

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2013–2014 гг.



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2014

ББК 22.25

Т78

Редакционная коллегия:
канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ),
канд. физ.-мат. наук *Е. В. Воронкова* (отв. секретарь) (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),
проф. *P. Вайанкур* (Университет Оттавы, Канада),
д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Ф. Жигалко* (ПГУПС),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Михасев* (БГУ, Беларусь),
д-р техн. наук, проф. *С. В. Сорокин* (Университет Ольборга, Дания),
д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик* (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ)

Печатается по постановлению

*Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2013–2014 гг. — СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2014. — 151 с.

ISSN 2218-7421

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ISSN 2218-7421

ББК 22.25

© С.-Петербургский
государственный
университет, 2014

К юбилею Светланы Михайловны Бауэр

19 апреля 2014 года профессор кафедры гидроупругости, доктор физико-математических наук Светлана Михайловна Бауэр отметила свой юбилей.

Вся научная и педагогическая деятельность Светланы Михайловны связана с Ленинградским (Санкт-Петербургским) государственным университетом. Здесь она прошла путь от студентки до профессора, стала высококвалифицированным исследователем в области механики тонкостенных конструкций, в том числе в области приложений теории пластин и оболочек к исследованию задач биомеханики. Светланой Михайловной опубликовано более двухсот научных работ, включая 9 книг.

Невозможно переоценить роль Светланы Михайловны в деятельности семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. Она и многочисленные ученики ее школы участвуют в работе семинара с его первого заседания 19 октября 2004 г. За прошедшие 10 лет ими сделаны десятки докладов. Из семи учеников Светланы Михайловны, ставшими кандидатами физико-математических наук, шестеро являются активными участниками семинара. Кроме того, она является членом редакционной коллегии межвузовского сборника трудов семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”.

Результаты активной и успешной научной деятельности Светланы Михайловны признаны в нашей стране и мире. Она является членом Национального комитета по теоретической и прикладной механике Российской Федерации, Американского математического общества, Научного совета по биомеханике РАН, входит в редколлегию “Российского журнала биомеханики”. Светлане Михайловне присвоено звание “Почетный работник высшего образования”. Светлана Михайловна и ее ученики являются постоянными

участниками крупнейших международных научных конференций; часто по просьбе организаторов конференций она руководит мини-симпозиумами по актуальным проблемам биомеханики и механики тонкостенных конструкций.

От имени всех участников семинара, ее коллег и учеников, поздравляем Светлану Михайловну Бауэр с юбилеем и желаем ей дальнейшей плодотворной научной и педагогической деятельности.

Редакторы

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОФТАЛЬМОЛОГИИ

С. М. БАУЭР, Е. Б. ВОРОНКОВА

Предметом настоящего обзора стали математические модели, построенные в сотрудничестве с врачами-офтальмологами. Кратко описаны модели расчета напряженно-деформированного состояния оболочки глаза после выполнения операций, связанных с лечением отслойки сетчатки, модели теории аккомодации,

Обсуждаются математические модели, описывающие процесс определения истинного внутриглазного давления (ВГД) при помощи апплационных методов. Представлены модели, которые позволяют оценить влияние: отклонений формы роговицы и склеры от сферической формы на показатели ВГД, толщины роговицы на показатели внутриглазного давления. Отмечается, что модели биомеханики глаза помогли получить ряд новых результатов в механике деформируемого твердого тела, например решить задачи об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием сосредоточенной силы и внутреннего нормального давления; об устойчивости осесимметричной формы равновесия кольцевых неоднородных ортотропных пластин, находящихся под действием нормального давления; об устойчивости сегмента ортотропной оболочки, находящегося под действием нормального внутреннего давления и приложенного груза с плоским основанием; о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев, находящихся под действием внутреннего и внешнего давления. Сравнение этих решений с решениями, получающимися по неклассическим теориям оболочек, позволило оценить точность некоторых теорий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Более двадцати лет на кафедре теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского университета в сотрудничестве с врачами ведутся работы по моделированию некоторых процессов в офтальмологии. Рассмотренные задачи были поставлены и обсуждались со специалистами Санкт-Петербургского филиала МНТК “Микрохирургия глаза” им. акад. С.Н. Федорова, со специалистами кафедры и клиники офтальмологии Российской Военно-медицинской академии, работающими под руководством

Доклад на семинаре 22 апреля 2014 г.
© С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова, 2014

докт. мед. наук, проф. В.В. Волкова, со специалистами Московского НИИ глазных болезней им. Гельмгольца. Результаты работы докладывались на многочисленных российских и международных конференциях как по механике, так и по проблемам офтальмологии.

Глаз представляет собой уникальный орган человека, его функционирование определяется законами и гидромеханики, и термодинамики, и оптики (рис. 1). Относительно недавно для исследования состояния глаза стали применяться методы механики деформируемого твердого тела. В 2000 г. в Московском педиатрическом институте введен курс биомеханики глаза; на основе читаемого курса и исследований, проводимых в институте, коллективом авторов издана монография [61]. Первый раздел этого учебника посвящен основным определениям и понятиям механики деформируемого твердого тела.

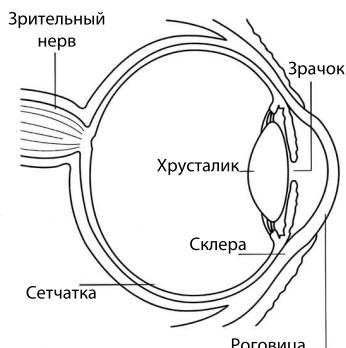


Рис. 1. Строение глаза.

Новые знания в области биомеханики глаза позволяют улучшить диагностику различных заболеваний, развивать новые методы терапевтического и хирургического лечения глаза. В связи с этим к математическому описанию глаза в целом и его отдельных элементов в частности обращались уже при решении многих офтальмологических проблем, и даже эти существенно упрощенные

модели оказывались полезными для врачей—офтальмологов, разрабатывающих новые методики лечения и диагностики. В 1998 г. на XIII Международном конгрессе исследователей глаза по предложению одного из ведущих офтальмологов России В.В. Волкова впервые была организована секция биомеханики глаза. Начиная с 2001 г. в Москве в НИИ глазных болезней им. Гельмгольца проводятся семинары и конференции по биомеханике глаза.

В течение четверти века был рассмотрен ряд математических моделей, связанных с деформированием элементов глаза. Опишем кратко структуру глаза (см. рис. 1). Глаз человека в первом приближении шаровидной формы, имеет три основные оболочки: наружную плотную капсулу, включающую в себя склеру и роговицу, сосудистую оболочку и внутреннюю очень тонкую оболочку — сетчатку. Проблемы возникновения и лечения отслойки сетчатки, развития отслойки сосудистой оболочки, глаукоматозной атрофии зрительного нерва, аккомодации, связанные с деформированием составных элементов глаза, остаются важными проблемами хирургии [31]. В последнее время в связи с развитием рефракционной хирургии, меняющей параметры роговицы глаза, возникли также задачи, связанные с изменением механических свойств роговицы после рефракционных операций, а также приобретают особое значение вопросы стандартизации измерения внутриглазного давления (ВГД), изучение влияния различных параметров глазного яблока на показатели тонометров, позволяющие объяснить и описать изменение показателей внутриглазного давления после операций и введения инъекций.

Построенные математические модели неоднократно обсуждались на семинаре “Компьютерные методы в механике сплошной среды” [3, 9, 33, 35, 37, 38, 41, 43, 42, 47, 49, 50, 51, 56, 64, 68, 69, 70, 71].

2. МОДЕЛИ ЛЕЧЕНИЯ ОТСЛОЙКИ СЕТЧАТКИ

Первой задачей, с которой обратились врачи в конце 80-х годов, была задача математического моделирования операций по лечению отслойки сетчатки. Отслойка сетчатки — это патологическое состояние, при котором сетчатка теряет контакт с сосудистой

оболочкой и отходит от нее внутрь полости глаза. В большинстве случаев отслойка сетчатки подлежит хирургическому лечению с эвакуацией жидкости из образовавшейся полости (или без пункции) и вдавливанием наружных слоев оболочки глаза до совмещения их с отслоившейся сетчаткой. Для вдавливания склеральной оболочки применяли различные приемы: круговое вдавливание нитью или лентой по параллели, так называемый циркляж (рис. 2), локальное пломбирование, или комбинированная нагрузка циркляжа и пломбы. Чрезмерное затягивание циркляжной лен-

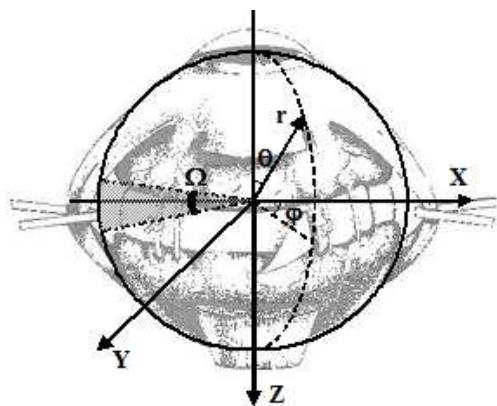


Рис. 2. Моделирование лечения отслойки сетчатки глаза.

ты или швов над пломбой является одним из важнейших факторов, которые могут вызвать послеоперационные осложнения: повышение внутриглазного давления, продавливание ленты или пломбы сквозь склеру в полость глаза, отслойку сосудистой оболочки, возникновение дополнительных складок. Понятно поэтому, что математическое моделирование играет важную роль при разработке и планировании противоотслойочных операций. Рассматривался ряд моделей расчета напряженно-деформированного состояния оболочки глаза после выполнения противоотслойочных операций [3, 19, 27, 29, 54, 55, 57, 58, 78, 82, 94].

Простейшая модель наружной оболочки глаза представляет собой упругую изотропную тонкостенную сферическую оболочку постоянной толщины h и радиуса R , широко используемый вариант циркляжа — перетягивание глаза нитью (или лентой) в плоскости экватора $\theta = 0$. При этом оболочка находится под действием внутриглазного давления p и поверхностного давления q со стороны циркляжной нити (ленты). В силу симметрии действующих на глаз нагрузок рассматривались осесимметричные деформации оболочки. Учитывалось изменение внутриглазного давления глаза p после циркляжа по сравнению с начальным давлением p_0 :

$$p = p_0 + K \frac{\Delta V_2 - \Delta V_1}{V - \Delta V_1}, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (1)$$

Здесь V — начальный объем стекловидного тела, ΔV_2 — уменьшение его за счет циркляжа, ΔV_1 — уменьшение вследствие удаления субретинальной жидкости (объем отслойки), K — модуль объемного сжатия стекловидного тела (в предположении о его несжимаемости $K = \infty$).

При удалении от ленты напряженное состояние безмоментно, а в ее окрестности оно предполагалось быстроменяющимся. Дополнительное перемещение w^k , имеющее характер краевого эффекта и затухающее при удалении от ленты, определялось из уравнения краевого эффекта

$$\mu^4 \frac{d^4 w^k}{d\theta^4} - 2\mu^2 \gamma \frac{d^2 w^k}{d\theta^2} + w^k = q_*(\theta), \quad (2)$$

где

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad \gamma = \frac{pR}{4Eh\mu^2}, \quad q_* = \frac{qR^2}{Eh},$$

μ — малый параметр тонкостенности оболочки.

Учитывая соотношения, связывающие натяжение ленты N , ее удлинение δl , среднее по ширине ленты ее давление q_{cp} на глаз и средний прогиб w_{cp} оболочки глаза под лентой, для функции нагрузки можно получить выражение

$$q_*(\theta) = b\xi(\theta) \left(\frac{\Delta l}{2\pi} - w_{cp}^k + \frac{a(1-\nu)}{2(1+a)} I^k - \frac{a\Delta V_1}{4\pi R^2(1+a)} \right), \quad (3)$$

где

$$I_1^k = \int_{\theta_0}^{\infty} w^k(\theta) d\theta, \quad \Delta_* l = \frac{\Delta l}{2\pi} - \frac{a\Delta V_1}{4\pi R^2(1+a)},$$

причем угол θ_0 характеризует ширину циркляжной ленты $H = 2R \sin \theta_0$, параметр a учитывает жесткость стекловидного тела (для несжимаемого стекловидного тела $a/(1+a) = 1$), параметр b учитывает жесткость ленты на растяжение. Таким образом, получается интегродифференциальное уравнение (2) относительно функции $w^k(\theta)$.

После определения функции $w^k(\theta)$ предложенная модель позволяет найти следующие величины, важные при планировании операции: повышение внутриглазного давления, изменения ПЗО (передне-задней оси — оптической длины глаза), оценить напряженно-деформированное состояние оболочки глаза в окрестности циркляжной ленты и определить влияние параметров ленты (ширины, жесткости, начального укорочения) на все эти величины.

Если циркляж наложен узкой лентой или нитью и пренебречь распределением давления по ширине ленты, то удается получить приближенное аналитическое решение задачи [19, 29, 57, 82].

При больших отслойках иногда циркляж выполняется широкой лентой. Тогда предположение, что решение быстро затухает при удалении от циркляжной ленты, не является оправданным, и задача о напряженно-деформированном состоянии оболочки глаза в этом случае решалась на основе системы уравнений осесимметричной деформации сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления p и давления со стороны ленты $q(\theta)$. Решение строилось в виде рядов по полиномам Лежандра $P_m(x)$ [29, 57, 58].

Проведены расчеты для значений параметров, соответствующих реальным операциям. Ширина стандартной узкой ленты, используемой в России для циркляжа, была 2.5 мм. Сравнение с результатами расчета по формулам для такой ленты показало хорошее совпадение с клиническими данными. Для ленты шириной 9 мм деформации (прогиб под лентой и удлинение ПЗО) на 15–18% отличались от результатов, полученных по соотношениям для узкой ленты. Изменения ВГД отличались только на 1–2%.

Интересно, что стандартная ширина узкой ленты, используемой для циркляжа в Германии, — 3 мм, в связи с этим по просьбе коллег и офтальмологов из Германии были проведены также расчеты для лент, используемых в Германии. Проведены сравнения с клиническими данными. Результаты были представлены на конференциях EVER-2004 и ARVO-2005 (конференции, которые проводит European Association for Vision and Eye Research и Association for Research in Vision and Ophthalmology) [93].

Теория оболочек, построенная на гипотезах Кирхгофа–Лява, может приводить к заметным погрешностям при расчете не очень тонких оболочек, находящихся под действием неплавных нагрузок, причем наибольшая погрешность при этом возникает за счет того, что полагаются равными нулю поперечные сдвиги. В связи с этим полученные результаты сравнивались с расчетами по геометрически нелинейной теории типа Тимошенко. При этом нелинейная система уравнений решалась методом итераций [29, 57]. Результаты расчетов сравнивались со значениями, вычисленными по линейным уравнениям. Для узкой ленты величины максимального прогиба и изменения ПЗО почти не различаются, однако несколько больше изменяются форма деформации и объем деформированной оболочки. В итоге получаем внутриглазное давление на 8–10% больше, чем значение, полученная при решении линейных уравнений. Для широкой ленты (9 мм) изменение ПЗО, вычисленное по нелинейным уравнениям, оказывается на 6–10% меньше, чем значение, определяемое по линейным уравнениям, но так же, как и в случае узкой ленты, изменения формы деформации и объема деформированной оболочки приводят к более высокому (на 7–12%) значению внутриглазного давления.

Из-за большой относительной толщины склеральной оболочки (~ 0.1) был проведен также расчет напряженно-деформированного состояния склеральной оболочки глаза на основе уравнений трехмерной теории упругости. Уравнения взяты в форме, предложенной П.Ф. Папковичем. Определены перемещения сферической оболочки и максимальные значения напряжений [58].

Проведено исследование изменения коэффициента ригидности глаза (в офтальмологии коэффициентом ригидности глаза называют соотношение между изменением ВГД и соответствующим ему

изменением объема глазного яблока) после циркляжа [29].

Как уже отмечалось, одной из форм послеоперационного осложнения может быть “образование складок”, нарушающее кровообращение, приводящее к отекам, поэтому рассматривалась задача о локальной устойчивости глаза при наложении циркляжного шва [82]. В окрестности линии, по которой проходит циркляжная лента, оболочка глаза моделируется тонкой сферической оболочкой, а циркляж — наложением на безмоментное состояние оболочки краевой нагрузки по экватору. Осесимметричный прогиб оболочки глаза, вызванный давлением ленты, определяется из уравнений краевого эффекта (2). Для построения смежной неосесимметричной формы равновесия используется система уравнений пологих оболочек Доннелла, а для решения задачи — метод асимптотического интегрирования. Определяется критическое укорочение нити или ленты, приводящее к неосесимметричным прогибам. Исследование на устойчивость показало, что, по-видимому, для циркляжа опасно использовать нерастяжимые нити. Более целесообразно применять силиконовые ленты или жгуты. Следует отметить, что от нерастяжимых нитей в таких операциях отказались в середине 90-х годов.

Иногда для лечения отслойки сетчатки глаза используется пришивание к склере пломбы. Самостоятельное локальное пломбирование проводят в основном при единичных разрывах. Величина пломбы определяется размерами разрыва. Материал пломбы обычно жестче материала оболочки глаза. В работах [54, 78, 94] операция пломбирования рассматривалась как задача контактного взаимодействия однородной упругой оболочки с абсолютно жестким осесимметричным штампом (рис. 3, a).

На рис. 3, б представлено распределение безразмерных контактных напряжений σ/E под штампом при безразмерных прижимных усилиях Y/ER [54, 94]. Рассматривался штамп в форме эллипсаonda вращения с полуосью $a = b = 12$ мм, $c = 3$ мм, $\gamma = \pi/4$ рад, $x_1 = 0.3$ мм. Анализ результатов расчета показывает, что с увеличением прижимных усилий наряду с ростом площадки контакта происходит смещение максимума контактных напряжений под пломбой от центра (рис. 3, б, кривая 1) в сторону границы контакта (рис. 3, б, кривая 2). При дальнейшем возрастании прижимных усилий контактные напряжения в окрестности центра контакта убы-

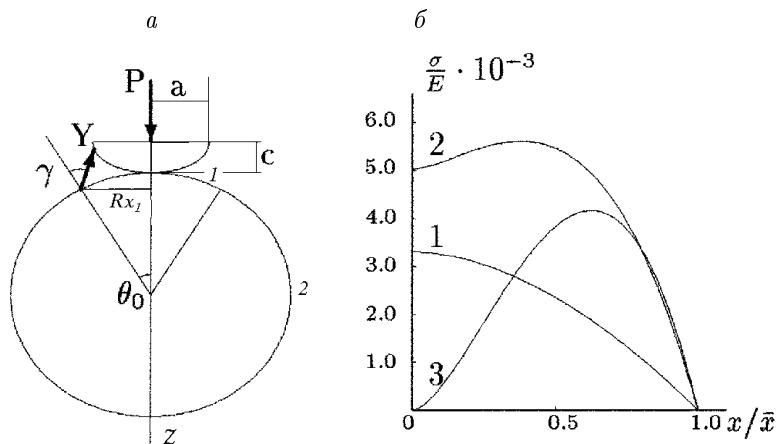


Рис. 3. Локальное пломбирование (а) и распределение контактных напряжений (б).

вают до нуля (рис. 3, б, кривая 3), и возможен переход от круговой зоны контакта к кольцевой с потерей контакта в окрестности центра. Это является следствием большего радиуса кривизны пломбы по сравнению с радиусом упругой оболочки глаза.

Рассматривалась также задача о пломбировании глаза как задача контактного взаимодействия однородной упругой оболочки с жестким кольцом [78]. Найдена функция Грина. Краевая задача, соответствующая интегральному уравнению контакта, сведена к системе алгебраических уравнений, при численном решении которой используются асимптотические приближения собственных функций уравнений сферической оболочки — функции Лежандра. Получено распределение контактных напряжений, рассчитаны напряжения и деформации оболочки глаза.

3. Модели отслоения сосудистой оболочки

После операций, сопровождающихся вскрытием глазного яблока, иногда возникают осложнения, связанные с отслоением сосу-

дистой (средней) оболочки глаза. В связи с этим рассматривалась механическая модель развития отслойки сосудистой оболочки, которую можно представить как одну из форм разрушения — в виде макротрещины, распространяющейся по поверхности раздела, т.е. трещины расслоения [17, 29]. В частности, в зонах сжатия может произойти отслоение, причиной которого является местная потеря устойчивости. Используя энергетический критерий Гриффитса, полагаем, что нижняя граница опасного напряжения отслаивания определяется из соотношения

$$U_1 = U_2 + W, \quad (4)$$

где U_1 — упругая энергия сжатия, накопленная в слое толщиной h_0 перед выщелкиванием, U_2 — энергия этого слоя после выщелкивания — энергия изгиба, $W = 2\gamma S$ — работа разрушения (S — площадь поверхности отрыва, а γ — удельная работа разрушения). Предполагалось, что оболочка находится под действием внешнего давления и при локальной потере устойчивости сферической оболочки под действием равномерного давления образуется одна вмятина; на первой стадии развития вмятины, вплоть до расслоения, поведение упругой сферы может быть описано теорией пологих оболочек. По энергетическому критерию (4) оценивались сжимающие напряжения в оболочке глаза, соответствующие отслоению слоя толщины h_0 . Константа Гриффитса γ , характеризующая прочность связи склеры и сосудистой оболочки, определялась экспериментально на энуклеированных глазах в лаборатории прочности полимеров Б.А. Зиминым. Оказалось, что минимальное значение σ_{kr} достигается при толщине, соответствующей средней толщине сосудистой оболочки, и, таким образом, этот слой является наиболее склонным к отщеплению. Критическое значение напряжения, соответствующее этому слою, следует, по-видимому рассматривать как нижнюю границу опасного напряжения, вызывающего расслоение. Эта величина оказалась значительно меньше предельных разрушающих напряжений для склеры. Следовательно, при ударе в область глаза более вероятен не разрыв склеры, а отслойка сосудистой оболочки с последующим разрывом сетчатки или сосудистой оболочки.

Рассматривалась также упрощенная модель роста имеющейся трещины — упругая статическая задача отслоения от полупро-

странства тонкой балки или тонкой пластиинки под действием внутреннего давления. В клинических исследованиях наблюдаются различные (не только симметричные) формы отслоения, что может быть обусловлено различными факторами. В связи с этим рассмотрена задача о потере устойчивости сферической оболочки под действием сосредоточенной силы и внутреннего давления [81]. Для этого сначала с помощью асимптотических и численных методов определялись большие деформации в окрестности приложения сосредоточенной силы и далее определялась точка бифуркации осесимметричного равновесия сферической оболочки. Определялось влияние внутреннего давления на величину и форму потери устойчивости.

В случае когда внутреннее давление равно нулю, наименьшему параметру сосредоточенной силы соответствуют три волны. Естественно, критическое значение сосредоточенной силы увеличивается с ростом внутреннего давления. Но при малых значениях внутреннего давления форма потери устойчивости не меняется. При значении p внутреннего давления $p > 3.56Eh^2 / (R^2 \sqrt{12(1 - \nu^2)})$ происходит потеря устойчивости с четырьмя волнами в окружном направлении. Интересно отметить, что при разных значениях внутреннего давления размеры зоны больших деформаций оказываются равными.

4. ДЕФОРМАЦИЯ РЕШЕТЧАТОЙ ПЛАСТИНКИ ДИСКА ЗРИТЕЛЬНОГО НЕРВА

Известно, что при повышении внутриглазного давления такие явления, как отечность зрительно-нервных аксонов, их дезорганизация и др., ведущие за собой атрофию (разрушение) зрительного нерва и приводящие к дефектам поля зрения, происходят в области решетчатой пластиинки диска зрительного нерва. Решетчатой пластиинкой (РП) называется участок склеры недалеко от заднего полюса глаза. Сплошного дефекта склеры в этом месте нет, имеются ее истончение и множество мелких отверстий, через которые проходят пучки зрительного нерва.

Как отмечают офтальмологи, первые признаки глаукоматозной экскавации (прогиба) диска зрительного нерва, как правило, появляются раньше дефектов в поле зрения. Начальные изменения диска зрительного нерва имеют значение для диагностики глаукомы, а их динамика важна для оценки эффективности проводимой терапии. Все это делает важным изучение напряженно-деформированного состояния РП при изменении ВГД и индивидуальных особенностей строения решетчатых пластин, которые могут увеличить предрасположенность к глаукоматозным повреждениям. В ряде работ деформации РП глаза изучались на основе клинических наблюдений, но представляет также интерес построение математических моделей, адекватно описывающих поведение РП диска зрительного нерва при изменении ВГД.

