослойной роговой оболочки при нагружении штампом с плоским основа-

нием при различных значениях внутриглазного давления (ВГД). Установлено, что уменьшение толщины роговой оболочки при нагружении плоским штампом почти не зависит от значения внутриглазного давления, но зависит от веса штампа.

Библиогр. 6 назв. Табл. 1. Ил. 1.

*Ключевые слова:* роговая оболочка, аппланационная тонометрия, ВГД, несжимаемость.

УДК 534.1, 539.3

*Зелинская А. В., Товстик П. Е. Локализованные колебания некруговой трансверсально изотропной цилиндрической оболочки // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2016–2017 гг. С. 59–67.*

Рассматриваются свободные колебания цилиндрической оболочки средней длины, имеющей эллиптическое поперечное сечение, локализованные в окрестности наиболее слабой образующей. Края оболочки считаем шарнирно опертыми. Для свободных колебаний изотопных оболочек используются классические уравнения Кирхгофа—Лява. Для трансверсально изотропных оболочек с весьма малой жесткостью на поперечный сдвиг точность уравнений Кирхгофа—Лява оказывается недостаточной. В этом случае используется модель Рейсснера, учитывающая влияние поперечного сдвига.

Библиогр. 13 назв. Табл. 1. Ил. 2.

*Ключевые слова:* цилиндрическая оболочка, свободные колебания, обобщенная модель Тимошенко—Рейсснера.

УДК 62-553.13

*Дружинин В. Г., Валов А. В. Полуавтоматическая система демпфирования качки груза // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2016–2017 гг. С. 68–74.*

Целью данной работы является создание для существующих устарелых грузоподъемных систем полуавтоматической системы гашения качки груза, в основу которой заложен принцип работы опытных крановщиков. Необходимо, чтобы система по команде оператора останавливалась и гасила качку за 10–15 с, до остаточных колебаний амплитудой 1–2°.

Для создания системы демпфирования была разработана модель объекта управления. На основе построенной модели разработан регулятор для управления кареткой крана. Также проведено моделирование работы синтезированного регулятора и оценена его работа.

Библиогр. 4 назв. Ил. 3.

*Ключевые слова:* система демпфирования, маятник, нечеткая логика.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ  
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

**2016–2017 гг.**

Редактор *А. Б. Иванова*  
Обложка художника *Е. А. Соловьевой*  
Корректор  
Компьютерная верстка *Е. М. Воронковой*

---

Подписано в печать 00.00.2018. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Усл. печ. л. 0,0. Планируемый тираж 000 экз. 1-й завод 00 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ.  
199004, С.-Петербург, В.О., 6-я линия, 11/21

Тел. / факс (812) 328-44-22  
E-mail: publishing@spbu.ru  
publishing.spbu.ru

Типография Издательства СПбГУ.  
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, д. 5.

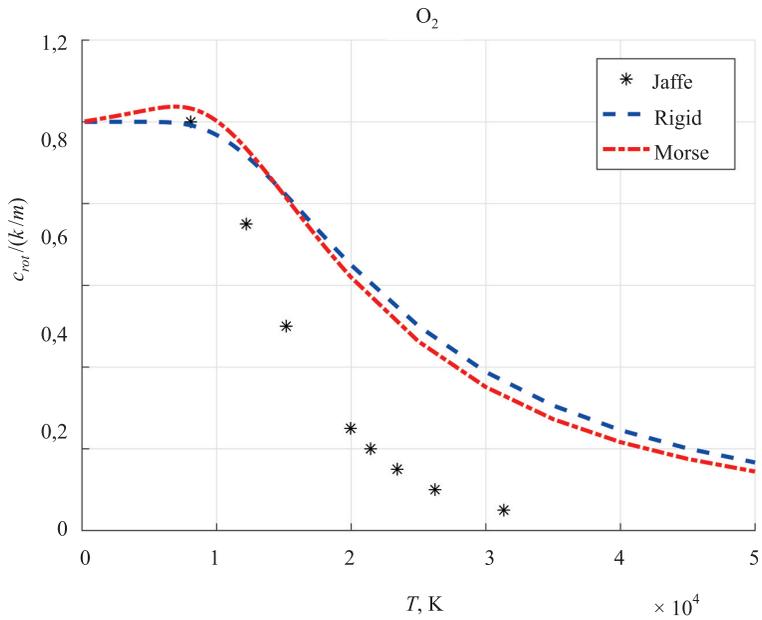


Рис. 1. Теплоемкость вращательных степеней свободы кислорода (к статье О. В. Корниенко)