Решетчатая пластинка в 5 — 6 раз тоньше склеры и ослаблена множеством отверстий, ее удобно рассматривать как круглую или близкую к круглой пластину с жестко заделанным краем. В [64, 80] проведено сравнение решений задачи о деформации составной оболочки (склеры и РП) и задачи о деформации пластинки под действием нормального давления. Отдельно решались задачи для случая изотропных и трансверсально-изотропных свойств РП. Расчеты показали, что, как и отмечается в клинических данных офтальмологов, диаметр склерального кольца практически не меняется, и прогибы пластинки, полученные при рассмотрении составной оболочки и жестко защемленной пластинки, отличаются меньше, чем на 1%. Таким образом, деформацию РП можно изучать отдельно от деформации склеральной оболочки, что облегчает учет особенностей строения РП — ее анизотропию и неоднородность. При расчетах напряженно-деформированного состояния перфорированных пластин обычно последние заменяются некоторыми сплошными пластинами с приведенными параметрами. Имеющиеся данные о средней глубине экскавации диска зрительного нерва при фиксированных значениях ВГД позволяют оценить приведенный модуль РП.

Как отмечается в офтальмологической литературе, у большинства людей (80 — 90%) РП имеют неравномерную по радиусу и по углу механическую структуру, особенность которой может пере-

дать модуль упругости вида

$$E(r, \theta) = E_1(r) + E_2(r) \cos 2\theta, \quad (5)$$

где E_1, E_2 — убывающие функции радиальной координаты.

РП рассматривается в математических моделях как трансверсально-изотропная в общем случае неоднородная круглая пластинка [8, 29, 33, 73, 83, 84].

Задача о прогибе круглых цилиндрически ортотропных и трансверсально-изотропных неоднородных (по радиусу и по углу) пластин решалась в рамках линейной и геометрически нелинейной общей уточненной теории С.А. Амбарцумяна [2], теории анизотропных оболочек средней толщины Палия — Спиро (ПС) [62] и уточненной итерационной теории Родионовой — Титаева — Черных (РТЧ) [65]. Теория РТЧ, в отличие от других теорий, основанных на механических гипотезах, предлагает математический подход к решению трехмерных уравнений теории упругости.

Получены соотношения для прогиба пластин по приближенным моделям, основанным на гипотезах Кирхгофа-Лява (КЛ) и Тимошенко — Рейсснера (ТР), а также с помощью теории Амбарцумяна, теорий ПС и РТЧ [86, 96].

По классической теории КЛ безразмерный прогиб пластины под действием давления q зависит только от механических параметров срединной поверхности и для жестко защемленного края имеет вид

$$\bar{w}^{KL} = \begin{cases} \frac{1}{8(n^2 - 9)} \left(\frac{4r^{n+1}}{n+1} - r^4 + \frac{n-3}{n+1} \right), & \text{для } n \neq 3, \\ (4r^4 \ln r - r^4 + 1) / 192, & \text{для } n = 3. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $\bar{w}^{KL} = w^{KL} / q$, $r = r_{dm}/R$, $w = w_{dm}/R$ — безразмерная радиальная координата и прогиб срединной поверхности, $n^2 = E_\theta/E_r$ — отношение модулей упругости пластины в окружном (E_θ) и радиальном (E_r) направлениях, $q = q_{dm} R^4 / (D_r h)$ — безразмерный параметр нагрузки, где $D_r = h^3 / (12(1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}))$.

Теории ТР и Амбарцумяна дают для прогиба соответственно

$$w^{TR}/q = \bar{w}^{KL} + \frac{a_2^T}{2}(r^2 - 1), \quad a_2^T = -\frac{3D_r}{4hR^2G_{rz}}, \quad (7)$$

$$w^A/q = \bar{w}^{KL} + a_2^A \frac{r^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{a_1^A}{2(n^2 - 1)} \left(\frac{2r^{n+1}}{n+1} - r^2 + \frac{n-1}{n+1} \right), \quad (8)$$

$$a_1^A = \frac{h^2}{10R^2}(\nu_{31}^* - \nu_{32}^*) - \frac{4(n^2 - 1)}{5}a_2^A, \quad a_2^A = -\frac{3D_r}{4hR^2G_{rz}},$$

где G_{rz} — модуль жесткости на сдвиг в плоскости (r, z) .

Теории ПС и РТЧ позволяют учесть распределение напряжений и перемещений, возникающих в пластине, по ее толщине. Однако выражения для напряжений не зависят от свойств пластины.

Выражение для прогиба срединной поверхности, получающееся по теории ПС, имеет вид, аналогичный (8), с коэффициентами a_1 и a_2 :

$$a_1^P = \frac{h^2}{8R^2}(\nu_{31}^* - \nu_{32}^*) - (n^2 - 1)a_2^P, \quad a_2^P = -\frac{D_r}{2hR^2G_{rz}}.$$

Здесь ν_{31}^*, ν_{32}^* — параметры, зависящие от свойств пластины, введенные, например, в [65].

Формулы по теории РТЧ имеют более громоздкий вид и приведены в [86, 96].

Решение задачи о прогибе ортотропной пластины, моделирующей РП глаза, полученное по неклассическим теориям, сравнивавшееся с численным решением трехмерной задачи теории упругости, полученным методом конечных элементов (МКЭ) с помощью прикладного пакета COMSOL Multiphysics (v. 4.4). Результаты сравнения для нормальных перемещений приведены на рис. 4, для напряжений — на рис. 5.

Теории оболочек ПС и РТЧ при давлениях, соответствующих внутрглазному давлению, дают величины прогибов, близкие к результатам, полученным МКЭ. Значения нормальных напряжений, полученных по теории РТЧ, ближе к значениям, полученным в пакете COMSOL Multiphysics (v. 4.4).

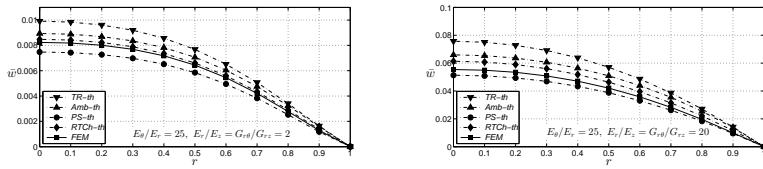


Рис. 4. Безразмерный нормальный прогиб срединной поверхности для $E_r/E_z = G_{r\theta}/G_{rz} = 2$ (слева) и $E_r/E_z = G_{r\theta}/G_{rz} = 20$ (справа) по различным теориям пластин (пунктирные линии) и МКЭ (сплошная линия).

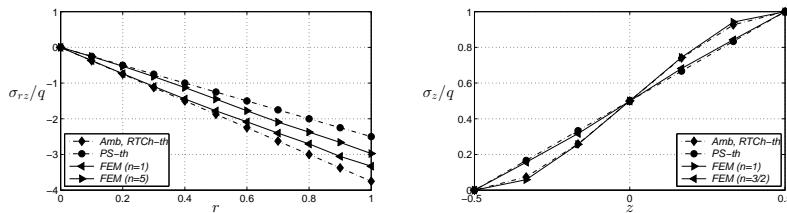


Рис. 5. Распределение нормальных (слева) и сдвиговых напряжений (справа) в круглой пластине ($h/R=0.2$).

Расчеты деформации РП, проведенные на основе моделей однослоинных пластин, не позволяют объяснить тот факт, что атрофия зрительного нерва при повышении давления, по данным офтальмологов, возникает именно на “наружном слое”, при выходе из оболочки глаза. Задача о деформации многослойной оболочки вращения с упругими связями между слоями под действием внутреннего давления в рамках общей нелинейной теории тонких упругих оболочек решена в безмоментной постановке в [29, 30], в моментной постановке в работе [39] (рис. 6). Рассматривался случай чистого изгиба оболочки, при котором волокна параллельных поверхностей, лежащих по одну сторону срединной поверхности, растягиваются, а по другую — сжимаются, т.е. одна половина нормального волокна сжимается, а другая — растягивается. Для учета такой неравномерности деформации нормальных волокон были введены параметры

λ_ξ и κ_ξ , что позволило в явной форме учесть деформационные изменения толщины оболочки, которые для некоторых материалов могут быть значительными. Расстоянием между слоями пренебрегали.

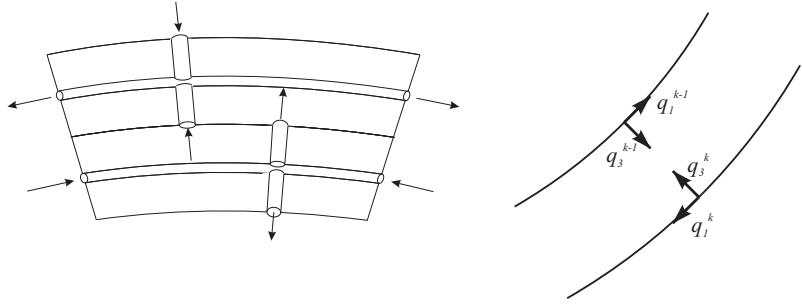


Рис. 6. Схема изгиба многослойной оболочки (слева). Проекции интенсивности внешней нагрузки на k -й слой оболочки (справа).

Предполагалось, что слои могут проскальзывать друг по другу. Напряжения касательного взаимодействия слоев оболочки принимались в виде

$$q_1^k = \alpha_k (s_0^{k+1} - s_0^k)(r - r_*). \quad (9)$$

На краю пластины принимались условия упругой заделки:

$$T_1^k = c_k (s - s_0^k) \quad \text{при} \quad r = r_*, \quad (10)$$

где s — длина дуги, отсчитываемая от вершины купола, функции $s_0^k(s)$, $k = 1, \dots, n$, — дуговые координаты точки s k -го слоя до деформации, n — число слоев, T_1^k — меридиональное усилие в k -м слое, отнесенное к единице длины после деформации. Таким образом, задача сводится к системе $2n + 2$ дифференциальных уравнений относительно неизвестных $T_1^k(s)$, $s_0^k(s)$, $\varphi(s)$, $r(s)$, где r , φ — расстояние до оси вращения и угол между нормалью к оболочке и осью вращения соответственно. Расчеты проводились для двух- и трехслойных пластин при различных параметрах c_k и α_k .

В работе [46] показано появление “точек перегиба”, т.е. точек, в которых изгибающие моменты меняют знак и углы достигают максимального значения. Для более мягких и тонких оболочек, а также при увеличении нагрузки точки перегиба смещаются к внешнему краю оболочки.

В широком диапазоне изменения параметров c_k и α_k при учёте особенностей строения решетчатой пластиинки (последний “наружный” слой является более плотным и массивным: $h_N > h_k$ при $k < N$, а также более жестким) получается, что, как и в работе [29], наиболее сильные относительные смещения увеличиваются к краю пластины. Это соответствует тому факту, что “начальные дистрофические изменения в нервных волокнах определяются на уровне заднего края решетчатой пластиинки склеры”.

В результате рассмотрения моментной постановки задачи [46] удалось получить численные результаты и форму прогиба, соглашающуюся с клиническими данным [97].

В ряде случаев при сильном увеличении внутриглазного давления по краю РП могут образовываться складки и возникать отеки [32]. Большие прогибы круглой пластины сопровождаются появлением в окрестности края пластины сжимающих напряжений. Увеличение интенсивности таких напряжений и одновременно сужение зоны, в которой они появляются, создают предпосылки для перехода пластины в неосесимметричное состояние, что может быть одним из возможных объяснений “отеков и складок”. Впервые вопрос о существовании несимметричных решений у симметрично загруженной круглой пластины был рассмотрен Д.Ю. Пановым и В.И. Феодосьевым в работе [63]. Методом Галёркина для больших прогибов пластины, загруженной постоянным давлением, авторы получили некоторое решение, соответствующее несимметричным формам равновесия. Позже Н.Ф. Морозов строго доказал существование несимметричного решения в этом случае [59], а единственность такого решения была доказана W.O. Piechocki в [95]. В работе L.S. Cheo, E.L. Reiss [88] для круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения определены значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной. Величина критической нагрузки, полученная Cheo и Reiss, почти в 3 раза

больше нагрузки, определенной Пановым и Феодосьевым. Формы потери устойчивости также отличаются: по краю пластины образуется 14 ([88]) и 8 ([63]) волны соответственно. Как отмечается в [88], ошибочные результаты были получены в [63], так как недостаточно точно было определено докритическое осесимметричное состояние. Влияние неоднородности материала пластины на величину критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной было рассмотрено в [12, 43, 85, 87].

Следуя [88], решение уравнений, описывающих деформации круглой неоднородной пластины, представлялись в виде

$$w(r, \theta) = w_s(r) + w_n(r) \cos n\theta, \quad F(r, \theta) = F_s(r) + F_n(r) \cos n\theta, \quad (11)$$

где функции w_s, F_s описывают докритическое симметричное решение, а функции $w_{ns}(r, \theta) = w_n(r) \cos n\theta, F_{ns}(r, \theta) = F_n(r) \cos n\theta$ — критическое состояние пластины (n — число волн в окружном направлении, образовавшихся после потери устойчивости).

После разделения переменных (11) исходная нелинейная система уравнений распадается на две: нелинейную, для определения симметричного решения $w_s(r), F_s(r)$, и линейную систему уравнений относительно $w_n(r), F_n(r)$, так как функции w_{ns}, F_{ns} полагаются малыми сразу после перехода пластины в неосесимметричное состояние. Для каждого числа волн в окружном направлении n будем искать такие значения нагрузки p_n , при которых существуют отличные от нуля функции $w_n(r), F_n(r)$. Критической нагрузкой выберем $p_{cr} = \min_n p_n$.

На рис. 7 представлено изменение критической нагрузки при изменении степени неоднородности пластины в случае, если модули упругости меняются по законам $E = E_0^{(1)} e^{-q_1 r}$ и $E = E_0^{(2)} e^{-q_2 r^2}$. Параметры $E_0^{(i)}$ и q_i , ($i = 1, 2$) выбирались так, чтобы среднее значение модуля упругости пластины оставалось постоянным. Значения $q = 0$ соответствуют пластине с постоянным модулем упругости. С ростом неоднородности потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходила при более низкой нагрузке (до 7 раз) и с образованием большего числа складок в окружном направлении, чем для однородной пластины [85].

Таким образом, с механической точки зрения отеки и складки по краю РП могут быть объяснены потерей осесимметричных форм равновесия при кратковременном повышении давления.

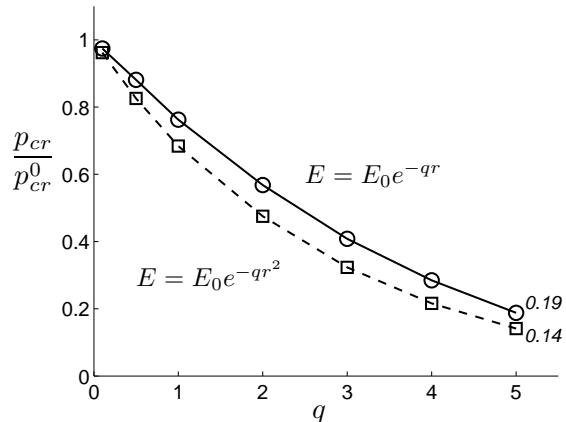


Рис. 7. Изменение критической нагрузки при изменении степени неоднородности пластины q по законам $E = E_0 e^{-qr}$ (сплошная линия) и $E = E_0 e^{-qr^2}$ (пунктирная линия). p_{cr}^0 — критическая нагрузка для однородной пластины.

5. МОДЕЛИ ТЕОРИИ АККОМОДАЦИИ

До сих пор одной из самых актуальных проблем биомеханики глаза остается механизм аккомодации [7, 31]. Аккомодация — это приспособление глаза к ясному видению предметов, находящихся на различных расстояниях. Достигается аккомодация изменением кривизны (геометрической формы) хрусталика глаза (мягкой оболочки, которую в первом приближении можно считать заполненной несжимаемой жидкостью). Единой общепринятой теории аккомодации до сих пор не существует, в связи с чем появляются новые теории, часто противоречащие первой классической теории аккомодации, созданной Гельмгольцем, согласно которой в процессе ак-

комодации участвует только хрусталик и ресничная мышца, при сокращении которой происходит увеличение кривизны хрусталика (рис. 8, (а, б) 9). Однако, как отмечается в работе В.В. Волкова [31], сейчас при изучении процесса аккомодации важно принимать во внимание факты, полученные в клинической практике за последние 20-30 лет. “Стало ясно, что нельзя сбрасывать со счетов роль структур, не имеющих прямого отношения к хрусталику (склеры, стекловидного тела, наружных мышц глаза)”.

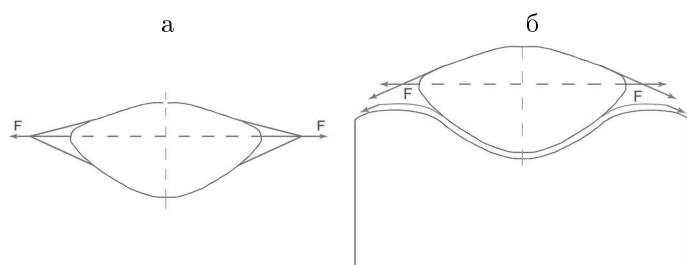


Рис. 8. Теоретическая модель аккомодации.

Совместно с механиками из Королевского технического университета (Стокгольм, Швеция) были опубликованы работы, в которых процесс аккомодации был смоделирован методом конечных элементов в пакете ABAQUS с учетом новых клинических данных [91, 92]. Выполненные работы подтвердили основные выводы теории Гельмгольца и опровергли возникшие в конце XX в. теории аккомодации Шахара и Фукусаку [66].

6. ОБ ОПЕРАЦИЯХ НА РОГОВИЦЕ ГЛАЗА

С начала 90-х годов XX столетия для коррекции зрения стали широко пользоваться рефракционными операциями ЛАЗИК и ФРК, заключающимися в удалении определенного слоя в центре роговицы глаза для того, чтобы сделать ее более пологой. При этом одними из важнейших вопросов остаются изучение биомеханических свойств роговой оболочки после вышеуказанных опе-

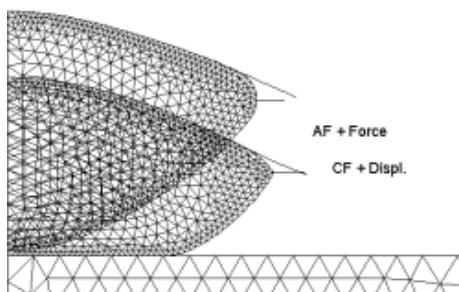


Рис. 9. Начальное и деформированное состояние хрусталика глаза.

раций, исследование изменения напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза, а также изменения коэффициента запаса прочности роговицы после изменения ее толщины. Оценка изменения коэффициента запаса прочности роговицы как пологой сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего нормального давления, на основе линейной теории оболочек сделана в [20]. Работы [48, 76] посвящены изучению напряженно-деформированного состояния сопряженных однородных изотропных и трансверсально-изотропных сферических оболочек, находящихся под действием нормального давления. Сравнивались аналитические и численные решения, полученные в прикладном пакете ANSYS. Изучалось влияние геометрических и механических параметров на прогиб роговицы, проведена оценка изменения коэффициента запаса прочности роговицы после рефракционных операций. Аналитические результаты, полученные по различным теориям оболочек, отличаются менее чем на 10%.

В последнее время все чаще стали проводиться операции по коррекции не только миопии (близорукости), но и гиперметропии (дальнозоркости). В этом случае меняется толщина роговицы не в центральной зоне, а по кольцу в окрестности центра для того, чтобы уменьшить радиус кривизны роговицы, сделать ее более “выпуклой”. Большое количество таких операций проводится в Чебоксарском филиале МНТК “Микрохирургии глаза” им. акад. С.Н. Федо-

рова. Построена математическая модель [11], позволяющая оценить изменение напряженно-деформированного состояния и показателей внутриглазного давления после рефракционных операций по коррекции гиперметропии.

7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТОНОМЕТРИИ — МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЯ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ

Известно, что впервые важное значение измерения ВГД подчеркнул Альбрехт фон Грефе в 1862 г., изучая причины возникновения глаукомы [32, 34, 60]. Он также создал первый тонометр импрессионного типа. При импрессионном методе на роговицу производят давление концом некоторого штифта небольшого диаметра, а о деформации судят по глубине образуемой пологой ямки. Чем мягче глаз, т.е. чем ниже ВГД, тем больше роговица деформируется под влиянием одной и той же силы. В монографии [34], изданной в 1991 г., отмечается, что в истории развития тонометрии традиционно выделяют четыре периода. Начальный период (1862–1884), в течение которого измерение ВГД носило экспериментальный характер. Второй период (1884–1913) связан с созданием А.Н. Маклаковым тонометра, положившего начало развитию аппланационной тонометрии [53], при которой глаз деформируется грузом с плоским основанием, в результате чего образуется “кружок сплющивания или аппланации” [60]. Измерение ВГД может производиться по величине деформации при одинаковой силе давления на глаз либо по величине давления на глаз при одной и той же зоне контакта. В тонометре Маклакова использовались грузы весом 5 или 10 граммов. Третий период (1913–1950) связывают “с широким внедрением тонометрии в повседневную практику”, четвертый период — “означался завершением калибровки и стандартизации импрессионного тонометра Шиотца, аппланационного тонометра Маклакова и созданием аппланационного тонометра Гольдмана (1954)” [34], названного по имени швейцарского офтальмолога Ганса Гольдмана (1899–1991), который его изобрел, быстро ставшего международным стандартом в офтальмологии. Данные, получаемые этим тонометром, стали называть “золотым эталоном”. При измерении ВГД

по Гольдману создается небольшая зона контакта (в первых тонометрах диаметр зоны сплющивания составлял 2.03 мм [34], позже — 3.06 мм), и о величине ВГД судят по силе, которая требуется, чтобы сделать плоской эту часть роговицы. При такой малой зоне контакта предполагалось, что влияние сил упругости роговицы очень мало, и тогда можно считать, что сила, вызывающая сплющивание роговицы, деленная на площадь контакта, будет равна давлению внутри мягкой оболочки. Диаметр аппланации 3.06 мм был выбран в связи с тем, что он обеспечивает соотношение, когда внешнее давление на роговицу в 1 г соответствует внутриглазному давлению в 10 мм рт. ст.

Сейчас (после 1991 г.), безусловно можно выделить пятый период развития тонометрии, связанный с появлением рефракционной хирургии, так как “завершение калибровки” тонометров было основано на экспериментальных данных, т. е. на “средних” показателях [34]. Диаметр глазного яблока человека действительно варьируется в очень малых пределах и в среднем равен 24 мм. Толщина роговицы переменна, но в центральной зоне минимальна и в среднем равна 0.52 мм [60]. Однако в последнее десятилетие появились приборы, которые позволяют при обследовании пациента точнее определить геометрические параметры роговицы, и, как следствие, появилось много работ, обсуждающих чувствительность показателей тонометра Гольдмана, считавшегося одним из самых точных тонометров, к толщине роговицы в центральной зоне. Особенно сильно эта зависимость проявляется после операций по коррекции зрения, так как при этих операциях существенно меняются толщина и кривизна роговицы [89]. В работе [67] представлены результаты определения уровня внутриглазного давления с использованием различных методик измерения после различных рефракционных операций. Были отмечены значительные расхождения значений ВГД, полученных различными тонометрами на одном и том же глазу (до 12 мм рт. ст.). Как отмечено в работе известного офтальмолога С.Ю. Кальфа еще в 1928 г. [44], “если мы обратимся к методике исследования ВГД, то мы должны признать, что наши тонометрические определения не столько дают нам заключение о внутриглазном давлении, сколько о реакции глазных оболочек на приложение к глазу тонометра”. Таким образом, понятно, что сей-

час стали актуальными вопросы теории тонометрии, создание моделей, позволяющих оценить влияние различных параметров глаза на показатели ВГД.

Роговица глаза близка к мягкой оболочке (т.е. к оболочке, не со- противляющейся изгибу). Известно, что модули упругости и склеры и роговицы в тангенциальном направлении на два порядка больше модуля упругости в направлении толщины оболочки [40, 72]. При измерении ВГД аппланационными методами (рис. 10) различают тонометрическое давление: $p_t = W/S$, где W — вес прилагаемого груза (или прикладываемая сила), S — площадь зоны контакта.

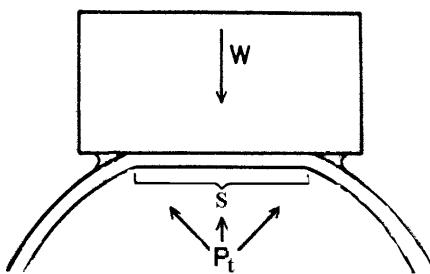


Рис. 10. Тонометрическое давление.

В настоящее время истинное внутриглазное давление при использовании тонометра Маклакова определяют с помощью специальных таблиц, в основе которых для определения внутриглазного давления лежат эмпирические формулы, связывающие величину изменения внутриглазного давления $p_t - p_0$ при нагружении глаза тонометром (p_0 — истинное давление, т.е. давление до нагружения тонометром) и объем ΔV сегмента роговицы, основание которого равно кругу, совпадающему с зоной контакта тонометра и роговицы. Объем ΔV называют объемом смещенной жидкости. Никаких аналитических моделей при этом не рассматривалось.

Наши первые модели аппланационной тонометрии были представлены в работах [25, 26, 77] (рис. 11). В первой модели глаз рассматривался как две сопряженные оболочки с разными свойствами

— роговица и склеры. Во второй модели глаз рассматривался как мягкая (безмоментная) сферическая оболочка.

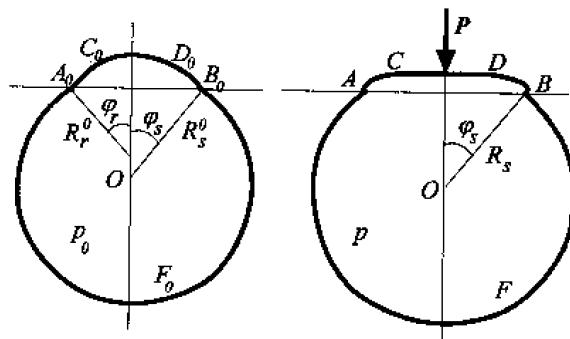


Рис. 11. Два сопряженных сферических сегмента, моделирующих глазное яблоко.

Предполагалось, что склеры и роговица имеют форму сферических сегментов разного радиуса. В работе [25] проводился анализ влияния упругих и геометрических свойств склеры и роговицы на изменение давления в глазу при его нагружении. Предполагалось, что глаз до нагружения заполнен несжимаемой жидкостью с давлением p_0 . В первой модели роговица, которая при нагружении испытывает большие деформации (см. рис. 11), также предполагалась безмоментной мягкой оболочкой. (Известно, что модуль упругости роговицы E_r в несколько раз меньше модуля упругости склеры E_s .) В этом случае по зоне контакта определялось давление внутри нагруженной оболочки p ($p = p_t = P/S$). Предполагалось также, что линия действия приложенной к оболочке внешней силы (веса груза) проходит через центры обоих сферических сегментов, в результате действия груза склеры деформируются так, что угол φ_s , под которым из центра склеры видна линия контакта, остается неизменным, а сферический сегмент, моделирующий склеру, остается сферическим сегментом, но с измененным радиусом — R_s . Деформация роговицы, так же как и деформация оболочки во второй модели, описывались нелинейными уравнениями. Полагалось, что

уменьшение объема ΔV под сегментом $ACDB$ в результате действия груза

$$\Delta V = \pi \int_0^{s_b} \left(r_0^2 \sin \varphi_0 - r^2 \lambda_1 \sin \varphi \right) ds_0,$$

компенсируется растяжением склеры:

$$\Delta V = \Lambda(p - p_0), \quad \Lambda = \frac{3(1 - \nu_s)R_s^0}{2E_s h_s} V_s.$$

Здесь основная переменная s_0 — длина дуги образующей оболочки в ненагруженном состоянии, отсчитываемая от оси симметрии; $r' = \lambda_1$; r , φ — расстояние до оси симметрии и угол между нормалью к оболочке и осью симметрии; Λ — податливость оболочки при повышении давления. На основе расчетов, проведенных в [25] для многих параметров, отмечается, что используемая на практике связь между истинным внутрглазным давлением и диаметром плоской части области деформации роговицы глаза при измерении по методу Маклакова удовлетворительно описывается решениями модельных задач. Отмечается, что связь $p_0 = f(d)$ слабо зависит от упругих свойств оболочек глаза. Однако утверждение о том, что изменение давления внутри оболочки при ее нагружении совпадает с изменением давления в той же оболочке после введения в нее дополнительного объема жидкости, равного количеству “смещенной жидкости”, не согласуется с решениями модельных задач. Результаты расчетов показали также, что на истинное значение ВГД оказывают влияние параметры не только роговицы, но и склеры.

Известно, что у людей с миопией (близорукостью) и гиперметропией (дальнозоркостью) глаз имеет форму эллипсоида, полуоси которого могут существенно отличаться. Причем у людей с миопией длина “передне-задней оси” и объем глаза больше, чем у людей с нормальным зрением и у людей с гиперметропией. В связи с этим в работах [18, 28], продолжая исследования [25], также обсуждалась математическая модель измерения ВГД по методу Маклакова, роговица по-прежнему моделировалась сферическим сегментом, а скlera — сегментом более общей формы — эллипсоидальным.

Если принять, что объем эллипсоидального сегмента с полуосами a и b равен объему сферического сегмента радиуса R_s , то можно

получить зависимость истинного ВГД от соотношения полуосей эллипсоидального сегмента.

Расчеты, проведенные при различных параметрах, показали, что одинаковой зоне контакта груза и роговицы в дальнозорких глазах (сплюснутый эллипсоид) соответствует несколько большее ВГД, чем в глазах с нормальным зрением. В близоруких глазах (вытянутый эллипсоид) истинное значение ВГД незначительно (меньше чем на 1 мм рт. ст.), ниже, чем в глазах с нормальным зрением. Однако если мы будем учитывать, что у людей с миопией объем глаза обычно больше, чем у людей с нормальным зрением и у людей с гиперметропией, то можно получить зависимость, представленную на рис. 12, которая хорошо согласуется с клиническими данными [18]. На рис. 12 ПЗО — длина “передне-задней оси” = $2a$, $b = 12$ мм, вес тонометра $P = 10$ г.)

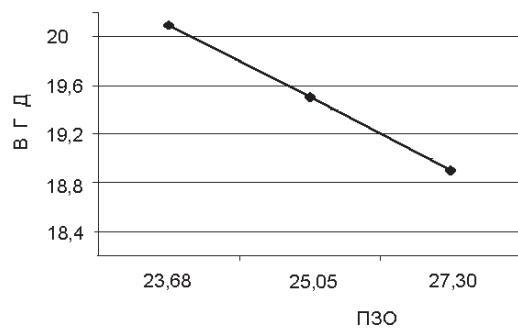


Рис. 12. Зависимость истинного ВГД от объема глаза.

Таким образом, в зоне реального внутриглазного давления ($p = 14 - 20$ мм рт. ст.) модель сопряженных оболочек хорошо описывает зависимость показателей ВГД, полученных методом Маклакова, от объема глаза. Результаты показали также, что показатели ВГД, полученные при $P = 10$ г (этот груз наиболее часто используется в наших медицинских учреждениях), слабо зависят от толщины роговицы.

Как уже отмечалось, при аппланационной тонометрии измерение ВГД может производиться по величине деформации при заданном грузе (по методу Маклакова) или по величине давления на глаз при одной и той же зоне контакта (по методу Гольдмана). С точки зрения математики это прямая и обратная задачи при одной и той же механической модели. То есть описанная выше и подробно представленная в работах [25, 26] модель сопряженных оболочек может быть использована и для описания тонометра Гольдмана. Однако и в этом случае, так как роговица рассматривалась как мягкая оболочка, результаты расчетов говорят о том, что показатели ВГД должны быть не чувствительны к толщине роговицы, но это не соответствует данным офтальмологов.

В настоящее время во многих работах [6, 24] обсуждается чувствительность показателей тонометра Гольдмана к толщине роговицы в центральной зоне.

В работе [6] на основе анализа группы из 1100 пациентов предлагалось в зависимости от толщины роговицы, полученной при помощи кератопахиметрии — процедуры измерения толщины роговицы в центральной зоне, выделить 5 условных групп: I — “ультратонкие”, II — “тонкие”, III — “нормальные”, IV — “толстые”, V — “ультратолстые” роговицы. С учетом данных [6] в работе [24] в каждой условной группе проведен сравнительный анализ показателей ВГД, полученных на одних и тех же глазах разными методами. Результаты показали, что данные ВГД, полученные методом Маклакова существенно менее чувствительны к значению толщины роговицы, чем данные, полученные тонометром Гольдмана.

Роговица, как и скlera, близка к мягкой оболочке, но упругими свойствами обладает и при изгибе. По данным [40], и склеры, и роговица близки к трансверсально-изотропным оболочкам, у которых модуль упругости в направлении толщины оболочки существенно меньше тангенциального модуля.

В связи с этим было выполнено конечно-элементное моделирование задачи в программном пакете ANSYS-версия 9.0 [24, 27, 76]. Упругая система “роговица — склеры” представляла собой сопряжение двух сферических оболочек с разными диаметрами и разными упругими свойствами. Расчеты показали, что возмущение, вносимое в упругую систему (“роговица — склеры”) тонометром Гольд-

мана, локализовано вблизи области контакта и на стыке роговицы со склерой уже довольно мало, т.е. в этом случае деформирование роговицы в основном зависит от упругих свойств и геометрии роговицы. Поэтому без потери точности система “роговица — склера” в ряде работ заменена трансверсально-изотропной сферической оболочкой постоянной толщины, имеющей радиус роговицы. Однако при моделировании измерения ВГД тонометром Маклакова, особенно грузом 10 г, т.е. в случае, когда зона контакта оказывается значительно большей, оболочка склеры может оказывать существенное влияние на процесс деформирования. Поэтому в работах [13, 23, 79] корнеосклеральная оболочка моделируется сопряженными оболочками. Задача решалась в предположении осевой симметрии.

Расчеты показали, что, чем меньше зона контакта груза и оболочки (за счет величины груза или внутреннего давления), тем больше доля усилий, идущих на изгибные деформации [13]. Толщина роговицы существенно влияет именно на изгибные деформации оболочки. Таким образом, так как при измерении ВГД тонометром Гольдмана диаметр зоны контакта 3.06 мм, а при измерении тонометром Маклакова (5 и 10 г) при “средних” давлениях (от 10 до 30 мм рт. ст.) диаметр зоны контакта больше, то показатели ВГД при измерении тонометром Гольдмана существенно более чувствительны к изменению толщины роговицы, чем показатели ВГД при измерении тонометром Маклакова. Более того, расчеты показывают также, что влияние толщины роговицы на показатели ВГД при измерении тонометром Маклакова весом 5 г больше, чем на показатели ВГД при измерении тонометром весом 10 г. Это подтвердили и клинические данные [24]. Анализу подвергалась небольшая группа пациентов. Толщина роговицы пациентов менялась от 0.456 до 0.608 мм. Проводился анализ показателей ВГД, полученных на одном и том же глазу тонометрами Маклакова весом 5 и 10 граммов. Показатели ВГД, полученные тонометром 10 г, менялись в диапазоне от 18 до 20 мм. рт. ст. Показатели ВГД, полученные на тех же глазах тонометром 5 г, менялись в диапазоне от 12 до 17 мм рт. ст.

Результаты расчетов при разных модулях упругости показали, что на деформации оболочек, а значит, и на показатели ВГД наиболее существенное влияние оказывает модуль сдвига в плоскости,

перпендикулярной к поверхности, а этот модуль в трансверсально-изотропной оболочке не зависит от тангенциального модуля упругости. Для роговицы, состоящей из нескольких слоев, этот модуль характеризует связь этих слоев, и известно только, что этот модуль имеет малое значение.

В работе [45] построены модели аппланационной тонометрии (тонометр Маклакова и Гольдмана) с учетом многослойности роговицы. Сравнение результатов, полученных при моделировании аппланационных методов тонометрии для многослойной роговицы, с результатами, полученными тем же методом для однородной роговицы, но с осредненными значениями упругих параметров составляющих ее слоев, показало, что зона контакта в первом случае больше, а следовательно, величина истинного внутриглазного давления меньше.

Известно несколько разновидностей операций по коррекции зрения, в число которых входят фоторефракционная кератэктомия (ФРК) и лазерный кератомилез (ЛАЗИК, LASIK). Хотя в обоих случаях используется один и тот же эксимерный лазер, техники операции существенно различаются. При ФРК воздействию лазерного луча подвергается наружная поверхность роговицы. При операции ЛАЗИК передние слои роговицы после специального разреза приподнимаются, при этом обнажаются более глубокие слои, которые и моделируются эксимерным лазерным лучом. В результате такого воздействия образуется еще один дополнительный слой.

Модель многослойной оболочки [22] позволила объяснить клинические данные, представленные офтальмологами в работе [52] и показывающие, что после рефракционных операций происходит снижение показателей внутриглазного давления, измеренных тонометрами Гольдмана и Маклакова. При этом после операции ЛАЗИК наблюдаются более низкие показатели внутриглазного давления, чем после операции ФРК при одинаковом изменении толщины и кривизны роговицы, что может быть объяснено появлением дополнительного слоя, возникающего при операциях ЛАЗИК.

В работе офтальмологов [1] отмечается, что тонометр Маклакова является менее чувствительным к толщине, но если роговица является “слишком плоской”, т.е. если радиус кривизны становится слишком большим, то тонометр Маклакова может давать за-

ниженные показатели ВГД. В работе [75] рассматривалась задача о напряженно-деформированном состоянии и потере устойчивости трансверсально-изотропного сегмента переменной толщины, находящегося под действием внутреннего давления и груза с плоским основанием. Результаты расчетов при параметрах, близких к параметрам роговицы, показали, что при больших радиусах кривизны возможно нарушение контакта груза и оболочки в центре зоны контакта и увеличение внешнего радиуса контакта, что и приводит к заниженным показателям ВГД.

8. О ЗАВИСИМОСТИ “ОБЪЕМ–ДАВЛЕНИЕ” ДЛЯ ГЛАЗНОГО ЯБЛОКА. ИЗМЕНЕНИЕ ВГД ПРИ ВВЕДЕНИИ ИНЬЕКЦИЙ В СТЕКЛОВИДНОЕ ТЕЛО

Одним из современных способов лечения некоторых глазных заболеваний является инъекция — введение небольшой (до 0,2 мл) дозы лечебного препарата в стекловидное тело. За счет кратковременного увеличения внутреннего объема глазного яблока при введении инъекций в первый момент происходит резкое увеличение внутристекловидного давления (ВГД). Даже кратковременное увеличение ВГД выше определенного индивидуального уровня может привести к нарушению кровообращения на сетчатке и в диске зрительного нерва, поэтому важно в каждом конкретном случае оценить возможный уровень изменения ВГД в результате инъекции и риск для отдельного пациента, а также, возможно, на основе этих данных рекомендовать уменьшенную дозу препарата для отдельных больных. С точки зрения механики это задача определения изменения внутреннего давления в оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема несжимаемой жидкости. В работах [16, 90] в рамках трехмерной теории упругости построено решение задачи Ламе о прогибе трансверсально-изотропного сферического слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 под действием внутреннего давления p . В этом случае уравнение равновесия трансверсально-изотропной оболочки имеет вид

$$\frac{d^2 u_\rho}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{du_\rho}{d\rho} + \frac{2E(\nu' - 1)}{E'(1 - \nu)} \frac{u_\rho}{\rho^2} = 0.$$

Здесь E , E' — соответственно модули Юнга при растяжении-сжатии в поверхности изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней; ν и ν' — коэффициенты Пуассона. Решение этого уравнения имеет вид

$$u_\rho = \frac{C_1}{\rho^{m+1}} + C_2 u_\rho^m, \quad m = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4b}}{2}; \quad b = \frac{2E(\nu' - 1)}{E'(1 - \nu)}.$$

Отметим, что в изотропном случае $m = 1$, так как $E = E'$, $\nu' = \nu$ и $b = 2$. Решение совпадает с известным классическим. Константы C_i определяются из условий на поверхности сферы. На основе полученного решения определено изменение внутреннего давления в оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема такой же жидкости. Склеральная оболочка глаза, как уже упоминалось, является сильно анизотропной: модуль упругости склеры в направлении ее толщины существенно меньше модуля упругости в тангенциальном направлении. Для такой оболочки расчеты по различным теориям оболочек, полагающим толщину оболочки неизменной, могут привести к результатам, которые не согласуются с клиническими данными. Построенная модель позволяет для глаз, имеющих форму, близкую к сферической, адекватно оценить изменение внутрглазного давления (ВГД) при введении в склеральную оболочку глаза небольшой дозы лечебного препарата. Полученное аналитическое решение позволяет получить изменение толщины слоя склеры под действием давления p :

$$\Delta h = u_\rho(R_2, p) - u_\rho(R_1, p).$$

Изменение толщины склеральной оболочки при увеличении ВГД, как один из результатов представленного моделирования, согласуется с имеющимися клиническими данными [90], а также с данными о том, что при глаукоме, глазном заболевании, сопровождающемся, как правило, повышенным уровнем ВГД, также наблюдается уменьшение толщины склеры.

Решение более общей задачи об изменении внутреннего давления при изменении внутреннего объема оболочки эллипсоидальной формы позволит оценивать ВГД после инъекций в дальнозорких и близоруких глазах. А известно, что зависимость “объем

— давление” очень чувствительна к начальной форме [14, 15, 36]. На рис. 13 (слева) представлено относительное изменение объема изотропных эллипсоидальных оболочек, имеющих первоначально одинаковый объем, но разные отношения вертикального и горизонтального диаметра оболочки k при нагружении внутриглазным давлением 45 мм рт.ст. (Расчеты проведены при $R_0 = 12$ мм, $E = 14.3$ МПа, $h = 0.5$ мм.) На рис. 13 (справа) для тех же оболочек представлено изменение давления при изменении объема на 0.1 мл (введение инъекции). Видно, что форма оболочки существенно влияет на отношение $\Delta P/\Delta V$. Максимальное значение это отношение принимает для сферической оболочки.

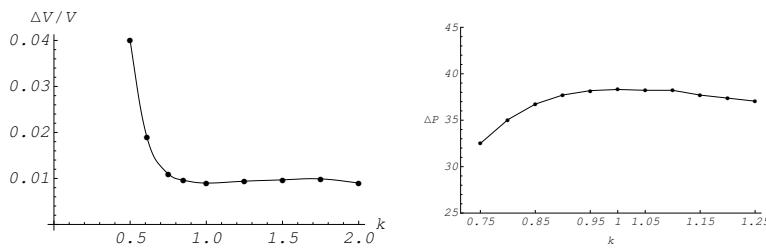


Рис. 13. Относительное изменение объема (слева) и абсолютное изменение давления (справа).

Сравнение точного решения, полученного в рамках трехмерной теории упругости, с решениями на основе теории анизотропных оболочек позволяет оценить (см.: [10]), насколько точно теории оболочек могут описывать решение задачи и насколько применимы для оболочек более сложной формы.

Будем считать, что трансверсально-изотропный слой является тонким, т.е. относительная толщина оболочки $\alpha = h/R$ является малой величиной. Здесь $h = R_2 - R_1$ — толщина слоя (оболочки), $R = (R_1 + R_2)/2$ — радиус срединной поверхности слоя. Тогда по классической теории оболочек прогиб сферической оболочки под действием внутреннего давления имеет вид

$$u^{KL} = p \frac{(1-\nu)R^2}{2Eh}$$

(как и раньше E — тангенциальный модуль упругости в поверхности изотропии). Для трансверсально-изотропного слоя первые два члена асимптотического разложения функции прогиба срединной поверхности, полученной по трехмерной теории [16], в безразмерном виде дадут соотношение

$$u^{3D}/u^{KL} = 1 - \alpha(1 - \nu^*) - \alpha^2 \frac{3\nu' - \nu^* - 11\nu^*\nu'}{12\nu'}.$$

Здесь

$$\nu^* = \frac{E}{E'} \frac{\nu'}{1 - \nu}, \quad E^* = \frac{E'}{1 - 2\nu'\nu^*},$$

E' — модуль Юнга при растяжении-сжатии в направлении, перпендикулярном плоскости изотропии.

Нормальные напряжения в срединной поверхности слоя равны

$$\sigma_{zz}^{3D}/p = -\frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{E}{E'} \frac{1 - \nu'}{1 - \nu} - 1 \right) \right).$$

Уточненная теория анизотропных пластин и оболочек, представленная в монографии В.А. Родионовой, Б.Ф. Титаева, К.Ф. Черных [65], позволяет при построении модели деформации анизотропных оболочек учитывать не только, поперечные сдвиги, поперечные нормальные напряжения, повороты волокон, но и изменения их длины в процессе деформации.

Безразмерные соотношения для нормального прогиба и нормальных напряжений, полученные по итерационной теории Родионовой — Титаева — Черных, имеют вид

$$u^{RTCh}/u^{KL} = 1 - \alpha(1 - \nu^*) - \frac{\alpha^2}{12} \left(3 - 12\nu^* - 2(\nu^*)^2 - \frac{6E_2}{5(1 - \nu)E^*} \right),$$

$$\sigma_{zz}^{RTCh}/p = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 \right).$$

Безразмерные соотношения для нормального прогиба и нормальных напряжений полученные по теории оболочек средней толщины Палия — Спиро [62]:

$$u^P/u^{KL} = 1 - \alpha(1 - \nu^*), \quad \sigma_{zz}^P/p = -\frac{1}{2} \left(1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \right).$$

Таким образом, обе теории оболочек, учитывающие изменение толщины оболочки при деформации, позволяют построить для прогиба первые два члена асимптотического разложения точного решения при малых значениях $\alpha = h/R$. Первые два члена соотношений, описывающих нормальные (и тангенциальные) напряжения в фиброзной оболочке, полученные по теории Палия — Спиро, также совпадают с точным решением. Результаты, получающиеся для нормальных напряжений по теории Родионовой — Титаева — Черных, отличаются от точного решения уже во втором члене, т.е. в данной задаче для оценки напряжений более точные результаты получаются по теории Палия — Спиро.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном обзоре представлена часть исследований, выполненных с приложением теории оболочек и пластин к задачам офтальмологии. Можно отметить, что также проводились исследования абберометрических показателей [4, 5]; совместно с сотрудниками лаборатории физиологии зрения (института физиологии им. И.П. Павлова) проводились исследования скорости движения глаз в зависимости от разных тестов, выполненных на системе “Jazz Novo Standard” [21, 51], обсуждались модели тонографии [71].

В результате многолетней работы с офтальмологами построен ряд интересных механических моделей, которые помогли объяснить некоторые наблюдаемые явления, но эти модели иногда помогли и получить новые результаты в механике деформируемого тела, например: решить задачу об устойчивости осесимметричной формы равновесия кольцевых неоднородных ортотропных пластин, находящихся под действием нормального давления; решить задачу об устойчивости сегмента ортотропной оболочки, находящегося под действием нормального внутреннего давления и приложенного груза с плоским основанием; решить задачи о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев, находящихся под действием внутреннего и внешнего давлений. Сравнение этих решений с решениями, получающимися по неклассическим теориям оболочек, позволили оценить точность некоторо-

рых теорий.

Работа с офтальмологами продолжается, возникают новые задачи, связанные и с развитием рефракционной хирургии, и с появлением новых тонометров и новых данных, которые получают офтальмологи.

* * *

Мы выражаем глубокую благодарность офтальмологам МНТК «Микрохирургия глаза» Л.И. Балашевичу, А.Б. Качанову, С.А. Никулину, главному научному сотруднику института им. Гельмгольца Е.Н. Иомдиной за сотрудничество.

Работа выполнена в рамках НИР СПбГУ 6.38.243.2014 и при поддержке гранта РФФИ 13-01-00253.