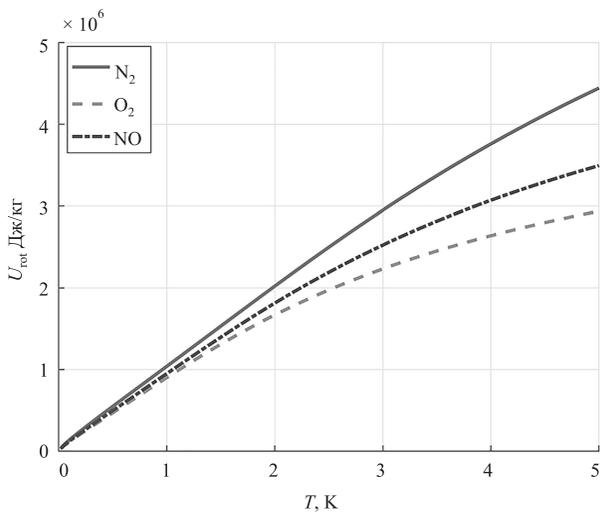
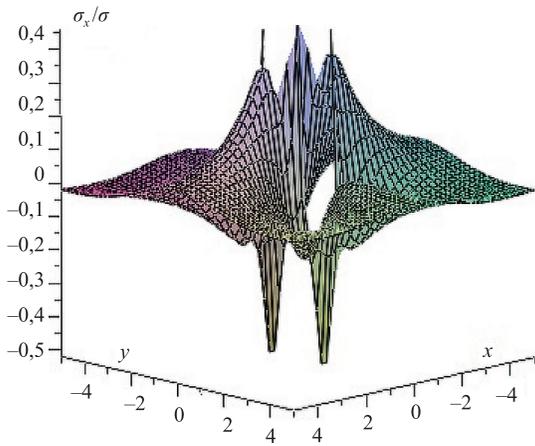
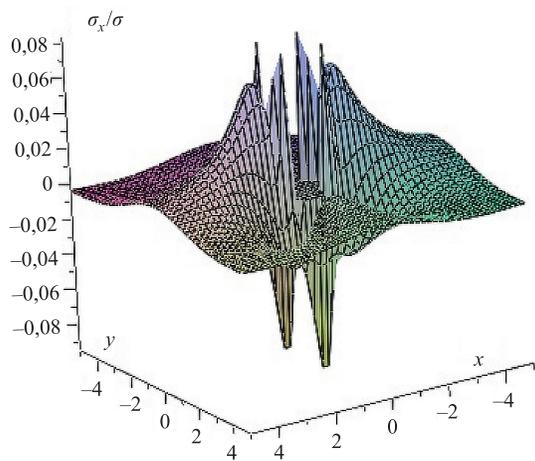


Рис. 2. Сравнение  $U_{rot}$  (к статье О. В. Корниенко)

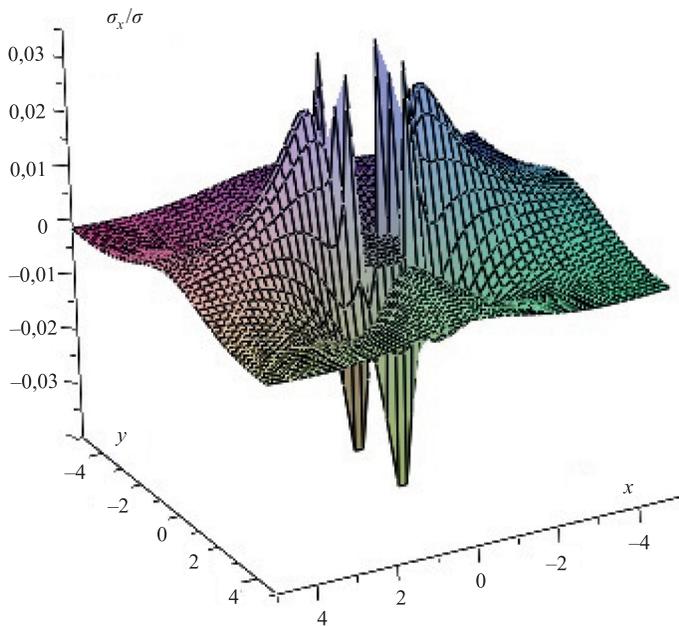


a)