ЛИТЕРАТУРА

1. Автисов С.Э., Бубнова И.А., Антонов А.А. Исследование влияния биомеханических свойств роговицы на показатели тонометрии // Бюллетень СО РАМН. 2009. № 4. С. 30–33.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М., 1967. 226 с.
3. Атрощенко Е.И. Моделирование противоотслоечных операций в офтальмологии // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”, 2006–2007 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. С. 29–38.
4. Балашевич Л.И., Качанов А.Б., Никulin С.А., Бауэр С.М., Зимин Б.А. Клиническая аберрометрия и кератотопография при эмметропии и аномалиях рефракции // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции “Биомеханика глаза”. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца, 2007. С. 230–237.
5. Балашевич Л.И., Качанов А.Б., Никulin С.А., Бауэр С.М., Зимин Б.А., Вовненко Н.В. Аберрометрия при эмметропии и аномалиях рефракции // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции “Биомеханика глаза”. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца, 2007, С. 238–241.
6. Балашевич Л.И., Качанов А.Б., Никulin С.А., Головатенко С.П., Бауэр С.М., Зимин Б.А. Влияние толщины роговицы на пневмотонометрические показатели внутриглазного давления // Офтальмохирургия. 2005. № 1. С. 27–29.
7. Бауэр С.М. О необходимости построения адекватной математической модели теории аккомодации // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции “Биомеханика глаза”. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца, 2001, С. 137–141.
8. Бауэр С.М. Осесимметричные деформации неоднородных трансверсально-изотропных круглых пластин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3. С. 65–68.

9. *Бауэр С.М.* Об аппланационных методах измерения внутриглазного давления // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2006–2007 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. С. 84–89.
10. *Бауэр С.М., Воронкова Е.Б.* Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев под действием нормального давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. № 3. С. 86–93.
11. *Бауэр С.М., Воронкова Е.Б., Ермаков А.М., Качанов А.Б., Федотова Л.А.* Изменение напряженно-деформированного состояния роговицы и показателей ВГД после лазерной коррекции гиперметропии // V Всероссийский общенаучный офтальмологический форум. Сб. научных трудов. М., 2013. Т. 1. С. 191–194.
12. *Бауэр С.М., Воронкова Е.Б., Романова А.А.* О потере устойчивости симметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. № 1. С. 80–85.
13. *Бауэр С.М., Воронкова Е.Б., Семенов Б.Н.* Математические модели аппланационных методов измерения внутриглазного давления // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2009. С. 19–22.
14. *Бауэр С.М., Воронкова Е.Б., Семенов Б.Н.* Механические аспекты понятия ригидности глаза // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV международной конференции. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010. Т. 1. С. 59–62.
15. *Бауэр С.М., Воронкова Е.Б., Типясов А.С.* О зависимости объем-давление для глазного яблока // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Т. 4. С. 106–109.
16. *Бауэр С.М., Замураев Л.А., Котляр К.Е.* Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях // Российский журнал биомеханики. 2006. Т. 2. С. 43–49.
17. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Волков В.В., Качанов А.Б.* К построению биомеханической модели отслойки сосудистой оболочки глаза // Прикладная механика. Сб. научных трудов. Вып. 9. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995. С. 149–155.
18. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Колеожук У.Н., Качанов А.Б., Любимов Г.А.* О математическом моделировании измерения внутриглазного давления при тонометрии по методу Маклакова // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца, 2005. С. 121–123.
19. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Миронов А.Н., Бегун П.И., Качанов А.Б.* Построение модели глаза при наложении циркулярного шва // Повреждение органа зрения у детей. Сб. трудов Педиатрического медицинского института. СПб., 1991. С. 57–64.

20. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Федорченко М.В., Балашевич Л.И., Качанов А.Б.* Об изменении прочности роговицы после эксимерных лазерных операций по поводу миопии // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца, 2002. С. 55–60.
21. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Шелепин Ю.Е., Вовненко Н.В., Лахман К.О.* Гидродинамическая модель движения внутриглазной жидкости // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV международной конференции. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. Т. 2. С. 112–115.
22. *Бауэр С.М., Карамшина Л.А., Качанов А.Б.* Механические модели измерения внутриглазного давления тонометрами Маклакова и Гольдмана после операций по коррекции зрения // Российский журнал биомеханики. 2012. Т. 16. №. 3. С. 25–31.
23. *Бауэр С.М., Карамшина Л.А., Качанов А.Б., Корников В.В.* Модели измерения внутриглазного давления после операций по коррекции зрения // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XVI международной конференции. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2012. Т. 2. С. 26–33.
24. *Бауэр С.М., Качанов А.Б., Семенов Б.Н., Слесорайтите Е.* О влиянии толщины роговицы на показатели внутриглазного давления при измерении ВГД аппланационными методами // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца, 2007. С. 119–124.
25. *Бауэр С.М., Любимов Г.А., Товстик П.Е.* Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2005. №. 1. С. 24–39.
26. *Бауэр С.М., Любимов Г.А., Товстик П.Е.* Физический анализ измерения внутриглазного давления методом Маклакова // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца. 2004. С. 91–96.
27. *Бауэр С.М., Миронов А.Н.* Контакт сферической оболочки с упругим кольцом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. № 3. С. 111–114.
28. *Бауэр С.М., Типясов А.С.* О математической модели оценки внутриглазного давления по методу Маклакова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. № 4. С. 98–101.
29. *Бауэр С.М., Товстик П.Е., Зимин Б.А.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 92 с.
30. *Бауэр С.М., Товстик П.Е., Качанов А.Б.* К вопросу о построении математической модели развития глаукомы // Российский журнал биомеханики. 1999. Т. 3. № 2. С. 9–10.
31. *Волков В.В.* Актуальные и, по-видимому, наиболее перспективные направления в изучении биомеханики функционирования органа зрения в нормальном и патологическом состояниях // Биомеханика глаза. Сб.

- трудов конференции. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца, 2001. С. 3–4.
32. *Волков В.В.* Глаукома при псевдонормальном давлении. Руководство для врачей. М.: Медицина, 2001.
 33. *Воронкова Е.Б.* Математические модели глаукомы // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2005–2006 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. С. 82–107.
 34. *Вургафт М.Б., Вургафт Я.М.* Тонометрические методы исследования внутриглазного давления и гидродинамика глаза при глаукоме. Казань, 1991. 112 с.
 35. *Ермаков А.М.* Напряженно-деформированное состояние ортотропных неоднородных сопряженных эллиптических оболочек, находящихся под действием внутреннего давления // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2008–2009 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. С. 3–19.
 36. *Ермаков А.М.* Большие деформации ортотропной сферической оболочки под действием внутреннего давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. №. 4. С. 119–126.
 37. *Ермаков А.М.* Напряженно-деформированное состояние и устойчивость сферического сегмента под действием груза с плоским основанием // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2011–2012 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2012. С. 78–89.
 38. *Замураев Л.А.* Деформация трансверсально-изотропного сферического слоя под действием внутреннего и внешнего давления // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2005–2006 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. С. 119–129.
 39. *Золотухина (Карамшина) Л.А.* О деформации многослойной решетчатой пластиинки диска зрительного нерва // Российский журнал биомеханики, № 4 (42), 2008, С. 40–46.
 40. *Иомдина Е.Н.* Биомеханика склеральной оболочки глаза при миопии: диагностика нарушений и их экспериментальная коррекция. автореф. дис. ... д-ра биол. наук. М., 2000. 32 с.
 41. *Иванова О.В.* Моделирование деформации капсулы хрусталика глаза при аккомодации. // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2005–2006 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. С. 52–63.
 42. *Ивченкова А.В.* Деформация сферического сегмента под действием динамической нагрузки (простейшая модель пневмотонометра) // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2013–2014 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2014.
 43. *Игнатьева К.Л.* Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия круглых пластиин под действием нормального давления // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2012–2013 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2013. С. 21–34.

44. Кальфа С.Ю. Эластометрия глаза // Русский офтальмологический журнал. 1928. Т. 8. № 2. С. 250–262.
45. Карамшина Л.А. Механические модели апplanationной тонометрии с учетом многослойности роговицы // Российский журнал биомеханики. 2011. № 3. С. 37–44.
46. Карамшина Л.А. О деформации двуслойной трансверально-изотропной сферической оболочки // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. № 2. С. 133–138.
47. Карамшина Л.А. О деформации трехслойной изотропной сферической оболочки // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2010–2011 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2012. С. 15–26.
48. Krakovskaya E.B. О деформации составной сферической оболочки под действием внутреннего давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. № 2. С. 129–132.
49. Krakovskaya E.B. Приложение теории сопряженных оболочек к некоторым задачам офтальмологии // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2005–2006 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. С. 5–19.
50. Krakovskaya E.B. Напряженно-деформированное состояние сопряженных сферических оболочек под действием внутреннего давления // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2006–2007 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. С. 84–99.
51. Лахман К.О. Гидродинамическая модель движения внутриглазной жидкости, возникающего при движении глазного яблока // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2010–2011 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2012. С. 65–70.
52. Лебедев И.О., Яворский А.Е. Влияние рефракционных операций на уровень офтальмотонуса у пациентов с миопией // Российский офтальмологический журнал. 2008. № 2. С. 23–25.
53. Маклаков А.Н. Офтальмотонометрия // Медицинское обозрение. 1884. Т. 24. С. 1092–1095.
54. Миронов А.Н. Осесимметричная контактная задача для неполной сферической оболочки // Прикладная механика. Сб. научных трудов. Вып. 10. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. С. 136–140.
55. Миронов А.Н., Семенов Б.Н. Математическое моделирование эпиклерального пломбирования глаза // Прикладная механика. Сб. научных трудов. Вып. 9. СПб.: Изд-во СПбГУ, С. 155–160.
56. Миронов А. Н. О задаче конструирования упругого потенциала склеральной ткани // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2005–2006 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. С. 130–142.

57. Мишина Э.Н. К расчету напряженно-деформированного состояния оболочки глаза при опоясывающей нагрузке // // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2. С. 68–72.
58. Мишина Э.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния ортотропной сферической оболочки при опоясывающей нагрузке // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1999, № 4.
59. Морозов Н.Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, загруженной симметричной нагрузкой // Изв. высш. уч. заведений. Математика. 1961. № 2. С. 126–129.
60. Нестеров А.П., Бунин Ф.Я., Канцельсон Л.А. Внутриглазное давление. Физиология и патология. М.: Наука, 1974. 381 с.
61. Обрубов С.А., Сидоренко Е.И., Федорова В.Н., Дубовая Т.К., Древаль А.А. Акустическая биомеханика глаза и ее значение для клиники. М., 2001. 128 с.
62. Палий О.М., Спиро В.Е. Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет. 1977. 386 с.
63. Панов Д.Ю., Феодосьев В.И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // ПММ. Т. XII. 1948 С. 389–406.
64. Романова А.А. К построению модели деформации решетчатой пластины диска зрительного нерва // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2007–2008 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008. С. 110–116.
65. Родионова В.А., Титов В.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: СПбГУ, 1996. 280 с.
66. Светлова О.В., Бауэр С.М., Кошиц И.Н. Биомеханические аспекты лечения пресбиопии по способам R. Schahar и H. Fukusaku // Труды международного симпозиума. Москва, 18–20 декабря 2001. М., 2001. С. 232–233.
67. Тарутта Е.П., Еричев В.П., Ларина Т.Ю. Контроль уровня ВГД после кератофефракционных операций // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции “Биомеханика глаза”. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца. 2004. С. 120–122.
68. Типясов А.С. Оценка влияния кривизны роговицы и склеры на показатели внутриглазного давления, при аппланационных методах измерения. Зависимость внутриглазного объема от внутриглазного давления // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2008–2009 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. С. 98–111.
69. Трофименко П.В. Зависимость внутриглазного объема от внутриглазного давления. // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2012–2013 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2013. С. 35–41.

70. Трофименко П.В. Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах о деформации трансверсально-изотропных сферических слоев под действием нормального давления // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2013–2014 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2014.
71. Франус Д.В. О простейших математических моделях тонографии // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2012–2013 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2014. С. 42–52.
72. Battaglioli J.L., Kamm R.D. Measurements of the compressive properties of scleral tissue // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. 1984. Vol. 25, N 1. P. 59–65.
73. Bauer S.M. Mechanical models of the development of glaucoma // Advances in Mechanics of Solids In Memory of Prof E M Haseganu. Singapore, 2006. P. 153–178.
74. Bauer S.M. Mathematical simulation in ophthalmology // Shell and membrane theories in mechanics and biology: from Macro-to Nanoscale Structures. Proceedings of the international Scientific Conference. Minsk, 2013. P. 16–17.
75. Bauer S.M., Ermakov A.M. Buckling of a spherical segment under the flat base load // Proceedings of the 2nd International Conference Optimization and Analysis of Structures. 2013. P. 24–27.
76. Bauer S.M., Krakovskaya E.V. On the stress-strain state of the fibrous eye shell after refractive surgery // Proceedings of the 23rd Nordic Seminar on Computational Mechanics. 2010. P. 60–62.
77. Bauer S.M., Lyubimov G.A., Tovstik P.E. On the mathematical simulation of the measuring of the intraocular pressure by Maklakov method // Technische Mechanik. 2004. Vol. 24, N 3. P. 231–235.
78. Bauer S.M. and Mironov A.N. On the mathematical simulation of the stress-strain state of the eye shell undergoing the scleral buckling procedure // Proceedings of the XIII Conference of the European Society of Biomechanics. 2002. P. 726–727.
79. Bauer S.M., Romanova A.A., Semenov B.N. Mathematical models for applanation tonometry // Proceedings of the 23rd Nordic Seminar on Computational Mechanics. Stockholm, 2010. P. 66–68.
80. Bauer S.M., Romanova A.A., Smirnov A.L. On formulation of the problem on deformation of the lamina cribrosa // Russian Journal of Biomechanics. 2001. Vol. 5, N 3. P. 18–22.
81. Bauer S.M., Tovstik P.E. Buckling of Spherical Shells under Concentrated Load and Internal Pressure // Technische Mechanik. 1998. Vol. 18. N 2. P. 135–139.
82. Bauer S.M., Tovstik P.E., Kachanov A.B. On the stability of the eye shell under encerclng band // Technische Mechanik. 1995. Vol. 15, N 3. P. 183–190.

83. Bauer S.M., Voronkova E.B. On the deformation of the lamina cribrosa under intraocular pressure // Russian Journal of Biomechanics. 2001. Vol. 5, N 1. P. 273–82.
84. Bauer S.M., Voronkova E.B. The mechanical response of the lamina cribrosa to the elevated intraocular pressure // Proceedings of the XIII Conference of the European Society of Biomechanics. 2002. P. 712–713.
85. Bauer S.M., Voronkova E.B. On the unsymmetrical buckling of the nonuniform orthotropic circular plates // Lecture Notes in Computer Science. Numerical Analysis and its Applications. Springer. 2013. Vol. 8236. P. 198–205.
86. Bauer S.M. and Voronkova E.B. Nonclassical theories for bending analysis of orthotropic circular plate // Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. Gdansk, 2014. Vol. 3, P. 57–60.
87. Bauer S.M., Voronkova E.B., Ignateva K.A. Unsymmetric equilibrium states of inhomogeneous circular plates under normal pressure // Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. Gdansk, 2014. Vol. 3, P. 171–174.
88. Cheo L.S., Reiss E.L. Unsymmetric wrinkling of circular plates // Quart. Appl. Math. 1971. N 31. P. 75–91.
89. Faucher A., Gregoire J., Blondeau P. Accuracy of goldmann tonometry after refractive surgery // J. Cataract Refract. Surg. 1997. Vol. 23. P. 832–838.
90. Kotliar K., Maier M., Bauer S., Feucht N., Lohmann C., Lanzl I. Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model // Acta Ophthalmol. Scand. 2007. Vol. 85, N 7. P. 777–781.
91. Ljubimova D.Y., Eriksson A., Bauer S.M. Numerical study of effect of vitreous support on eye accommodation // Acta of Bioengineering and Biomechanics. 2005. Vol. 7, N 2. P. 3–15.
92. Ljubimova D.Y., Eriksson A., Bauer S.M. Aspects of eye accommodation evaluated by finite elements // Biomech. Model. Mechanobiol. 2008. Vol. 7, № 2. P. 139–150.
93. Maier M.M., Bauer S.M., Lanzl I.M., Kotliar K.E. How Does Optical Refraction Change in Myopia, Emmetropia and Hypermetropia After Encircling Band Procedure? A Biomechanical Model // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. 2005. Vol. 46: E-Abstract 5523.
94. Mironov A.N., Semenov B.N. Zum problem der mathematischen modellierung in der ophtalmologie // Technische Mechanik. 1996. № 3. P. 245–249.
95. Piechocki W. On the non-linear theory of thin elastic spherical shells // Arch. Mech. Stos. 1969. N 21. P. 81–101.

-
96. Voronkova E.B., Bauer S.M., Eriksson A. Nonclassical theories of shells in application to soft biological tissues // Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Springer. 2011. Vol. 15. P. 647–654.
 97. Yan D. B., Flanagan J. G., Farra T., Trope G. E., Ethier C. R. Study of regional deformation of the optic nerve head using scanning lazei tomography, // Current Eye Research. 1998. Vol. 17, P. 903–916.

УСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Д. В. Альчибаев

В работе рассматривается устойчивость тонкой цилиндрической оболочки средней длины, выполненной из анизотропного материала, описываемого 21 упругим модулем, под действием нормального давления. Получены первые два слагаемых асимптотического разложения формы потери устойчивости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Достаточно хорошо изучены задачи об устойчивости тонких цилиндрических и близких к цилиндрическим оболочек из изотропного и ортотропного материалов [1–3], что нельзя сказать об оболочках с анизотропией общего вида. Для анизотропного материала, описываемого 21 упругим модулем, в работе [4] рассмотрена пластина, а в [5] — оболочка. В [4, 5] показано, что в случае анизотропии и гипотезы Кирхгофа—Лява, и гипотезы Тимошенко—Рейснера не приводят к корректным двумерным моделям, в силу того что вносят ошибку в главных членах разложений по степеням относительной толщины. Также в [4, 5] предложены обобщенные гипотезы Тимошенко—Рейснера, не имеющие этого недостатка.

В настоящей статье в предположении, что все 21 упругий модуль имеет один порядок, проведено исследование задачи устойчивости под действием внешнего давления в условиях жесткой заделки краев.

В качестве примера рассмотрен анизотропный материал, полученный осреднением изотропного материала с содержащимися в нем малорастяжимыми волокнами.

Доклад на семинаре 1 октября 2013 г.
© Д. В. Альчибаев, 2013

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Круговая цилиндрическая оболочка радиуса R , длины L и постоянной толщины h (причем $R/L \sim 1$, $h/R \ll 1$) выполнена из анизотропного материала общего вида (рис. 1). Введем ортогональные криволинейные координаты $x_1 = Rs$, $x_2 = R\varphi$ в направлении образующей и круговом направлении. По нормали к поверхности направим третью ось координат $x_3 = z$. Выражения для коэффициентов Ляме имеют вид $H_1 = R$, $H_2 = R + z \approx R$, $H_3 = 1$.

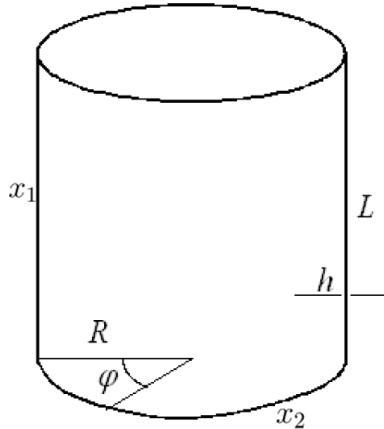


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка.

Для описания соотношений упругости используем матричные обозначения. Определим деформации ε_{ij} по формулам $\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i \neq j$, где $\{u_1, u_2, u_3\} = \{u, v, w\}$ — перемещения. Сгруппируем деформации и напряжения на тангенциальные σ_t , ε_t и нетангенциальные σ_n , ε_n :

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22})^T, & \varepsilon_n &= (\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33})^T, \\ \sigma_t &= (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})^T, & \sigma_n &= (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})^T.\end{aligned}\quad (1)$$

Соотношения между деформациями и напряжениями записы-

ваются в виде

$$\sigma_t = \mathbf{A} \cdot \varepsilon_t + \mathbf{B} \cdot \varepsilon_n, \quad \sigma_n = \mathbf{B}^T \cdot \varepsilon_t + \mathbf{C} \cdot \varepsilon_n, \quad (2)$$

где $\mathbf{A} = \{A_{ij}\}$, $\mathbf{B} = \{B_{ij}\}$, $\mathbf{C} = \{C_{ij}\}$ — матрицы упругих модулей; матрицы \mathbf{A} и \mathbf{C} симметричны. Полагаем, что матрица анизотропии, содержащая 21 упругий модуль

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

положительно определена.

Предполагаем, что напряжения на обеих поверхностях $z = \pm h/2$ отсутствуют:

$$\sigma_{i3} = 0, \quad i = 1 \dots 3, \quad z = \pm h/2. \quad (4)$$

Полагаем, что нормальное перемещение w не зависит от z , и пренебрегаем нормальными напряжениями $\sigma_{33} = 0$. Таким образом, мы можем исключить ε_{33} из соотношений упругости (2), переписав их в виде

$$\sigma_t = \mathbf{A}^* \cdot \varepsilon_t + \mathbf{B}^* \cdot \varepsilon_n^*, \quad \sigma_n^* = \mathbf{B}^{*T} \cdot \varepsilon_t + \mathbf{C}^* \cdot \varepsilon_n^*, \quad (5)$$

где $\sigma_n^* = (\sigma_{13}, \sigma_{23})^T$, $\varepsilon_n^* = (\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})^T$. Элементы матриц \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* , \mathbf{C}^* выражаются через элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} :

$$A_{ij}^* = A_{ij} - \frac{B_{i3}B_{j3}}{C_{33}}, \quad B_{ij}^* = B_{ij} - \frac{B_{i3}C_{j3}}{C_{33}}, \quad C_{ij}^* = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}}. \quad (6)$$

3. ОБОВЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ТИМОШЕНКО–РЕЙСНЕРА

Как и в работе [6], здесь используется обобщенная модель Тимошенко–Рейснера. Рассмотрим подробнее. При выводе двумерных уравнений теории оболочек рассматривается несколько моделей распределения деформаций ε_{iz} , где $i = 1, 2$ по толщине оболочки. В гипотезе Кирхгофа–Лява считается, что $\varepsilon_{iz} = 0$. В модели Тимошенко–Рейснера принимается $\varepsilon_{iz} = \gamma_i$ либо, более точно, $\varepsilon_{iz} = \gamma_i(1 - 4z^2/h^2)$. Последнее позволяет выполнить граничные

условия для ортотропных оболочек. Однако гипотезы Кирхгофа–Лява и Тимошенко–Рейснера не приводят к корректной двумерной модели в общем случае анизотропии [5, 7]. Как и в [7], примем

$$\varepsilon_{i3} = \gamma_i + \delta_i z + P_2^0(z)\beta_i, \quad i = 1, 2, \quad P_2^0(z) = z^2/h^2 - 1/12, \quad (7)$$

где функции $\gamma_i, \delta_i, \beta_i$ не зависят от z . δ_i, β_i находим из условий (4). Таким образом, получаем тангенциальные смещения:

$$u_i(z) = u_i^0 + P_2(z)\delta_i + P_3(z)\beta_i, \quad P_2 = \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{24}, \quad P_3 = \frac{z^3}{3h^2} - \frac{z}{12}, \quad (8)$$

где u_i^0 — сечения срединной поверхности.

Деформации ε_{ij} , где $i, j = 1, 2$, имеют вид

$$\varepsilon_t = \varepsilon_t^0 + z\mathbf{K}(\theta) + P_2(z)\mathbf{K}(\delta) + P_3(z)\mathbf{K}(\beta), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\xi) &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right)^T, \quad \varepsilon_t^0 = \mathbf{K}(u^0) + \left(0, 0, \frac{w}{R} \right)^T, \quad (10) \\ Z &= (Z_1, Z_2)^T, \quad Z = \{\xi, u^0, \gamma, \theta, \delta, \beta\}, \end{aligned}$$

здесь ε_t^0 — тангенциальные деформации срединной поверхности и $\theta_i = \gamma_i - \partial w / \partial x_i$ — средние углы поворота волокон.

Условия (4) будут выполнены, если

$$\delta = -(\mathbf{C}^*)^{-1}\mathbf{B}^{*T}\mathbf{K}(\theta), \quad \beta = -6\left(\gamma + (\mathbf{C}^*)^{-1}\mathbf{B}^{*T}\varepsilon_t^0\right). \quad (11)$$

Таким образом, можно записать деформации в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^* &= \gamma - z(\mathbf{C}^*)^{-1}\mathbf{B}^{*T}\mathbf{K}(\theta) - 6P_2^0(z)\left(\gamma + (\mathbf{C}^*)^{-1}\mathbf{B}^{*T}\varepsilon_t^0\right), \\ \varepsilon_t &= \varepsilon_t^0 + z\mathbf{K}(\theta) - P_2(z)\mathbf{K}\left((\mathbf{C}^*)^{-1}\mathbf{B}^{*T}\mathbf{K}(\theta)\right) - \\ &\quad - 6P_3(z)\mathbf{K}\left(\left(\gamma + (\mathbf{C}^*)^{-1}\mathbf{B}^{*T}\varepsilon_t^0\right)\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим за T^{ij} , Q^i и M^{ij} результирующие усилия и моменты соответственно. Их можно найти из соотношений

$$\{T^{ij}, Q^i\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{ij}, \sigma_{i3}\} dz, \quad \{M^{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{ij}\} z dz, \quad i, j = 1, 2. \quad (13)$$

Если элементы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} не зависят от толщины z , можно (13) переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= h (\mathbf{A}^* \varepsilon_t^0 + \mathbf{B}^* \gamma), & \mathbf{T} &= (T^{11}, T^{12}, T^{22})^T, \\ \mathbf{Q} &= h (\mathbf{B}^{*T} \varepsilon_t^0 + \mathbf{C}^* \gamma), & \mathbf{Q} &= (Q^1, Q^2)^T, \\ \mathbf{M} &= -J(\mathbf{A}^{**} \mathbf{K}(\theta) + \mathbf{A}^* \mathbf{K}(\gamma + (\mathbf{C}^*)^{-1} \mathbf{B}^{*T} \varepsilon_t^0)/5), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (M^{11}, M^{12}, M^{22})^T, & J &= \frac{h^3}{12}, & \gamma &= \theta + \nabla w, \\ \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^T, & \mathbf{A}^{**} &= \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^* (\mathbf{C}^*)^{-1} \mathbf{B}^{*T}. \end{aligned} \quad (15)$$

4. ПРИМЕР АНИЗОТРОПИИ

В качестве примера материала с анизотропией общего вида рассмотрим оболочку, сделанную из материала, полученного осреднением изотропного материала (с модулем Юнга E), системой малорастяжимых волокон жесткости E_f [6]. Пусть волокна расположены так, что угол между ними и осью z равен β и угол между осью x_1 и плоскостью, в которой лежат ось z и волокна, равен α (рис. 2).

Потенциальная энергия деформации Π материала имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1-b}{2} \left(\lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + 2\kappa (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + \right. \\ &\quad \left. + \kappa (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) \right) + \\ &\quad + \frac{b}{2} E_f (\varepsilon_{11} a_1^2 + \varepsilon_{22} a_2^2 + \varepsilon_{33} a_3^2 + \varepsilon_{12} a_1 a_2 + \varepsilon_{13} a_1 a_3 + \varepsilon_{23} a_2 a_3)^2, \end{aligned} \quad (16)$$

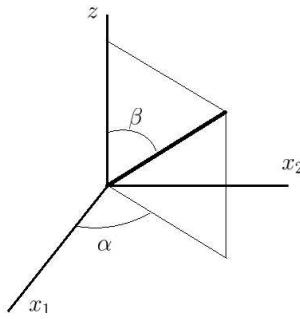


Рис. 2. Направление малорастяжимых волокон.

при $a_1 = \cos \alpha \sin \beta$, $a_2 = \sin \alpha \sin \beta$, $a_3 = \cos \beta$, где $\lambda = E\nu / [(1+\nu)(1-2\nu)]$ и $\kappa = E / [2(1+\nu)]$ — коэффициенты Ляме матрицы, а b — доля объема, занятого волокнами в материале.

Напряжения σ_{ij} находятся из равенства $\sigma_{ij} = \partial\Pi / \partial\varepsilon_{ij}$, откуда находим элементы матриц **A**, **B**, **C**:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= E_1 + E_4 a_1^4, & A_{12} &= E_4 a_1^3 a_2, & A_{13} &= E_2 + E_4 a_1^2 a_2^2, \\
 A_{22} &= E_3 + E_4 a_1^2 a_2^2, & A_{23} &= E_4 a_1 a_2^3, & A_{33} &= E_1 + E_4 a_2^4, \\
 B_{11} &= E_4 a_1^3 a_3, & B_{12} &= E_4 a_1^2 a_2 a_3, & B_{13} &= E_2 + E_4 a_1^2 a_3^2, \\
 B_{21} &= E_4 a_1^2 a_2 a_3, & B_{22} &= E_4 a_1 a_2^2 a_3, & B_{23} &= E_4 a_1 a_2 a_3^2, \\
 B_{31} &= E_4 a_1 a_2^2 a_3, & B_{32} &= E_4 a_2^3 a_3, & B_{33} &= E_2 + E_4 a_2^2 a_3^2, \\
 C_{11} &= E_3 + E_4 a_1^2 a_3^2, & C_{12} &= E_4 a_1 a_2 a_3^2, & C_{13} &= E_4 a_1 a_3^3, \\
 C_{22} &= E_3 + E_4 a_2^2 a_3^2, & C_{23} &= E_4 a_2 a_3^3, & C_{33} &= E_1 + E_4 a_3^4,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$E_1 = \frac{E(1-b)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad E_2 = \frac{\nu E_1}{1-\nu}, \quad E_3 = \frac{E(1-b)}{2(1+\nu)}, \quad E_4 = bE_f. \tag{18}$$

5. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Стационарные двумерные уравнения в случае внешнего давле-

ния для анизотропной оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T^{12}}{\partial x_2} &= 0, \quad \frac{\partial T^{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T^{22}}{\partial x_2} + \frac{Q^2}{R} = 0, \\ \frac{\partial Q^1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q^2}{\partial x_2} - \frac{T^{22}}{R} + \frac{\Lambda h}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} &= 0, \\ \frac{\partial M^{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^{12}}{\partial x_2} + Q^1 &= 0, \quad \frac{\partial M^{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^{22}}{\partial x_2} + Q^2 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Система (19) имеет 10-й порядок.

Предположим, что все модули упругости \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} имеют один порядок. Введем частные индексы вариации t_1 , t_2 неизвестных функций:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} \sim h_*^{-t_i}, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

где Z — любая неизвестная функция, $t = \max(t_1, t_2)$ — общий индекс вариации. Положим $(w/R) \sim 1$ и найдем порядки других неизвестных:

$$\begin{aligned} u_i &\sim h_*^t, \quad \gamma_i, \varepsilon_i j^0 \sim 1, \quad \theta_i \sim h_*^{-t}, \quad \frac{T^{ij}}{Eh} \sim 1, \\ \frac{M^{ij}}{REh} &\sim h_*^{2-2t}, \quad \frac{Q^i}{Eh} \sim h_*^{2-3y}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (21)$$

С погрешностью порядка h^{2-2t} во втором уравнении (19) отбросим слагаемое Q^2/R .

Как и в работе [6], введем здесь функцию усилий Φ , связанную с усилиями T_{ij} посредством соотношений

$$T^{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad T^{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi}, \quad T^{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}.$$

Определяющие уравнения равновесия цилиндрической оболочки можно записать в форме Доннелла [1] для двух неизвестных — прогиба w и функции усилий Φ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{hR^4} L_4 \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Phi - \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} &= 0, \\ \frac{h^3}{12R^4} N_4 \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) w + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} &= \frac{\Lambda h}{R^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

где Λ — параметр нагружения, а L_4 и N_4 — однородные дифференциальные операторы 4-го порядка:

$$\begin{aligned} L_4(p, q) &= a_{11}q^4 - 2a_{12}pq^3 + (a_{22} + 2a_{13})p^2q^2 - 2a_{23}p^3q + a_{33}p^4, \\ N_4(p, q) &= A_{11}p^4 + 4A_{12}p^3q + 2(A_{22} + 2A_{13})p^2q^2 + 4A_{23}pq^3 + A_{33}q^4, \\ \{a_{ij}\} &= (A^{**})^{-1}. \end{aligned}$$

Ищем критическое Λ^* , при котором оболочка теряет устойчивость. Преобразуем систему (22) в

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \mu^8 N_4 L_4 w - \Lambda L_4 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (23)$$

Введем малый параметр $\mu^8 = \frac{h^2}{12R^2} = \frac{h_*^2}{12}$. Будем искать параметр нагружения Λ (23) в виде асимптотического ряда

$$\Lambda = \Lambda_0 + \mu \Lambda_1 + \dots \quad (24)$$

Для нахождения Λ_0 подставим в уравнение (23) функцию вида

$$w(s, \varphi) = w^* \sin(ps + n\varphi), \quad (25)$$

где n — целое число волн в окружном направлении. Поскольку в случае внешнего давления в продольном направлении расположена одна вмятина, полагаем $p \sim 1$. Получим соотношение между волновыми числами p и n в виде

$$\frac{p^4}{L_4(p, n)} + \mu^8 N_4(p, n) + \Lambda_0 n^2 = 0$$

и, зафиксировав p , найдем Λ_0 и критическое значение n_* :

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \min_n \frac{1}{n^2} \left(\frac{A_{33}n^4 h_*^2}{12} + \frac{1}{a_{11}} \right) = \frac{4\mu^6 p}{3} \left(\frac{3(A_{33})^3}{a_{11}} \right)^{1/4}, \\ n_* &= \mu^{-1} \left(\frac{3p^4}{a_{11}A_{33}} \right)^{1/8}. \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что решение (26) содержит неизвестный параметр p , который будет найден позднее.

Решение $w(s, \varphi) = w^* \sin(ps + n\varphi)$ не удовлетворяет граничным условиям и годится только для оценки Λ_0 .

Решение представим в виде асимптотического ряда:

$$Z(s, \varphi) = Z(s)e^{in\varphi} = (Z_0(s) + \mu Z_1(s) + \dots) e^{in\varphi}, \quad (27)$$

где $Z(s, \varphi)$ — любая из неизвестных функций. Для асимптотического анализа решений и интегралов краевого эффекта приводим следующую таблицу, в которой указаны относительные порядки неизвестных функций, входящих в граничные условия.

Относительные порядки основных неизвестных

w	u	v	γ_1	w^k	u^k	v^k	γ_1^k
1	μ^2	μ^1	1	1	1	μ^1	μ^{-2}

Характеристическое уравнение для (22) принимает вид

$$r^4 + \mu^8 N_4(r, in) L_4(r, in) - n^2 \Lambda L_4(r, in) = 0, \quad \Lambda \sim \mu^6 \quad (28)$$

и имеет 4 корня $r_{i1} \sim 1$ и 4 больших корня $r_{i2} \sim \mu^{-2}$. Малые корни приближенно удовлетворяют уравнению

$$r_{i1}^4 = n^6 a_{11} (\Lambda - n^2 \mu^8 A_{33}^{**}). \quad (29)$$

Корни r_{i2} приближенно удовлетворяют уравнению

$$r_{i2}^4 \mu^8 a_{11} + 1 = 0. \quad (30)$$

Решения вида $w(s, \varphi) = w^*(s) e^{r_{i2}s} e^{in\varphi}$ быстро затухают вне окрестности края оболочки, т.е. являются интегралами краевого эффекта.

Далее мы ищем медленно меняющиеся решения w . Отбрасывая в (23) все слагаемые порядка $o(1)$, получим уравнение для w_0 :

$$w_0^{(4)} + n^4 a_{11} (n^4 \mu^8 A_{11} - n^2 \Lambda_0) w_0 = 0,$$

которое представим в виде

$$w_0^{(4)} - p^4 w_0 = 0, \quad (31)$$

где

$$p^4 = n^4 a_{11} (n^4 \mu^8 A_{11} - n^2 \Lambda_0). \quad (32)$$

Отметим, что исходное уравнение (23) имеет 8-й порядок, в то время как уравнение (31) имеет 4-й порядок. Соответственно, решение (31) удовлетворяет только 2 парам основных граничных условий из 4 и может не удовлетворять остальным. В случае если решение $w_0(s)$ не удовлетворяет какому-либо граничному условию, к нему, в качестве поправки, добавляется интеграл краевого эффекта $w_0^* e^{r_{i2}s}$, где r_{i2} из (30)[8].

Аналогичным образом, отбрасывая слагаемые порядка $o(\mu)$, получим уравнение для следующего приближения в асимптотическом ряде (27) w_1 :

$$\begin{aligned} w_1^{(4)} - p^4 w_1 &= \Lambda_1 n_0^2 a_{11} w_0 + \\ &+ 2ipn_0^7 \left(A_{23}a_{11} - A_{33}a_{12} + \frac{\Lambda_0}{n_0^5} a_{12} \right) w'_0, \end{aligned} \quad (33)$$

где $n_0 = n\mu$.

Для удобства в (33) введем обозначения:

$$\alpha_1 = n_0^2 a_{11}, \quad \alpha_2 = 2pn_0^7 \left(A_{23}a_{11} - A_{33}a_{12} + \frac{\Lambda_0}{n_0^5} a_{12} \right). \quad (34)$$

Обратим внимание на множитель i в правой части (33). Из исходного вида решения (27) можно заключить, что w_1 имеет вид $w_1(s, \varphi) = w_1(s) \sin(n\varphi)$, в то время как w_0 имеет вид $w_0(s, \varphi) = w_0(s) \cos(n\varphi)$.

6. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим вариант жесткой заделки на обоих краях оболочки: $u = v = w = \gamma = 0$ [8]. В случае жесткой заделки расположим

начало координат в центре оболочки. В нулевом приближении граничное условие принимает вид $w_0 = w'_0 = 0$, $s = \pm \frac{L}{2R}$.

$$w_0 = \frac{\cos(ps)}{\cos(p/2)} - \frac{\operatorname{ch}(ps)}{\operatorname{ch}(p/2)}, \quad p \approx 4.73 \frac{R}{L}.$$

Решение w_0 удовлетворяет всем граничным условиям.

Найдем поправку в первом приближении w_1 . В первом приближении меняются граничные условия: $w_1 = 0$, $w'_1 = i \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{R}{n_0^3} w''_0$, $s = \pm \frac{L}{2R}$. Для того, чтобы уравнение (33) имело решение, необходимо, чтобы было выполнено условие совместности:

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(w_1^{(4)} - p^4 w_1 \right) w_{01} ds = \int_{s_0}^{s_1} (\alpha_1 \Lambda_1 w_0 + \alpha_2 i w'_0) w_{01} ds, \quad (35)$$

где w_{01} есть решение однородного уравнения

$$w_{01}^{(4)} - p^4 w_{01} = 0$$

с однородными граничными условиями.

Из условия (35) следует, что $\Lambda_1 = 0$. Таким образом, поправка к критической нагрузке имеет порядок μ^2 .

Решение w_1 принимает вид

$$w_1 = \frac{i\alpha_2 s}{4p^4} w''_0 + a_i w'_0 + b_i w'''_0, \quad (36)$$

где

$$a = \alpha_3 + \frac{\alpha_2 (-4 + p \operatorname{tg}(p/2) - p \operatorname{th}(p/2))}{16p^4},$$

$$b = \frac{\alpha_2}{4p^5 (\operatorname{tg}(p/2) - \operatorname{th}(p/2))}.$$

На вклейке на рис. 2 изображена форма потери устойчивости в нулевом и первом приближениях.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В задаче потери устойчивости оболочки при внешнем давлении для оболочки, изготовленной из анизотропного материала общего

вида, обнаружены следующие особенности, отличающие ее от изотропной оболочки. Форма потери устойчивости приобретает наклон по отношению к образующей. Исследована величина поправки к критической нагрузке, связанной с анизотропией. В случае жесткой заделки поправка имеет порядок квадрата малого параметра — относительной толщины оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Donnell L. H.* Beams, Plates and Shells. McGraw-Hill, Inc., 1976. 453 pp.
2. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 446 с.
3. *Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996. 280 с.
4. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Двухмерные модели пластин из анизотропного материала. // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. Вып. 3. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008. С. 4–16.
5. *Товстик П. Е.* Двухмерные модели пластин из анизотропного материала. // ДАН, 2009. Т. 425. № 4. С. 487–491.
6. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Задачи устойчивости цилиндрической оболочки из анизотропного материала. // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 2. С. 127–137.
7. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Одномерные модели балки из анизотропного материала в случае косой анизотропии. // МТТ. 2011. № 6. С. 93–103.
8. *Tovstik P. E., Smirnov A. L.* Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells. World Scientific. Serie A. Singapore; New Jersey; London; Hong Kong, 2002. 347 pp.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ

Н. В. НАУМОВА, Д. Н. ИВАНОВ, М. В. ЗАЙЦЕВА

Исследована задача о колебаниях тонкой упругой цилиндрической оболочки под влиянием давления, действующего со стороны внутреннего потока идеальной жидкости. Получены приближенные выражения для компонентов перемещений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной технике и промышленности широко используются различного типа трубопроводы, контейнеры, которые можно рассматривать как оболочки, заполненные жидкостью или газом. Проектирование такого рода конструкций должно удовлетворять особым требованиям, связанным с наличием как внешних, так и внутренних воздействий на оболочку. Проведенные расчеты позволяют оптимизировать не только форму оболочечных конструкций, но и свойства выбранных материалов. Несмотря на то, что основные идеи и принципы исследования деформации оболочек под действием внешнего (внутреннего) давления известны, остается малоизученным вопрос о влиянии потока жидкости на напряженно-деформированное состояние стенки оболочки и их совместное взаимодействие. Таким образом, разработка методов решения задач взаимодействия жидкой среды и упругих оболочек представляет собой научный и практический интерес.

Большинство авторов статей решают задачи гидроупругости приближенным численным методом конечных элементов. Можно

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 07-01-00250), а также при использовании ресурсов РЦ ВЦ СПбГУ.

Доклад на семинаре 15 октября 2013 г.

© Н.В. Наумова, Д.Н. Иванов, М.В. Зайцева, 2013

отметить здесь такие исследования, как [1, 2]. В работе [3] приведено точное решение линейной и нелинейной задач деформирования толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления. В работах [4, 5] создается математическая модель, описывающая взаимодействие жидкости и упругой оболочки, доказываются теоремы существования решения составленной системы дифференциальных уравнений, а также последующее численное интегрирование этой системы с применением метода Галёркина. Волновые процессы в вязкоупругих и нелинейно вязкоупругих оболочках, не взаимодействующих с вязкой жидкостью, рассмотрены в [6, 7].

В работе [8] исследуется распространение нелинейных продольных волн деформаций в цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость внутри оболочки. Получены уравнения динамики и приведены численные решения с помощью асимптотических методов с использованием базиса Гребнера для генерации разностной схемы при решении связанной задачи гидроупругости с соответствующими граничными условиями. Оболочка предполагается бесконечно длинной.

В медицине также находят применение теория оболочек и решение связанных задач гидроупругости взаимодействия двух сред (жидкой и упругой). В последние годы быстро развивается один из относительно новых и важных разделов механики — механика биологических объектов, в частности механика сердечно-сосудистой системы человека, изучающая взаимодействие крови и сосудов. Так, например, в книге [9] дается достаточно обширный обзор статей, посвященных гидроупругому деформированию кровеносных сосудов, а также отмечается, что данная задача не поддается аналитическому решению в общем виде. Известно лишь несколько классических решений задач гидродинамики в упрощенной постановке. Авторы книги предлагают математические модели артерий и доказывают, что влияние ряда физических и геометрических характеристик стенок артерии (начального продольного натяжения, степени коничности, локальных стенозов и др.) на механические и гидродинамические параметры кровеносной системы может быть существенным.

В настоящей статье исследована задача о деформации тонкой упругой цилиндрической оболочки под влиянием внутреннего нор-

мального давления, действующего со стороны потока жидкости. При движении жидкости в упругой трубе происходит силовое взаимодействие жидкости и упругой среды. Упругая среда — тонкая упругая цилиндрическая оболочка кругового сечения постоянной толщины. Получены приближенные выражения для компонентов перемещений. При решении задач применено сочетание аналитических и численных методов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается горизонтально расположенная круговая цилиндрическая оболочка, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость [10]. Направление потока и цилиндрическая оболочка показаны на рис. 1. Далее под оболочкой понимается ее срединная поверхность.

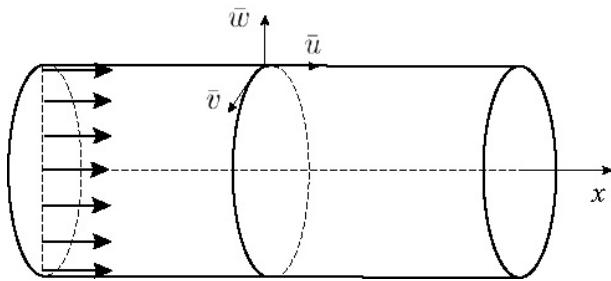


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка и направление потока жидкости.

Введем цилиндрическую систему координат (r, ϑ, x) , такую что ось x идет вдоль оси трубы, (r, ϑ) — полярный радиус и угол в сечении, перпендикулярном оси трубы, соответственно. Длина оболочки L , радиус оболочки R . В дальнейшем изложении также участвует декартовая система координат $Oxyz$, начало которой совпадает с началом цилиндрической системы координат, ось Ox декартовой системы координат совпадает с осью Ox цилиндрической системы координат.

Перемещение точки срединной поверхности оболочки характере-

ризуется вектором перемещений (u, w) , здесь $u = u(x, t)$ — тангенциальное перемещение, $w = w(x, t)$ — перемещение по нормали к срединной поверхности (прогиб оболочки).

Обозначим область, занятую жидкостью, как

$$\{\Omega(r, \vartheta, x) : r \in [0, R + w(x, t)], \quad \vartheta \in (-\pi, \pi), \quad x \in [0, L]\}.$$

Границу области Ω представим в виде трех поверхностей:

Γ_{in} — сечение, перпендикулярное оси цилиндра, $x = 0$,

Γ — срединная поверхность оболочки,

Γ_{out} — выходное сечение, перпендикулярное оси цилиндра, $x = L$. Запишем скорость частицы жидкости в виде

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + v_x \mathbf{e}_x.$$

Примем, что на границе Γ выполняется кинематическое условие непротекания. Получим его следующим образом. Возьмем полную производную по времени от выражения для срединной поверхности оболочки в виде

$$F(r, x, t) = r - w(x, t) = \text{const},$$

т.е.

$$\frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{или} \quad v_r - v_x \frac{\partial w}{\partial x} - \dot{w} = 0 \quad \text{при} \quad r = R + w.$$

В линейной постановке это выражение может быть записано в виде

$$\dot{w} = v_r \quad \text{при} \quad r = R. \quad (1)$$

Далее примем дополнительное ограничение для продольной составляющей скорости жидкости

$$v_x = 0 \quad \text{при} \quad r = R$$

и условие симметрии потока относительно оси цилиндра

$$v_r = 0 \quad \text{при} \quad r = 0.$$

Оболочка зажата по краям, так что выполняются условия

$$\begin{aligned} u(x = 0, t) &= 0, & u(x = L, t) &= 0, \\ w(x = 0, t) &= 0, & w(x = L, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

3. О ВЫЧИСЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Система уравнений вязкой несжимаемой жидкости в векторной форме имеет вид, например, как в работе [11]:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} \frac{p}{\rho} + \operatorname{grad} U + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

где p и ρ — давление и плотность жидкости соответственно, U — потенциал внешней силы, ν — коэффициент кинематической вязкости. Вектор ускорения частицы жидкости можно представить следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (4)$$

Для малых движений второе нелинейное слагаемое в формуле (4) гораздо меньше первого слагаемого. В дальнейшем нелинейные члены в уравнении (3) рассматривать не будем. Тем самым уравнения малых движений несжимаемой вязкой жидкости в случае отсутствия внешних сил ($U = 0$) запишем как в работе [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Если мы предположим, что v_x, v_y, v_z изменяются со временем по

закону $e^{\alpha t}$, то уравнения (5) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} (\Delta + h^2) v_x &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ (\Delta + h^2) v_y &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ (\Delta + h^2) v_z &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad h^2 = -\alpha/\nu. \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнений (6), (7) получаем

$$\Delta p = 0. \quad (8)$$

Аналогично можно показать, что если скорости периодически зависят от времени, например

$$\begin{aligned} v_x &= \sin(\alpha t) f_{vx}(x, y, z), \\ v_y &= \sin(\alpha t) f_{vy}(x, y, z), \\ v_z &= \sin(\alpha t) f_{vz}(x, y, z), \end{aligned} \quad (9)$$

то давление также будет удовлетворять уравнению Лапласа.