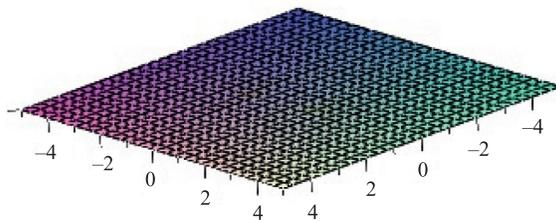


б)

Рис. 6. Отсутствие вставки ( $E_2 = 0$ ),  $\sigma_x^{max}/\sigma = 0,56$ ,  $\sigma_x^{min}/\sigma = -1$  (а) и  $E_2 = \frac{2}{5} E_1$ ,  $\sigma_x^{max}/\sigma = 0,10$ ,  $\sigma_x^{min}/\sigma = -0,18$  (б) (к статье С. В. Каштановой)

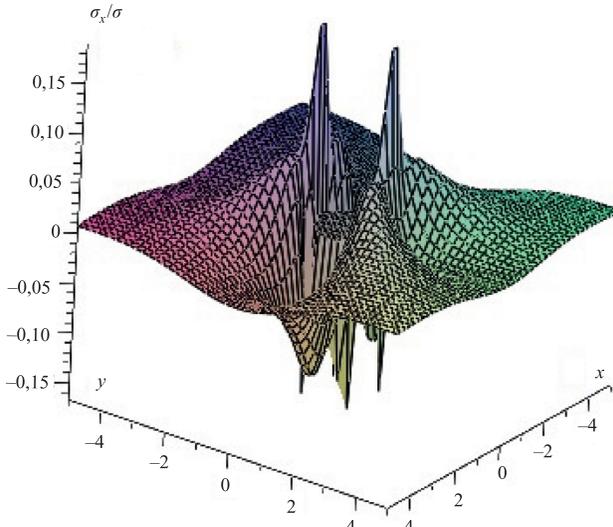


а)

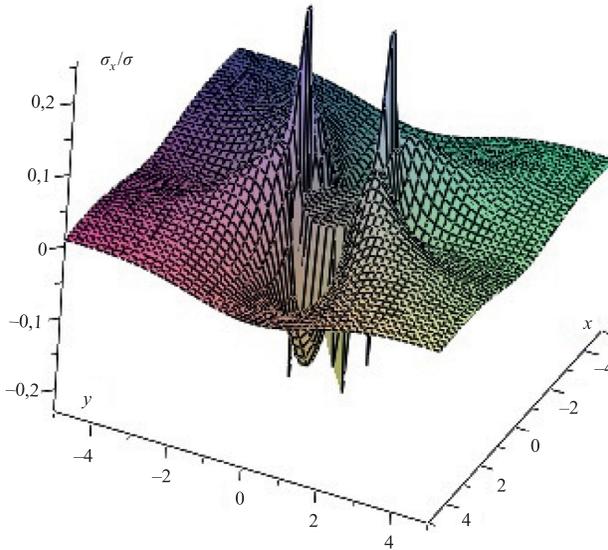


б)

Рис. 7.  $E_2 = \frac{4}{5}E_1$ ,  $\sigma_x^{max}/\sigma = 0,04$ ,  $\sigma_x^{min}/\sigma = -0,07$  (а) и  $E_2 = E_1$ ,  $\sigma_x/\sigma = 0$  (б) (к статье С. В. Каштановой)