Запишем условия входного и выходного потоков:

$$\begin{aligned} p(r, \vartheta, x, t) \Big|_{x=0} &= p_0 + A_{in} \cdot \sin(\omega t), \\ p(r, \vartheta, x, t) \Big|_{x=L} &= p_0 + A_{out} \cdot \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (10)$$

где ω — заданная частота (частота пульса).

Представив p в виде

$$p = p(r, \vartheta, x, t) = \tilde{p}(r, \vartheta, x, t) + f_t(t) f_x(x).$$

Подставив это выражение в оператор Лапласа, имеем

$$\Delta p = \Delta \tilde{p} + f_t(t) \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} = 0.$$

Равенство удовлетворяется, если положить

$$\Delta \tilde{p} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} = 0,$$

откуда получаем

$$f_x(x) = c_{1f} + c_{2f}x.$$

Границные условия (10) удовлетворяются, если положить

$$\tilde{p}(r, \vartheta, x = 0, t) = 0, \quad \tilde{p}(r, \vartheta, x = L, t) = 0, \quad (11)$$

$$f_t(t) = \sin(\omega t), \quad f_x(x) = A_{in} + \left(\frac{A_{out} - A_{in}}{L} \right) x.$$

В дальнейших расчетах было взято выражение для давления

$$p = p(x, t) = p_0 + (p_1 + p_2 \cdot x) \sin \omega t, \quad p_0, p_1, p_2 = \text{const}, \quad (12)$$

удовлетворяющее заданным граничным условиям и уравнению Лапласа.

4. УРАВНЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Исследуем задачу о колебаниях тонкой упругой цилиндрической оболочки, вызываемых действием внутреннего нормального давления, действующего со стороны потока жидкости.

Введем безразмерную координату $x = \bar{x}/\bar{R}$, где \bar{x} — координата точки поверхности вдоль образующей цилиндра, \bar{R} — некоторый характерный размер, в качестве которого взят радиус цилиндрической оболочки. Систему уравнений малых вынужденных осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки ([12, 13]) запишем в безразмерном виде

$$\frac{dT_1}{dx} - \lambda \frac{d^2u}{dt^2} = 0, \quad (13)$$

$$T_2 - \frac{dN_1}{dx} + \lambda \frac{d^2w}{dt^2} = p, \quad (14)$$

$$\frac{dM_1}{dx} - N_1 = 0. \quad (15)$$

Тангенциальные усилия T_1 и T_2 связаны с компонентами деформации ε_1 , ε_2 соотношениями

$$T_1 = \tilde{E} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad T_2 = \tilde{E} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad (16)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{du}{dx}$, $\varepsilon_2 = w$. Считаем, что материал оболочки является линейно вязким и модуль Юнга $E = \bar{E}_0 \cdot \tilde{E}$, причем

$$\tilde{E} = 1 + \frac{\gamma}{|\omega|} \frac{d}{dt}, \quad \gamma = \text{const}, \quad \bar{E}_0 - \text{размерный коэффициент.}$$

Момент M_1 связан с углом деформации ϑ_1 соотношением

$$M_1 = \mu^4 \tilde{E} \frac{d\vartheta_1}{dx}, \quad \text{где } \vartheta_1 = -\frac{dw}{dx}. \quad (17)$$

Безразмерные величины связаны с размерными следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \{T_i, N_1\} &= \frac{1 - \nu^2}{\bar{E}_0 \bar{h} \bar{R}} \{\bar{T}_i, \bar{N}_1\}, \quad M_1 = \frac{1 - \nu^2}{\bar{E}_0 \bar{h} \bar{R}^2} \bar{M}_1, \\ \{h, l, u, w\} &= \frac{1}{\bar{R}} \{\bar{h}, \bar{l}, \bar{u}, \bar{w}\}, \quad i = 1, 2, \\ \{p\} &= \frac{1 - \nu^2}{\bar{E}_0 \bar{h}} \{\bar{p}\}, \quad \lambda = \frac{(1 - \nu^2) \varrho \bar{R}^2}{\bar{E}_0}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12} \ll 1. \end{aligned}$$

Здесь \bar{T}_i , \bar{N}_1 — усилия, \bar{M}_1 — момент, \bar{u} и \bar{w} — проекции перемещений точек срединной поверхности оболочки на направления образующей линии и внешней нормали, \bar{h} — толщина цилиндрической оболочки, μ — малый параметр, p — нормальная компонента поверхностной нагрузки, ν — коэффициент Пуассона, ω — частота вынужденных колебаний.

Рассмотрим идеальную несжимаемую жидкость, такую что давление, действующее на внутреннюю поверхность оболочки, изменяется по закону (12). Границные условия (2) жесткой заделки краев оболочки перепишем для удобства численного интегрирования систем уравнений:

$$u(0) = u(l) = w(0) = w(l) = \frac{dw(0)}{dx} = \frac{dw(l)}{dx} = 0. \quad (18)$$

Система (13) — (17) может быть записана через перемещения точек срединной поверхности u и w :

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\gamma}{\omega} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\omega} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + \mu^4 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{\omega} \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) + \\ + w + \nu \frac{\partial u}{\partial x} = p_0 + (p_1 + p_2 x) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (20)$$

Систему дифференциальных уравнений (19), (20) представим в операторном виде

$$L \mathbf{Y} = \mathbf{P}, \quad (21)$$

где $\mathbf{Y} = (u, w)^T$, $\mathbf{P} = (0, p_0 + (p_1 + p_2 \cdot x) \sin \omega t)^T$, а компоненты дифференциального оператора L имеют вид

$$\begin{aligned} L_{11} &= \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\omega} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}, \quad L_{12} = -\nu \left(\frac{\gamma}{\omega} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ L_{21} &= -L_{12}, \quad L_{22} = \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} + \mu^4 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{\omega} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} \right) + 1. \end{aligned}$$

Учитывая равенство $\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$, будем искать решение системы (21) в следующем виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0(x) + \mathbf{Y}_1(x) \cdot e^{i\omega t} + \bar{\mathbf{Y}}_1(x) \cdot e^{-i\omega t}, \quad (22)$$

где $\bar{\mathbf{Y}}_1(x)$ — комплексно сопряженный вектор к $\mathbf{Y}_1(x)$. Подставив (22) в (21), получим следующее:

$$L_0 \mathbf{Y}_0 + L_1 \mathbf{Y}_1 \cdot e^{i\omega t} + \bar{L}_1 \bar{\mathbf{Y}}_1 \cdot e^{-i\omega t} = \mathbf{P}. \quad (23)$$

Компоненты дифференциальных операторов L_0 и L_1 имеют вид

$$\begin{aligned} L_0 : \quad L_{11}^0 &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_{12}^0 = -\nu \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{21}^0 &= \nu \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{22}^0 = \mu^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1; \\ L_1 : \quad L_{11}^1 &= -\lambda \omega^2 - (1 + \gamma i) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_{21}^1 = -L_{12}^1 = \nu(1 + \gamma i) \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{22}^1 &= (1 + \gamma i - \lambda \omega^2) + \mu^4 (1 + \gamma i) \frac{\partial^4}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

Для того чтобы решить систему (23), можно последовательно найти решение

$$L_0 \mathbf{Y}_0 = \mathbf{P}_0, \quad (24)$$

$$L_1 \cdot \mathbf{Y}_1 \cdot e^{i\omega t} = \mathbf{P}_1. \quad (25)$$

где $\mathbf{P}_0 = (0, p_0)^T$, $\mathbf{P}_1 = (0, (p_1 + p_2 \cdot x) \cdot e^{i\omega t})^T$. Общее решение систем (24) и (25) можно представить в виде суммы решений соответствующих однородных систем и частных решений:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_0^{\text{одн}} + \mathbf{Y}_0^{\text{частн}}, \quad (26)$$

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_1^{\text{одн}} + \mathbf{Y}_1^{\text{частн}}. \quad (27)$$

5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (24)

Будем искать решение в виде $\mathbf{Y}(x) = \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \exp(r \cdot x)$. Подставив его в однородную систему (24) при $\mathbf{P}_0 = 0$ и сократив на $\exp(r \cdot x)$, определитель получившейся системы приравниваем нулю:

$$r^6 \mu^4 + r^2 (1 - \nu^2) = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$r_k = \frac{\pm(1 \pm i)}{\sqrt{2}\mu} (1 - \nu^2)^{1/4}, \quad k = 1 \dots 4, \quad r_5 = r_6 = 0.$$

Если подставить общее решение системы (24) в граничные условия (18), то для определения произвольных постоянных получится следующая система уравнений:

$$Z_0 = A_0 \cdot S_0, \quad (28)$$

где $Z_0 = -(0, 0, p_0, p_0, 0, 0)^T$, S_0 — вектор произвольных постоянных, а матрица A_0 имеет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \nu & \nu & \nu & \nu \\ -l & 1 & \nu t_1 & \nu t_2 & \nu t_3 & \nu t_4 \\ \nu & 0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_4 \\ \nu & 0 & -r_1 t_1 & -r_2 t_2 & -r_3 t_3 & -r_4 t_4 \\ 0 & 0 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 0 & 0 & r_1^2 t_1 & r_2^2 t_2 & r_3^2 t_3 & r_4^2 t_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь $t_k = e^{rk l}$, $k = 1 \dots 4$. В результате получим решение однородной системы (24) при $\mathbf{P}_0 = 0$: $\mathbf{Y}_0^{\text{одн}} = (u_0^0, w_0^0)^T$, где функции u_0^0 и w_0^0 имеют вид

$$\begin{aligned} u_0^0 &= \frac{p_0 \nu}{\beta_0} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) \cdot (1 - e^{-l\beta_0} \cos(l\beta_0)) - \\ &\quad - \frac{p_0 \nu}{\beta_0} \left(e^{-(l-x)\beta_0} \cos((l-x)\beta_0) - e^{-x\beta_0} \cos(x\beta_0) \right); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} w_0^0 &= -p_0 \cdot \left(e^{(l-x)\beta_0} [\sin((l-x)\beta_0) + \cos((l-x)\beta_0)] + \right. \\ &\quad \left. + e^{-x\beta_0} [\sin(x\beta_0) + \cos(x\beta_0)] \right), \quad \beta_0 = \frac{(1-\nu^2)^{1/4}}{\sqrt{2}\mu}. \end{aligned} \quad (30)$$

Теперь находим решение $\mathbf{Y}_0^{\text{частн}}$. В данном случае оно имеет вид

$$\mathbf{Y}_0^{\text{частн}} = (u_0^p, w_0^p)^T, \quad \text{где } u_0^p = 0, \quad w_0^p = p_0. \quad (31)$$

6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (25)

Аналогично процедуре, описанной при решении системы (24), сначала определяются корни характеристического уравнения. В этой задаче оно имеет следующий вид:

$$\mu^4 T^2 \beta^6 - i\mu^4 T \lambda \omega^2 \beta^4 - T(-iK + T\nu^2) \beta^2 + \lambda \omega^2 K = 0. \quad (32)$$

Решаем уравнение (32) с помощью диаграммы Ньютона. В результате получим

$$\beta_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\lambda \omega^2 K}{T(-iK + T\nu^2)}}, \quad \beta_{3,4} = \frac{\pm T(-iK + T\nu^2)^{\frac{1}{4}}}{\mu T}, \quad \beta_{5,6} = i\beta_{3,4},$$

где $K = 1 + i\gamma + \lambda \omega^2$, $T = -i + \gamma$. Для определения произвольных постоянных получается следующая система уравнений:

$$Z_1 = A_1 \cdot S_1, \quad (33)$$

где вектор $Z_1 = -\left(\frac{T p_2}{2\rho\omega^2 K}, \frac{T p_2}{2\rho\omega^2 K}, \frac{i(p_1+p_2 l)}{2K}, \frac{ip_1}{2K}, 0, 0\right)^T$, S_1 — вектор

произвольных постоянных, а матрица A_1 имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} K & K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Ke^{\beta_1 l} & Ke^{\beta_2 l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\nu\beta_1 T & i\nu\beta_2 T & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ i\nu\beta_1 T e^{\beta_1 l} & i\nu\beta_2 T e^{\beta_2 l} & \beta_3 e^{\beta_3 l} & \beta_4 e^{i\beta_4 l} & \beta_5 e^{\beta_5 l} & \beta_6 e^{\beta_6 l} \\ 0 & 0 & \beta_3^2 & \beta_4^2 & \beta_5^2 & \beta_6^2 \\ 0 & 0 & \beta_3^2 e^{\beta_3 l} & \beta_4^2 e^{\beta_4 l} & \beta_5^2 e^{\beta_5 l} & \beta_6^2 e^{\beta_6 l} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение однородной системы (25) имеет вид $\mathbf{Y}_1^{\text{одн}} = (u_1^0, w_1^0)^T$, а функции u_1^0 и w_1^0 таковы:

$$u_1^0 = -\frac{p_2 T}{2K\lambda\omega^2} \frac{e^{\beta_1 x} + e^{\beta_1(l-x)}}{1 + e^{l\beta_1}}; \quad (34)$$

$$w_1^0 = \frac{1+i}{2} \left(w_1 e^{\beta_3 x} + w_3 e^{\beta_3(l-x)} \right) + \frac{1-i}{2} \left(w_1 e^{-i\beta_3 x} + w_3 e^{-i\beta_3(x-l)} \right); \quad (35)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{ip_1}{2K} - \frac{i(e^{\beta_1 l} - 1)\beta_3 p_2 T^2}{(e^{\beta_1 l} + 1)\lambda\omega^2 K^2}, \\ w_3 &= -\frac{i(p_1 + lp_2)}{2K} + \frac{i(e^{\beta_1 l} - 1)\beta_3 p_2 T^2}{2(e^{\beta_1 l} + 1)\lambda\omega^2 K^2}. \end{aligned}$$

Теперь находим решение $\mathbf{Y}_1^{\text{частн}}$. В данном случае оно имеет вид

$$\mathbf{Y}_1^{\text{частн}} = (u_1^p, w_1^p)^T, \quad \text{где } u_1^p = \frac{p_2 T}{2\lambda\omega^2 K}, \quad w_1^p = \frac{p_1 + xp_2}{2K} \cdot i. \quad (36)$$

Процедура определения значений векторов неизвестных постоянных S_0 , S_1 и построение графиков функций $u(x, t)$ и $w(x, t)$ осуществлялась в пакете прикладных программ Mathematica 9. Формулы для определения функций u и w в явном виде не выписаны ввиду их громоздкости. Приведем их общий вид, а также номера формул для нахождения функции $u(x, t)$ ((29), (31), (34), (36)) и функции $w(x, t)$ ((30), (31), (35), (36)):

$$u(x, t) = u_0^0 + u_0^p + (u_1^0 + u_1^p) \cdot e^{i\omega t} + (\bar{u}_1^0 + \bar{u}_1^p) \cdot e^{-i\omega t}, \quad (37)$$

$$w(x, t) = w_0^0 + w_0^p + (w_1^0 + w_1^p) \cdot e^{i\omega t} + (\bar{w}_1^0 + \bar{w}_1^p) \cdot e^{-i\omega t}. \quad (38)$$

7. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

В качестве примера была рассмотрена цилиндрическая оболочка радиуса $\bar{R} = 1$ м, длины $\bar{l} = 5$ м, толщиной $\bar{h} = 0.1$ м. Свойства материала оболочки: коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, модуль Юнга $E_0 = 2.07 \cdot 10^7$ Н/м², плотность материала $\varrho = 7800$ кг/м³, коэффициент линейной вязкости $\gamma = 0.01$. Давление, действующее на внутреннюю поверхность оболочки, изменяется по следующему закону:

$$p = p(x, t) = p_0 + (p_1 + p_2 \cdot x) \sin \omega t, \quad \omega = 1, \quad p_0 = p_1 = p_2 = 0.01.$$

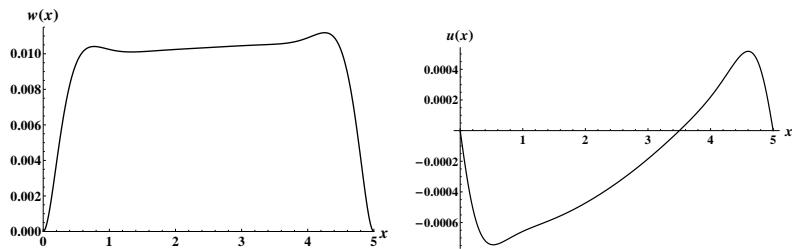
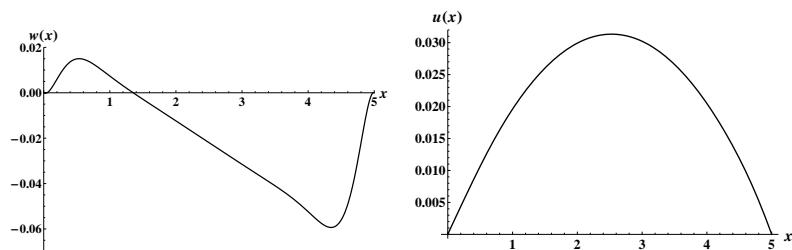
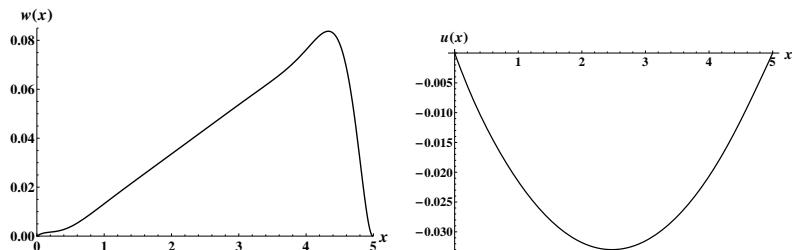
На рис. 2, 3, 4 представлены графики функций $w(x, t)$ и $u(x, t)$ в момент времени $t = 0$ с, $t = 2$ с, $t = 5$ с соответственно.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Стоит отметить, что данная задача механики, рассмотренная в настоящей работе, является приближенной моделью, описывающей вынужденные колебания тех оболочек, которые используются в газопроводах.

Была исследована задача о деформации тонкой упругой цилиндрической оболочки под влиянием внутреннего нормального давления, действующего со стороны потока жидкости. Получены приближенные выражения для компонентов перемещений. Построены графики функций прогиба оболочки и тангенциального перемещения в зависимости от времени. Получены графики реальной и минимальных частей перемещений точек срединной поверхности. Также приведено сравнение аналитических и численных результатов.

Полученные аналитические формулы позволяют рассчитать и оценить с помощью построенных графиков величину деформаций оболочки. Численные результаты, проведенные методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS WORKBENCH 13, дополняют аналитические результаты и позволяют увидеть в анимационном режиме весь процесс колебаний.

Рис. 2. Графики функций $w(x, t)$ (слева) и $u(x, t)$ (справа) при $t = 0$ с.Рис. 3. Графики функций $w(x, t)$ (слева) и $u(x, t)$ (справа) при $t = 2$ с.Рис. 4. Графики функций $w(x, t)$ (слева) и $u(x, t)$ (справа) при $t = 5$ с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киричевский В. В.* Метод конечных элементов в механике эластомеров. Киев: Наукова Думка, 2002. 655 с.
2. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
3. *Мисюра Е. Ю.* Численное решение геометрически нелинейной задачи для толстостенного цилиндра, выполненного из материала Джона // Вестник НТУ "ХПИ". Динамика и прочность машин. 2004. № 19. С. 141–148.
4. *Muha B., Canic S.* Existence of a weak solution to a nonlinear fluid-structure interaction problem modeling the flow of an incompressible, viscous fluid in a cylinder with deformable walls // Arch. Rational Mech. Anal. 2013. Vol. 207. P. 919–968.
5. *Guidorzi M., Padula M., Plotnikov P. I.* HOPF solutions to a fluid-elastic interaction model // Math. Models Methods Appl. Sci. 2008. N 18. P. 215–225.
6. *Аршинов Г.А., Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // РАН. Акустический журнал. 2000. Т. 46. № 1. С. 116–117.
7. *Аршинов Г.А., Могилевич Л.И.* Статические и динамические задачи вязкоупругости. Саратов: Сарат. гос. агр. ун-т, 2000. 152 с.
8. *Блинкова А.Ю.* Моделирование нелинейных волн деформаций в физически линейных вязкоупругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Саратов: Вестник СГТУ. 2012. № 4 (68). С. 7–15.
9. *Кантор Б.Я., Кунделев А.Ю., Мисюра Е. Ю.* Биомеханика гиперупругих тел вращения. Харьков, 2006. 191 с.
10. *Кочин Н.Е., Кубель И.А., Розе Н.Е.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М., 1963. 728 с.
11. *Ландау Л.Д., Либшиц Е.М.* Гидродинамика. Т. 4. М., 1988. 736 с.
12. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., 1979. 384 с.
13. *Филиппов С.Б.* Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб., 1999. 196 с.

**НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ
ОБОЛОЧЕК В ЗАДАЧАХ О ДЕФОРМАЦИИ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ
СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЕВ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ**

П. В. ТРОФИМЕНКО

Рассматривается задача о деформации тонкой упругой сферической оболочки, состоящей из двух трансверсально-изотропных слоев, под действием внутреннего и внешнего давления. Решение задачи построено с помощью неклассических теорий оболочек Палия-Спиро и Родионовой-Титаевой-Черных. Получены зависимости для перемещений, радиальных и тангенциальных напряжений внутренней и внешней оболочек глаза. Проведено сравнение результатов с точным решением трехмерной теории упругости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для построения более точных моделей глаза важно учитывать особенности его сложной структуры, многие элементы которой с точки зрения механики являются многослойными оболочками. Слои некоторых оболочек под действием внутреннего давления могут смещаться относительно друг друга. Внешняя оболочка глаза состоит из нескольких слоев, которые отличаются как по толщине, так и по своим биомеханическим свойствам. Данные особенности биологических тканей заметно влияют на общую деформацию оболочек глаза.

Склеральная оболочка глаза близка по своей структуре к трансверсально-изотропной ткани: характеризуются более низким модулем упругости в направлении своей толщины (в радиальном направлении), чем в продольном и поперечном [1, 2]. Как показали исследования, модуль Юнга склеры в радиальном направлении в

Доклад на семинаре 12 ноября 2013 г.
© П. В. Трофименко, 2014

среднем 0,5 МПа, тогда как в продольном и поперечном направлениях этот показатель меняется в пределах 3–40 МПа. Модуль Юнга хориоиды в радиальном направлении составляет 193,1 КПа, в продольном и поперечном — 477,2 КПа [1]. Особенность сосудистой оболочки заключается в том, что она относится к «активным» структурам глаза [3]: изменяя свой объем и жесткость в зависимости от кровенаполнения, она способна изменять свои механические свойства в течение суток. Сетчатка является непрочной тканью толщиной 250 мк, которая характеризуется относительно низким модулем Юнга — 20 КПа [1].

2. ДЕФОРМАЦИИ ДВУХСЛОЙНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

2.1. Постановка задачи

Предполагается, что внешний слой оболочки является более жестким и отвечает биомеханическим характеристикам склеры, а внутренний слой — более мягким и отвечает биомеханическим свойствам хориоиды. Пусть p_1, p_3 — величины внутреннего и внешнего давления, p_2 — давление, действующие в зоне контакта слоев (рис. 1). Введем обозначения: r_1, r_3 — внутренний и внешний радиусы оболочки, r_2 — радиус зоны контакта ее слоев ($r_1 < r_2 < r_3$).

Из соображений симметрии положим, что в сферической системе координат (ρ, ϕ, θ) справедливы равенства [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^i &= \sigma_{33}^i(\rho), \quad \sigma_{11}^i = \sigma_{22}^i, \\ \sigma_{12}^i &= \sigma_{13}^i = \sigma_{23}^i = 0, \\ u_1^i &= u_2^i = 0, \quad u_3^i = u_3^i(\rho), \end{aligned} \tag{1}$$

где $i = 1$ соответствует внутреннему слою, а $i = 2$ — внешнему. Предполагая, что имеет место жесткий контакт, запишем условия сопряжения оболочек при $\rho = r_2$:

$$\sigma_{33}^1 = \sigma_{33}^2, \quad u_3^1 = u_3^2. \tag{2}$$

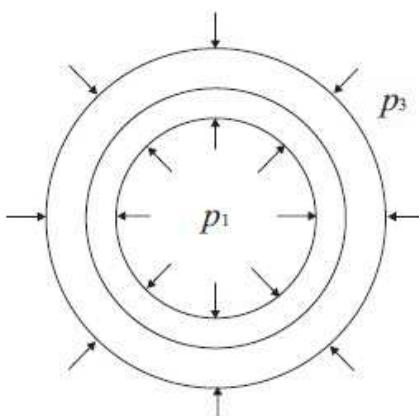


Рис. 1. Модель оболочки.

2.2. Деформации двухслойной трансверсально-изотропной сферической оболочки по теории Палия–Спиро

Известно, что классическая теория оболочек приводит в исходных уравнениях к погрешности h/R по сравнению с единицей (см.: [4]), а биологические оболочки иногда обладают достаточно большим отношением толщины к радиусу и, кроме того, часто имеют большую податливость на межслоевой сдвиг, поэтому исследование напряженно-деформированного состояния таких оболочек требует введения более строгих гипотез, чем гипотезы Кирхгофа–Лява. На основе теории анизотропных оболочек средней толщины Палия–Спиро рассматривается задача о деформации сферической оболочки, состоящей из двух трансверсально-изотропных слоев. Сравнение решения, полученного в рамках трехмерной теории упругости, с решениями на основе теории анизотропных оболочек позволяет оценить, насколько точно теории анизотропных оболочек могут описывать решение задачи и применимы, например, для оболочек эллипсоидальной формы (глаза с миопией и гиперметропией).

Теория оболочек средней толщины, изложенная в работе [7], основана на широко используемой кинематической гипотезе Тимошенко–Рейснера. Кроме этого, в теории Палия–Спиро предполагается, что:

- прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее срединной поверхности до деформации, остаются после деформации также прямолинейными;
- косинус угла наклона таких волокон к срединной поверхности деформированной оболочки равен осредненному углу поперечного сдвига.

Для сферической анизотропной оболочки радиуса R_i и толщины h_i , находящейся под действием нормальной нагрузки, эти гипотезы позволяют принять для нормального перемещения следующий вид:

$$u_3^i = w_i + F_i(\xi), -\frac{h_i}{2} \leq \xi \leq \frac{h_i}{2}, \quad (3)$$

где w_i — перемещение срединной поверхности, $F_i(\xi)$ — искомая функция, такая что $F_i(0) = 0$.

Для трансверсально-изотропной сферической оболочки усилия и деформации срединной поверхности связаны соотношениями (см.: [7]):

$$T_1^i = T_2^i = \frac{E_1^i h_i}{1 - \nu_i^2} (\varepsilon_1^i + \nu_i \varepsilon_2^i) - \nu_i^* \frac{h_i}{2} (p_1^i + p_2^i), \varepsilon_1^i = \varepsilon_2^i = \frac{w_i}{R_i}, \quad (4)$$

где p_1^i соответствует внутреннему давлению на i -ую оболочку, а p_2^i — внешнему; $\nu_i^* = \frac{E_1^i \nu'_i}{E_3^i (1 - \nu_i)}$; E_1^i и E_3^i — соответственно модули Юнга при растяжении-скатии в поверхности изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней; ν_i и ν'_i — коэффициенты Пуассона.

Упругие коэффициенты трансверсально-изотропного тела удовлетворяют системе неравенств:

$$|\nu'_i| < \left(\frac{E_3^i}{E_1^i} \right)^{\frac{1}{2}}, -1 < \nu_i < 1 - 2(\nu'_i)^2 \frac{E_1^i}{E_3^i}, E_1^i > 0, E_3^i > 0 \quad (5)$$

Следуя работе [7], для нормального напряжения σ_{33}^i и искомой

функции $F(\xi)$ имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^i &= \left(1 - 2\frac{\xi}{R_i}\right) \left(\frac{m_3^i}{h_i} + q_3^i \frac{\xi}{h_i}\right), \\ F_i(\xi) &= \int_0^\xi \frac{\sigma_{33}^i}{E_1^i} d\xi - 2\nu_i^* \varepsilon_1^i \xi \left(1 - \frac{\xi}{2R_i}\right), \\ q_3^i &= p_1^i \left(1 - \frac{h_i}{2R_i}\right)^2 - p_2^i \left(1 + \frac{h_i}{2R_i}\right)^2, \\ m_3^i &= -\frac{h_i}{2} \left(p_1^i \left(1 - \frac{h_i}{2R_i}\right)^2 + p_2^i \left(1 + \frac{h_i}{2R_i}\right)^2\right).\end{aligned}\tag{6}$$

Тангенциальные напряжения σ_{11}^i и σ_{22}^i могут быть получены из закона упругости:

$$\sigma_{11}^i = \sigma_{22}^i = \frac{E_1^i}{1 - \nu_i} \epsilon_{11}^i + \nu_1^* \sigma_{33}^i,\tag{7}$$

где деформация произвольного волокна оболочки ϵ_{11}^i определяется соотношением:

$$\epsilon_{11}^i = \epsilon_{22}^i = \varepsilon_1^i \left(1 - \frac{\xi}{R_i}(1 + 2\nu_i^*)\right).\tag{8}$$

Из уравнений равновесия элемента сферической оболочки можно получить:

$$T_1^i = T_2^i = \frac{R_i}{2} \left(p_1^i - p_2^i - \frac{h_i}{R_i} (p_1^i + p_2^i)\right).\tag{9}$$

Перемещение w срединной поверхности сферы определяется из уравнения (9) с учетом (4) и (6):

$$w_i = \frac{1 - \nu_i}{2E_1^i} \frac{R_i^2}{h_i} (p_1^i - p_2^i) \left(1 - \frac{h_i}{R_i} \frac{p_1^i + p_2^i}{p_1^i - p_2^i} (1 - \nu_i^*)\right),\tag{10}$$

где $p_2 = p_1^2 = p_2^1$ — неизвестное усилие взаимодействия между оболочками. Оно определяется из условия сопряжения оболочек по перемещениям (2) и формулы (10) следующим образом:

$$p_2 = \frac{a_1 p_1 (1 + \alpha_1 (\nu_1^* - 1)) + a_2 p_3 (1 - \alpha_2 (\nu_2^* - 1))}{a_1 (1 - \alpha_1 (\nu_1^* - 1)) + a_2 (1 + \alpha_2 (\nu_2^* - 1))},\tag{11}$$

где

$$a_i = \frac{1 - \nu_i}{2E_1^i} \frac{R_i^2}{h_i}, \quad \alpha_i = \frac{h_i}{R_i}.$$

2.3. Деформации двухслойной трансверсально-изотропной сферической оболочки по теории Родионовой–Титяева–Черныха

Согласно гипотезам уточненной итерационной теории [8], нормальная составляющая вектора перемещения распределена по толщине оболочки по закону полинома второй степени, а нормальное напряжение — по закону кубической параболы:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \sigma_{33}^{(0)} P_0(\xi) + \sigma_{33}^{(1)} P_1(\xi) + \sigma_{33}^{(2)} P_2(\xi) + \sigma_{33}^{(3)} P_3(\xi), \\ u_3 &= w^* P_0(\xi) + \gamma_3^* P_1(\xi) + \theta_3^* P_2(\xi), \end{aligned} \quad (12)$$

где P_i — полиномы Лежандра:

$$P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \frac{2\xi}{h}, \quad P_2(\xi) = \frac{6\xi^2}{h^2} - \frac{1}{2}, \quad P_3(\xi) = \frac{20\xi^3}{h^3} - \frac{3\xi}{h}. \quad (13)$$

Следуя работе [8], выпишем соотношения, связывающие компоненты перемещений и деформаций, и выражения для усилий, возникающих при деформации сферической оболочки:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \frac{w}{R}, \quad \gamma_3 = \frac{T_0}{2E_*} - \nu^* \frac{h}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \\ \varkappa_1 &= \varkappa_2 = \frac{\gamma_3}{R}, \quad \theta_3 = \frac{M_0}{hE^*} - \nu^* \frac{h}{6} (\varkappa_1 + \varkappa_2), \\ T_1 &= T_2 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) + \nu^* T_0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{h^2}{10} \hat{q}_3, \quad \hat{q}_3 = p_1 \left(1 - \frac{h}{2R}\right)^2 - p_2 \left(1 + \frac{h}{2R}\right)^2, \\ T_0 &= \hat{m}_3 = -\frac{h}{2} \left[p_1 \left(1 - \frac{h}{2R}\right)^2 + p_2 \left(1 + \frac{h}{2R}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Из уравнения равновесия элемента сферы получаем:

$$T_1 = T_2 = \frac{R}{2} \hat{q}_3. \quad (16)$$

Из уравнений для усилий (14) и (16) найдем:

$$w = \left(\frac{R}{2} \hat{q}_3 - \nu^* T_0 \right) \frac{(1-\nu)R}{Eh}. \quad (17)$$

Напряжения, как и раньше, можно найти из закона упругости с учетом принятых в рассматриваемой теории выражений для нормального напряжения и деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{T_0}{h} P_0(\xi) + \frac{6M_0}{h^2} P_1(\xi) + \frac{m_3 - T_0}{h} P_2(\xi) + \left(\frac{q_3}{2} - \frac{6M_0}{h^2} \right) P_3(\xi), \\ \sigma_{11} = \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu} \epsilon_{11} + \nu^* \sigma_{33}, \\ \epsilon_{11} &= \frac{w^*}{R} P_0(z) + \frac{\gamma_3^*}{R} P_1(z) + \frac{\theta_3^*}{R} P_2(z). \end{aligned} \quad (18)$$

Приравняем вектора перемещения (12) в зоне контакта слоев и найдем неизвестное давление:

$$p_2 = \frac{p_1 a_1 (R_1 + \nu_1^* h_1) + p_3 b_2 c (R_2 - \nu_2^* h_2)}{b_1 (R_1 - \nu_1^* h_1) + a_2 c (R_2 + \nu_2^* h_2)}, \quad (19)$$

где

$$a_i = 1 - \frac{h_i}{2R_i}, \quad b_i = 1 + \frac{h_i}{2R_i}, \quad c = \frac{(1-\nu_2)R_2}{E_1^2 h_2} \frac{E_1^1 h_1}{(1-\nu_1)R_1}. \quad (20)$$

2.4. Деформации двухслойной трансверсально-изотропной сферической оболочки по трехмерной теории

Уравнения равновесия для сферического слоя под действием нормального давления в трехмерной теории упругости сводятся к одному уравнению:

$$\frac{d\sigma_{33}^i}{d\rho} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{33}^i - \sigma_{11}^i - \sigma_{22}^i) = 0. \quad (21)$$

Компоненты тензора деформаций связаны с перемещениями точек сферической оболочки соотношениями

$$\epsilon_{11}^i = \epsilon_{22}^i = \frac{u_3^i}{\rho}, \quad \epsilon_{33}^i = \frac{du_3^i}{d\rho}, \quad \epsilon_{12}^i = \epsilon_{13}^i = \epsilon_{23}^i = 0 \quad (22)$$

в предположении, что

$$u_1^i = u_2^i = 0, \quad u_3^i = u_3^i(\rho).$$

Из закона упругости получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^i &= E_{11}^i \epsilon_{11}^i + E_{12}^i \epsilon_{22}^i + E_{13}^i \epsilon_{33}^i, \\ \sigma_{22}^i &= E_{12}^i \epsilon_{11}^i + E_{11}^i \epsilon_{22}^i + E_{13}^i \epsilon_{33}^i, \\ \sigma_{33}^i &= E_{13}^i \epsilon_{11}^i + E_{12}^i \epsilon_{22}^i + E_{33}^i \epsilon_{33}^i, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} E_{11}^i &= \frac{E_1^i (E_3^i - E_1^i \nu'^2)}{(1 + \nu_i) (E_3^i (1 - \nu_i) - 2E_1^i \nu'^2)}, \\ E_{12}^i &= \frac{E_1^i (E_3^i \nu_i + E_1^i \nu'^2)}{(1 + \nu_i) (E_3^i (1 - \nu_i) - 2E_1^i \nu'^2)}, \\ E_{13}^i &= \frac{E_1^i E_3^i \nu'_i}{E_3^i (1 - \nu_i) - 2E_1^i \nu'^2}, \quad E_{33}^i = \frac{(E_3^i)^2 (1 - \nu_i)}{E_3^i (1 - \nu_i) - 2E_1^i \nu'^2}, \\ |\nu'| &< (E_3/E_1)^{1/2}, \quad \nu < 1 - 2\nu'^2 \frac{E_1}{E_3}. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение равновесия (21) совместно с законом упругости (23) позволяет получить определяющие соотношения для нормального прогиба сферы u_3^i :

$$\begin{aligned} u_3^i(\rho) &= \frac{K_1^i}{\gamma_1^i} \rho_i^m + \frac{K_2^i}{\gamma_2^i} \frac{1}{\rho^{m_i+1}}, \quad K_1^i = \frac{p_1^i (r_1^i)^{m_i+2} - p_2^i (r_2^i)^{m_i+2}}{(r_2^i)^{2m_i+1} - (r_1^i)^{2m_i+1}}, \\ K_2^i &= \frac{(r_1^i)^{m_i+2} (r_2^i)^{m_i+2} (p_1^i (r_2^i)^{m_i-1} - p_2^i (r_1^i)^{m_i-1})}{(r_2^i)^{2m_i+1} - (r_1^i)^{2m_i+1}}, \\ \gamma_1^i &= 2E_{13}^i + m_i E_{33}^i, \quad \gamma_2^i = (m_i + 1) E_{33}^i - 2E_{13}^i, \\ m_i &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 4\mu_i^*}}{2}, \quad \mu_i^* = 2 \frac{E_{11}^i + E_{12}^i - E_{13}^i}{E_{33}^i} = 2 \frac{E_1^i}{E_3^i} \frac{1 - \nu'_i}{1 - \nu_i}. \end{aligned} \quad (25)$$

С учетом (25) выражения для напряжений, возникающих в сфере, будут иметь вид

$$\sigma_{11}^i = \sigma_{22}^i = K_1^i \frac{m_i + 1}{2} \rho^{m_i - 1} + \frac{m_i}{2} \frac{K_2^i}{\rho^{m_i + 2}}, \quad \sigma_{33}^i = K_1^i \rho^{m_i - 1} - \frac{K_2^i}{\rho^{m_i + 2}}. \quad (26)$$

Неизвестное усилие взаимодействия между оболочками определяется из условия сопряжения оболочек по перемещениям (2) и нормального прогиба (26):

$$\begin{aligned} p_2 = & [\frac{p_1 r_1^{m_1+2} r_2^{m_1+2}}{\gamma_1^1 (r_2^{2m_1+1} - r_1^{2m_1+1})} + \frac{p_1 r_1^{m_1+2} r_2^{m_1+2}}{\gamma_2^1 (r_2^{2m_1+1} - r_1^{2m_1+1}) r_2^2}] * \\ & * [\frac{r_2^{m_1+2} r_2^{m_1}}{\gamma_1^1 (r_2^{2m_1+1} - r_1^{2m_1+1})} + \frac{r_1^{m_1-1} r_1^{m_1+2} r_2^{m_1+2}}{\gamma_2^1 (r_2^{2m_1+1} - r_1^{2m_1+1}) r_2^{m_1+1}} + \\ & + \frac{r_2^{m_2+2} r_2^{m_2+2}}{\gamma_1^2 (r_3^{2m_2+1} - r_2^{2m_2+1})} + \frac{r_3^{m_2-1} r_2^{m_2+2} r_3^{m_2+2}}{\gamma_2^2 (r_2^{2m_2+1} (r_3^{2m_2+1} - r_2^{2m_2+1}))}]. \end{aligned} \quad (27)$$

3. СРАВНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из пяти упругих коэффициентов, необходимых для расчета трансверсально-изотропных сосудистой и склеральной оболочек глаза, имеются экспериментальные данные только для модулей упругости и коэффициентов Пуассона в касательном направлении. На коэффициенты Пуассона ν'_1 и ν'_2 в направлении толщины оболочек ввиду отсутствия экспериментальных данных накладываются только ограничения (5).

Перемещение по трем различным теориям при нагружении внутренним давлением $p_1 = 30$ мм рт. ст. для следующего случая задания упругих коэффициентов имеет вид (см.: рис. 2):

$$\begin{aligned} E_1^1 &= 0.5 \text{ МПа}, \quad E_3^1 = \frac{E_1^1}{n_1}, \quad \nu_1 = 0.45, \quad \nu'_1 = \frac{\nu_1}{n_1}, \quad n_1 = 2.5, \\ E_1^2 &= 5 \text{ МПа}, \quad E_3^2 = \frac{E_1^2}{n_2}, \quad \nu_2 = 0.45, \quad \nu'_2 = \frac{\nu_2}{n_2}, \quad n_2 = 10, \end{aligned} \quad (28)$$

где E_1^1 , E_3^1 , ν_1 , ν'_1 — упругие коэффициенты внутренней мягкой ($\rho = [11.1; 11.4]$) сосудистой оболочки, E_1^2 , E_3^2 , ν_2 , ν'_2 — упругие

коэффициенты внешней ($\rho = [11.4; 12]$), более жесткой склеральной оболочки.

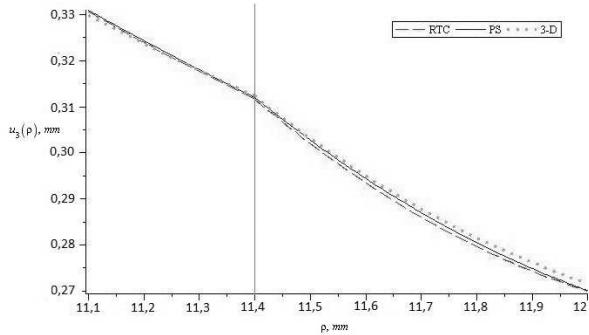


Рис. 2. Зависимости для перемещений внутренней и внешней оболочек глаза по трем теориям.

На рис. 3 представлено перемещение по теории Палия–Спиро при нагружении внутренним давлением $p_1 = 20$ мм рт. ст. для разного отношения упругих коэффициентов:

$$\begin{aligned} E_1^1 &= 1 \text{ МПа}, \quad E_3^1 = \frac{E_1^1}{n_1}, \quad \nu_1 = 0.45, \quad \nu'_1 = \frac{\nu_1}{n_1}, \\ E_1^2 &= 2 \text{ МПа}, \quad E_3^2 = \frac{E_1^2}{n_2}, \quad \nu_2 = 0.45, \quad \nu'_2 = \frac{\nu_2}{n_2}. \end{aligned} \quad (29)$$

На рис. 4 представлено перемещение по теории Родионовой–Титаева–Черных при нагружении внутренним давлением $p_1 = 20$ мм рт. ст. для разного отношения упругих коэффициентов:

$$\begin{aligned} E_1^1 &= 0.5 \text{ МПа}, \quad E_3^1 = \frac{E_1^1}{n_1}, \quad \nu_1 = 0.45, \quad \nu'_1 = \frac{\nu_1}{n_1}, \\ E_1^2 &= 1 \text{ МПа}, \quad E_3^2 = \frac{E_1^2}{n_2}, \quad \nu_2 = 0.45, \quad \nu'_2 = \frac{\nu_2}{n_2}. \end{aligned} \quad (30)$$

На рис. 5 приведены зависимости нормальных и тангенциальных напряжений для внутренней мягкой ($\rho = [11.1; 11.4]$) сосудистой оболочки и внешней ($\rho = [11.4; 12]$) склеральной оболочки для

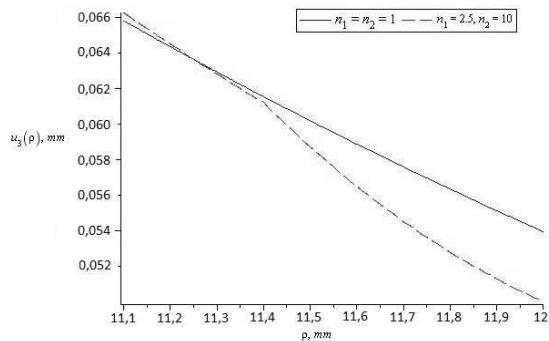


Рис. 3. Зависимости для перемещений для разных n по теории PS при $p_1 = 20$ мм рт. ст..

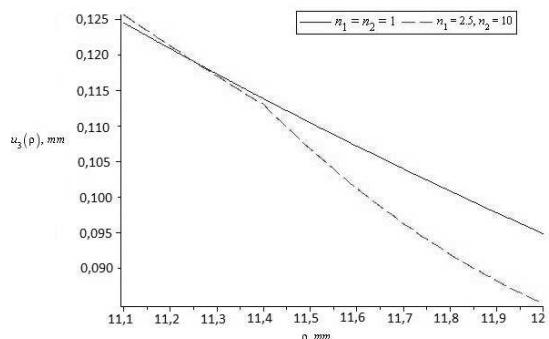


Рис. 4. Зависимости для перемещений для разных n по теории RTC при $p_1 = 20$ мм рт. ст..

внутриглазного давления $p_1 = 30$ мм рт. ст. при следующих упругих коэффициентах:

$$\begin{aligned} E_1^1 &= 0.5 \text{ МПа}, \quad E_3^1 = \frac{E_1^1}{n_1}, \quad \nu_1 = 0.45, \quad \nu'_1 = \frac{\nu_1}{n_1}, \quad n_1 = 2.5, \\ E_1^2 &= 1 \text{ МПа}, \quad E_3^2 = \frac{E_1^2}{n_2}, \quad \nu_2 = 0.45, \quad \nu'_2 = \frac{\nu_2}{n_2}, \quad n_2 = 10. \end{aligned} \quad (31)$$

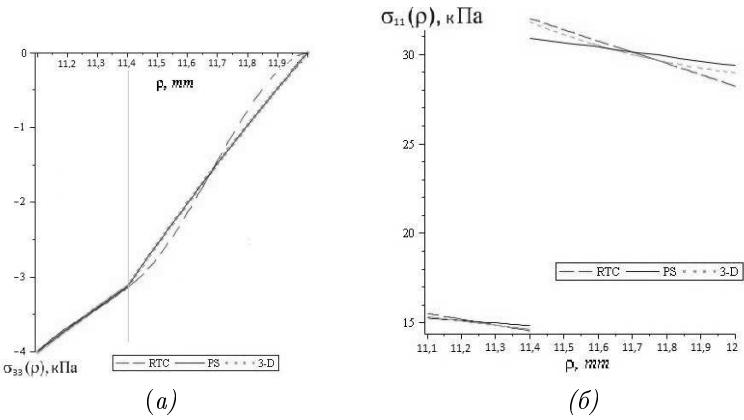


Рис. 5. Зависимости для нормальных (a) и тангенциальных (б) напряжений по трем теориям.

В предлагаемой модели за счет разности упругих коэффициентов сосудистой и склеральной оболочек на поверхности контакта наблюдается разрыв продольных и поперечных тангенциальных напряжений. В реальности, с изменением внутриглазного давления, возможно проскальзывание между оболочками, которое возникает из-за неравномерности напряжений на поверхности.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные расчеты показали, что, чем больше разность упругих коэффициентов оболочек на поверхности изотропии материала

и в направлении, перпендикулярном к ней, тем сильнее изломы, возникающие на поверхности контакта в перемещениях и напряжениях.

Исходя из полученных результатов, можно сказать, что теории оболочек Палия–Спиро и Родионовой–Титаева–Черных позволяют получить достаточно точные результаты для оценки величины перемещения и напряжения, что может помочь в решениях задач об интрасклеральных инъекциях.

Следует отметить, что более точные результаты дает теория Палия–Спиро, т.е. результаты, более близкие к получающимся по трехмерной теории. Также для расчета деформаций и напряжений эллипсоидальных оболочек эта теория является более простой по сравнению с теорией Родионовой–Титаева–Черных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иомдина Е. Н. Механические свойства тканей глаза человека // Современные проблемы биомеханики, вып. 11. М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 183–200.
2. Саулгозис Ю.Ж. Особенности деформирования склеры // Механика композитных материалов, 1981, № 3. С. 505–514.
3. Полоз М.В., Иомдина Е. Н. Активные деформации человеческого глаза // Биомеханика-2010, X Всероссийская конференция, тезисы докладов. Изд-во Саратовского университета. С. 137–139.
4. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 380 с.
5. Бауэр С.М., Воронкова Е.Б. Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев под действием нормального давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 3. 2011. С. 86–93.
6. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
7. Палий О.М., Спиро В.Е. Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет. Л.: Судостроение, 1977. 386 с.
8. Родионова В.А., Титаев В.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996. 280 с.