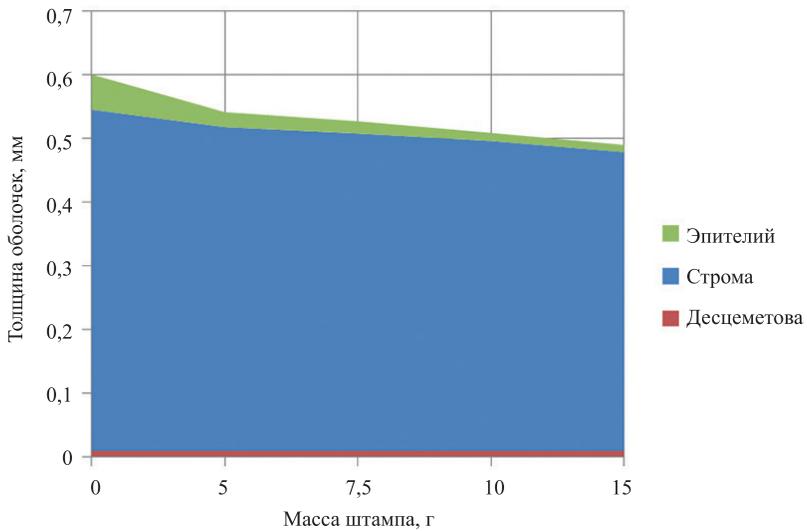


a)



б)

Рис. 8.  $E_2 = 5E_1$ ,  $\sigma_x^{max}/\sigma = 0,36$ ,  $\sigma_x^{min}/\sigma = -0,20$  (а) и случай абсолютно «жесткой» вставки  $E_2 \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_x^{max}/\sigma = 0,50$ ,  $\sigma_x^{min}/\sigma = -0,28$  (б)  
(к статье С. В. Каштановой)



*Рис. 5.* Изменение толщины роговой оболочки при нагружении плоским штампом при нормальном ВГД, 15 мм рт. ст. (к статье Д. В. Франуса)

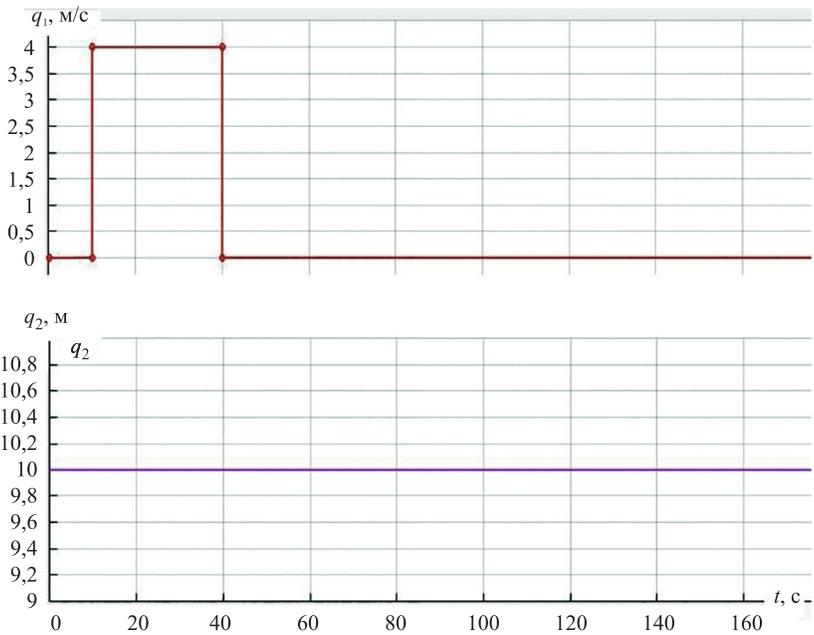


Рис. 3. Управляющие воздействия для проверки работоспособности системы (к статье В. Г. Дружинина, А. В. Валова)

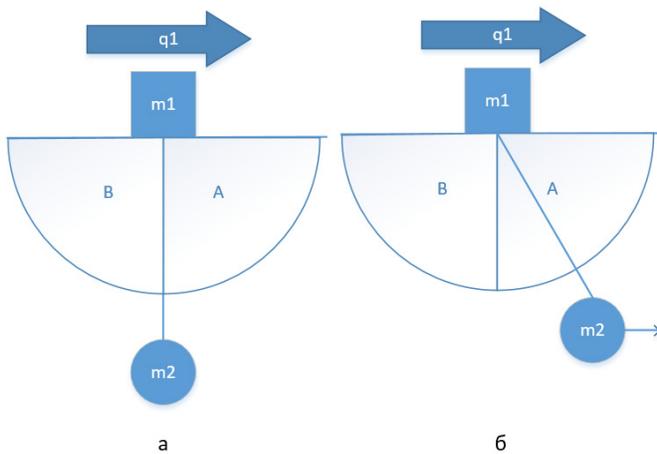


Рис. 4. Алгоритм демпфирования (к статье В. Г. Дружинина, А. В. Валова)