ДЕФОРМАЦИЯ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ (ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ПНЕВМОТОНОМЕТРА)

А. В. ИВЧЕНКОВА

В работе построены две простейшие модели пневмотонометра, одна из которых основывается на уравнениях для моментной теории оболочек, другая — для безмоментной теории оболочек. Проведено исследование поведения пологой сферической оболочки при разных параметрах и сравнение представленных моделей. На основании сравнений сделан вывод о том, что модель безмоментной оболочки даёт результаты, близкие к наблюдаемым в экспериментах. Показано, что моментная модель не может адекватно описать клинические данные.

1. ВВЕДЕНИЕ

История тонометрии (методов измерения внутриглазного давления — ВГД) начинается с 1862 г., когда Альбрехтом фон Грефе был изобретён первый тонометр. Был он импрессионного типа, что означает, что на глаз производят давление концом своего рода штифта (плунжера) небольшого диаметра, а о внутриглазном давлении судят по глубине образуемой пологой ямки (рис. 1 (а)).

После тонометра Грефе появились и другие импрессионные приборы, как правило, очень неточные [4]. Сильный прорыв в тонометрии был совершен в 1884 г. Алексеем Николаевичем Маклаковым, который впервые предложил аппланационный метод тонометрии [7]. При аппланационной тонометрии глаз деформируется плоскостью, в результате чего образуется кружок сплюсывания — апплациации [4] (рис. 1 (б)).

Международным стандартом в офтальмологии считается апплационный тонометр Гольдмана, разработанный в 1954 г. швейцарским офтальмологом Гансом Гольдманом [1, 8, 9]. Апплационная тонометрия, по Гольдману, измеряет силу, которая требуется, чтобы сделать плоской определённую часть роговицы. Диаметр апплациации всегда постоянен и равен 3.06 миллиметрам.

Доклад на семинаре 10 декабря 2013 г.

© А. В. Ивченкова, 2013

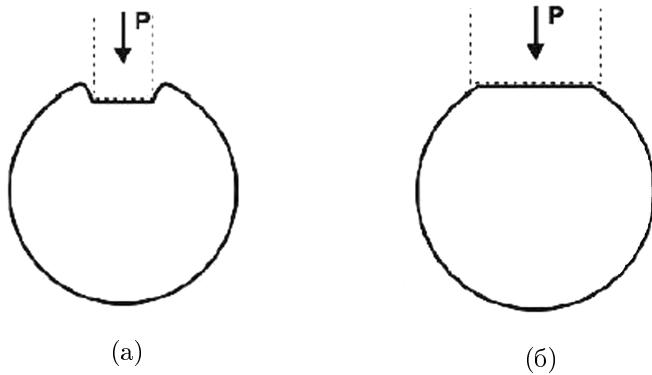


Рис. 1. Методы измерения ВГД: (а) — импрессионный, (б) — аппланационный.

На сегодняшний день имеется очень много различных устройств для измерения ВГД. Всё большее распространение получают пневмомонометры — бесконтактные тонометры. Эти устройства делают роговицу плоской, используя для этого струю воздуха. Оптический датчик регистрирует, при какой силе, как быстро роговица изменила кривизну до заданной степени. Затем аппарат пересчитывает количество времени или силу воздействия. Преимущества данного метода:

- быстрота;
- нет необходимости предварительной анестезии;
- из-за отсутствия прямого контакта с глазом уменьшается риск инфицирования.

В начале XXI века американской фирмой “Reichert” [13] был предложен также оптический анализатор — прибор ORA (Ocular Response Analyzer), который, как и все пневмомонометры, фиксирует образование плоской зоны деформации радиуса 1.53 мм, а после этого продолжает некоторое время нагружение роговицы, и при разгрузке второй раз фиксирует величину прикладываемой силы при прохождении роговицей зоны плоской деформации. Таким

образом, этот прибор позволяет оценить и коэффициент вязкости (или сопротивления) роговицы.

В данной работе строится простейшая математическая модель для изучения действия пневмотонометра и прибора ORA на роговицу глаза при измерении внутриглазного давления. Как отмечено в работе Кальфа [6] ещё в 1928 г., “если мы обратимся к методике исследования ВГД, то мы должны признать, что наши тонометрические определения не столько дают нам заключение о внутриглазном давлении, сколько о реакции глазных оболочек на приложение к глазу тонометра”. Поэтому, прежде всего, в работе рассматривается задача о действии динамических нагрузок на пологие сферические сегменты и нахождении прогиба, вызванного данными нагрузками.

Внешней оболочкой глаза является корнеосклерная капсула. Эта оболочка состоит из двух сопряжённых оболочек — склеры и роговицы. Склера составляет 93% оболочки и лишь 7% — роговица (рис. 2).

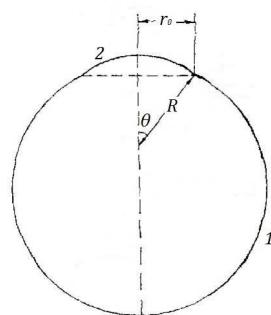


Рис. 2. Сферическая оболочка (простейшая модель глаза): 1 — скlera, 2 — роговица.

В работе [5] показано, что роговица является более мягкой оболочкой, чем склеры. Поэтому радиус кольца сопряжения практически не меняется, и в первом приближении роговицу можно рассматривать отдельно как пологую сферическую оболочку.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель моментной оболочки для изучения пневмомонометра рассматривалась в работах В. Л. Якушева [11, 12].

Исследуется поведение пологой сферической оболочки.

Уравнение пологой сферической оболочки относительно прогиба $w = w(t, r)$ и функции усилий $F = F(t, r)$ в серединной поверхности имеют вид (см.: [2, 3, 10]):

$$\begin{cases} D\Delta^2 w = L(w, F) + \frac{1}{R}\Delta F + (q - P) - h\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}, \\ \frac{1}{Eh}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(w, w) - \frac{1}{R}\Delta w. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ε — коэффициент сопротивления, P — внутреннее давление, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки.

Используемые операторы в полярной системе координат при наличии осевой симметрии имеют вид

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right), \quad (2)$$

$$L(w, F) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial r}\right), \quad L(w, w) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2. \quad (3)$$

Так как зона приложения внешней нагрузки мала (рис. 3 (а)), то, в первом приближении, будем рассматривать нормальное давление $q = q(t, r)$ (аппланационное давление), которое изменяется по закону

$$q(t, r) = \begin{cases} s\left[\sin\left(\frac{2\pi t}{t_{end}} - \frac{\pi}{2}\right) + d\right], & 0 \leq r \leq a, \\ 0, & a \leq r \leq r_0, \end{cases} \quad (4)$$

где a — радиус аппланации, t_{end} — заданная константа, определяющая временной промежуток внешнего воздействия, s и d — варьируемые константы, позволяющие задать необходимые значения максимума $q_{\max} = \max_{t,r}(q(t, r))$ и минимума $q_{\min} = \min_{t,r}(q(t, r))$ функции (рис. 3 (б)).

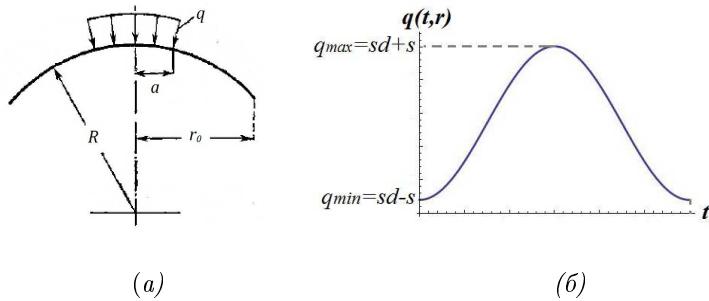


Рис. 3. Внешнее воздействие (аппланационное давление).

Домножив второе уравнение системы (1) на r и проинтегрировав, получим следующее соотношение:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right) = -\frac{Eh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{Eh}{R} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + c_1. \quad (5)$$

Для замкнутых в вершине оболочек функция $c_1(t)$ обращается в нуль.

Введя новую функцию $\varphi = \frac{\partial F}{\partial r}$, получим дифференциальную систему уравнений в частных производных шестого порядка:

$$\begin{cases} D\Delta^2 w = L(w, F) + \frac{1}{R} \Delta F + (q - P) - h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t}, \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \varphi \right) \right) = -\frac{Eh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{Eh}{R} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right). \end{cases} \quad (6)$$

Границные условия, соответствующие условию жёсткого защемления контура $r = r_0$, имеют вид

$$w|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}|_{r=r_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\mu}{r} \varphi \right)|_{r=r_0} = 0. \quad (7)$$

Условия замкнутости оболочки в вершине следующие:

$$\frac{\partial w}{\partial r}|_{r=0} = 0, \quad N_1|_{r=0} = N_2|_{r=0} < \infty, \quad (8)$$

где N_1 и N_2 – нормальные усилия, выражаются через функцию φ следующим образом:

$$N_1 = \frac{1}{r} \varphi, \quad N_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (9)$$

С учётом (9) условия в вершине (8) принимают вид

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left(\frac{1}{r} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0. \quad (10)$$

Аппроксимируем выражение для прогиба $w = w(t, r)$:

$$w(t, r) = f(t)W(r), \quad (11)$$

$$W(r) = \frac{1}{2} \left[1 + \alpha \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right)^2 \right] \left(1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right)^2, \quad (12)$$

где r_0 – радиус окружности опоры, α – варьируемый параметр, $f(t)$ – функция, подлежащая определению.

Легко заметить, что при таком выборе аппроксимации функция прогиба w удовлетворяет как граничным условиям (7), так и условиям в центре оболочки (10).

Из второго уравнения системы (6), путём последовательного интегрирования, найдем выражение для функции $\varphi = \varphi(t, r)$:

$$\varphi = -\frac{1}{r} \int \left[r \int \left(\frac{1}{r} \frac{Eh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{Eh}{R} \frac{\partial w}{\partial r} \right) dr \right] dr + c_2 \frac{r}{2} + c_3 \frac{1}{r}. \quad (13)$$

Константы c_2 и c_3 находятся из условий (7) и (10) для φ .

Используем метод Бубнова-Галёркина для решения первого уравнения системы (6). Получим следующее уравнение:

$$I = \int_0^{r_0} \left[X(w) + \frac{1}{R} \Delta F + (q - P) \right] \frac{\partial W}{\partial r} r dr = 0. \quad (14)$$

Здесь под $X(w)$ понимаем выражение

$$X(w) = -D \Delta^2 w + L(w, F) - h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (15)$$

Хочется отметить, что ввиду выбранного нами представления функции аппланационного давления $q = q(t, r)$ интеграл (14) разобьется на сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned} I = & \int_0^a \left[X(w) + \frac{1}{R} \Delta F + (q - P) \right] \frac{\partial W}{\partial r} r dr + \\ & + \int_a^{r_0} \left[X(w) + \frac{1}{R} \Delta F - P \right] \frac{\partial W}{\partial r} r dr. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (14) есть дифференциальное уравнение относительно функции $f(t)$. Решив его, можно найти искомый вид прогиба $w = w(t, r)$.

Модели моментных оболочек использовались для описания пневмомонометров и приборов ОРА в работах [11, 12], однако получить плоской зоны деформирования, которая наблюдается при измерении внутриглазного давления при реальных параметрах, не удалось. По-видимому, это связано с тем, что роговицу можно рассматривать как оболочку, близкую к мягкой, потому как модуль упругости роговицы в тангенциальном направлении в 50 – 100 раз превосходит модуль упругости в направлении толщины (см. [1, 5]). При условии сделанных нами допущений система уравнений (6) примет следующий вид:

$$\begin{cases} L(w, F) + \frac{1}{R} \Delta F + (q - P) - h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \varphi \right) \right) = -\frac{Eh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{Eh}{R} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right). \end{cases} \quad (17)$$

Границные условия и условия в центре для системы (17) имеют тот же вид (см. (7), (10)), что и для случая жёсткой оболочки. Аналогичным остаётся и выражения для функции $\varphi = \varphi(t, r)$ (см. (13)).

Аппроксимация прогиба производится аналогично случаю, рассмотренному выше (см.: (11), (12)).

Запишем уравнение, полученное в результате применения метода Бубнова-Галёркина к первому уравнению системы (17):

$$I = \int_0^{r_0} \left[X(w) + \frac{1}{R} \Delta F + (q - P) \right] \frac{\partial W}{\partial r} r dr = 0, \quad (18)$$

где

$$X(w) = L(w, F) - h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (19)$$

Решив (18) относительно функции $f = f(t)$, найдем искомый вид прогиба $w = w(t, r)$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА

Для проведения численного расчёта и визуализации решения данной задачи использовался пакет математических программ Mathematica 8.0. С помощью него, численно, были найдены решение уравнения (14) (модели изотропной оболочки) и решение уравнения (18) (модели мягкой оболочки) относительно параметра прогиба $f = f(t)$. Решения были получены при начальных условиях $f|_{t=0} = 0, \frac{\partial f}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

Вычисления были проведены для оболочки, имеющей радиус $R = 8$ мм, радиус окружности опоры $r_0 = 5$ мм, коэффициент Пуассона $\mu = 0.45$ и плотность $\rho = 0.00109879 \frac{\text{г}}{\text{мм}^3}$. Коэффициент сопротивления примем равным $\varepsilon = 40 \frac{(\text{Па г})^{\frac{1}{2}}}{\text{мм}^{\frac{3}{2}}}$.

Модуль Юнга E варьировался от 0.1 до 1 МПа (см.: [5]), толщина h — от 0.48 до 0.6 мм, радиус аппланации a — от 1.53 до 2.1 мм, параметр α — от 0.05 до 0.08, внутреннее давление P — от 10 до 40 мм рт. ст.

В условиях выбранных параметров задавались константы s и d таким образом, чтобы при максимальном значении составляющей аппланационного давления $q = q(t, r)$ оболочка не получала отрицательную кривизну. Особо выделялись нагрузки, при которых роговица принимала плоский вид в области аппланации.

Таким образом, удалось сравнить две модели, проследить за поведением оболочки в зависимости от прилагаемой нагрузки и изменения параметров E, h, a, α и P .

Ниже, в качестве примера, представлены графики сравнения начальной формы оболочки и её прогиба для значения параметров $E = 0.5$ МПа, $h = 0.54$ мм, $a = 2.1$ мм и $\alpha = 0.08$ (рис. 4, 5).

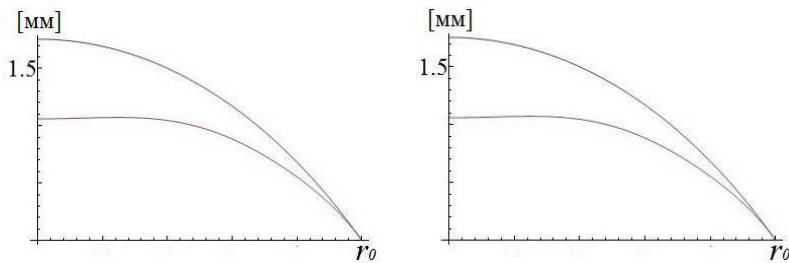


Рис. 4. Начальная форма и прогиб моментной оболочки при $q = 45452.6$ Па (слева) и $q = 53115.4$ Па (справа).

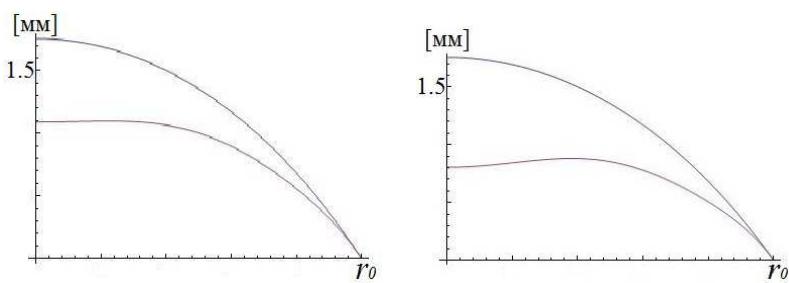


Рис. 5. Начальная форма и прогиб безмоментной оболочки при $q = 25268.2$ Па (слева) и $q = 28144.6$ Па (справа).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведя анализ полученного результата и сравнивая две представленные модели, можно сделать вывод о том, что модель безмоментной оболочки даёт результаты, близкие к реальным клиническим данным, тогда как моментная модель не может адекватно описать данные, полученные экспериментальным путём.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bayär C.M. Об апплапационных методах измерения внутриглазного давления // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. 2006–2007 гг. / под ред. А.Л. Смирнова,

- Е.Ф. Жигалко. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. С. 3–19.
2. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа (задачи аэроупругости). М.: Наука, 1976.
 3. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. 2-е изд. М.: Наука, 1967.
 4. *Вургарт М.Б., Вургарт Я.М.* Тонометрические методы исследования внутриглазного давления и гидродинамика глаза при глаукоме. Казань, 1991. 112 с.
 5. *Иомдина Е.Н.* Биомеханика склеральной оболочки глаза при миопии: диагностика нарушений и их экспериментальная коррекция: автореф. дис. ... д-ра биол. наук. М., 2000. 32 с.
 6. *Кальфа С.Ю.* Эластометрия глаза // Русский офтальмологический журнал. 1928. Т. VIII, № 2. С. 250–262.
 7. *Маклаков А.Н.* Офтальмотонометрия // Мед. обозрение. 1884. Т. 24. С. 1092–1095.
 8. *Нестеров А.П., Вургарт М.Б.* Калибривочные таблицы для эластонометра Филатова-Кальфа // Вестн. офтальмологии. 1972. № 2. С. 20–25.
 9. *Нестеров А.П., Бунин Ф.Я., Канцельсон Л.А.* Внутриглазное давление. Физиология и патология. М.: Наука, 1974. 381 с.
 10. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. 2-е изд. Л.: Стройиздат. Ленинградское отделение, 1975. 256 с.
 11. *Хусаинов Р.Р., Цибульский В.Р., Якушев В.Л.* Моделирование деформации глаза при измерении внутриглазного давления оптическим методом // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. 2011. № 2. С. 349–362.
 12. *Якушев В.Л.* Постановка задачи о математическом моделировании измерения глазного давления пневмотонометрическим методом // Механика твердого тела. 2011. № 6. С. 149–158.
 13. *Luce D., Taylor D.* Reichert ocular response analyzer measures corneal biomechanical properties and IOP provides new indicators for corneal specialties and glaucoma management. Reichert Ocular Response Analyzer White Paper; 2006.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОМБИНИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ШПРЕНГЕЛЬНОГО ТИПА ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

А.Н. БЕСТУЖЕВА, А.И. КОРОЛЕВ, Б.В.КОСТЕНКО,
М.И. ЛУКИН, М.С. СЕДОВ

В работе решалась задача о нахождении внутренних усилий, прогибов, деформаций континуальной модели комбинированной конструкции. Основные результаты, полученные численно-аналитическими методами, сравнивались с результатами расчета задачи МКЭ в программном комплексе SCAD.

1. ВВЕДЕНИЕ

Комбинированные системы шпренгельного типа — конструкции, состоящие из различных по роду своей работы элементов: жесткостных (рис. 1, 1) и гибких (рис. 1, 2). Такие конструкции применяются в качестве подкрановых балок промышленных зданий, несущих конструкций покрытий и специальных сооружений — жестких поперечин опор контактной сети электрифицированных железных дорог, трубопроводов и т.п.

В работе [1] предложена шпренгельная система с балкой жесткости из предварительно изогнутых стержней (рис. 1, 1), усиленных затяжкой (рис. 1, 2). Балка жесткости — балочный элемент, работающий преимущественно на изгиб, затяжка — элемент, работающий только на растяжение (нить). В отличие от обычных балок, шпренгельная балка может воспринять большие усилия при той же геометрии конструкции за счет выгодного распределения

Доклад на семинаре 11 февраля 2014 г.

Работа выполнена при поддержке студенческого гранта ПГУПС 2013 г.

© А.Н. Бестужева, А.И. Королев, Б.В. Костенко, М.И. Лукин, М.С. Седов, 2014

усилий: распор конструкции (усиление растяжения в затяжке) как бы стесняет вертикальные перемещения системы, увеличивая ее изгибную жесткость и уменьшая расчетные усилия в балочном элементе. Предложенная на кафедре “Строительные конструкции” ПГУПС конструкция обладает дополнительными преимуществами за счет предварительного напряжения: 1) предварительный изгиб балок создает в них напряжения, отличные от напряжений внешних нагрузок; 2) существует предварительное растяжение затяжки. Кроме того, рассматривается составная балка жесткости, поперечное сечение которой состоит из двух-трех балок, соединенных при помощи сварки. Такая конструктивная особенность ведет к усложнению задачи, поскольку появляется неизвестное усилие сдвига, требуемое для расчета сварного шва.

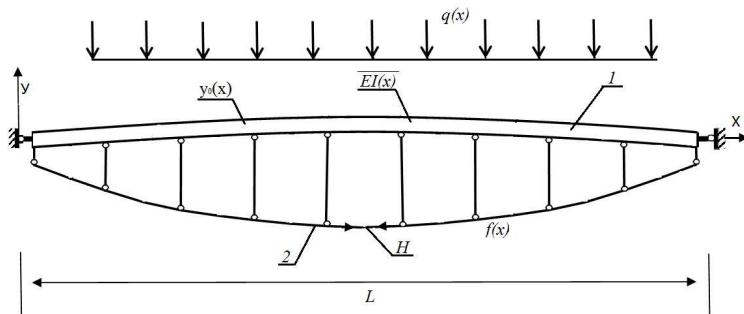


Рис. 1. Расчетная схема.

На основе уравнений, приведенных в работах [2, 3], была создана механико-математическая модель, учитывающая особенности предварительно напряженных спрингельных систем. Основные уравнения имеют вид

$$H(y''(x) + f''(x)) + EIy^{IV}(x) = q(x) + \nu T''(x) + q_{pn}(x), \quad (1)$$

$$\frac{1}{\zeta}T^{IV}(x) = \gamma T''(x) - \frac{\nu}{EI} \left(Hy''(x) - q(x) - q_{pn}(x) \right), \quad (2)$$

$$H = \frac{E^s A^s}{L^s} \left[L - \int_0^L \left(\sqrt{1+y'^2} + \sqrt{1+(f+y)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. -(1-\frac{H}{EA})\sqrt{1+f'^2} \right) dx \right], \quad (3)$$

где функция $q_{pn}(x) = EI_1y_{01}^{IV}(x) + EI_2y_{02}^{IV}(x)$ — усилие от предварительного прогиба балки жесткости, $y_{01}(x)$ — форма предварительного прогиба первого элемента балки жесткости, $y_{02}(x)$ — форма предварительного прогиба второго элемента балки жесткости.

Границные условия:

$$y_{x=0} = y_{x=l} = 0, \quad y''_{x=0} = y''_{x=l} = \frac{CH}{EI}, \quad (4)$$

$$T_{x=0} = T_{x=l} = T''_{x=0} = T''_{x=l} = 0, \quad (5)$$

где неизвестные: $y(x)$ — функция, описывающая прогибы балки; H — распор (усилие растяжения в затяжке); $T(x)$ — функция, описывающая погонное усилие сдвига.

Параметры системы: C — эксцентризитет крепления затяжки; E, E^s — модуль Юнга всей балки и затяжки соответственно; A, A^s — площади поперечного сечения балки и затяжки соответственно; L, L^s — длина балки и затяжки соответственно; I_1, I_2, I — моменты инерции сечения отдельных частей и всей балки соответственно; ν, ζ, γ — параметры составной балки, а именно ν — расстояние между составными частями балки, ζ — коэффициент жесткости шва, γ — коэффициент учета неравномерности распределения напряжений в составной балке; $f(x)$ — функция, описывающая форму затяжки, $q(x)$ — функция, описывающая форму внешней нагрузки, $q_{pn}(x)$ — функция, описывающая форму усилия от предварительного напряжения.

Уравнение (1) — уравнение равновесия всех сил и усилий в проекции на вертикальную ось, уравнение (2) — уравнение равновесия всех сил и усилий в проекции на горизонтальную ось, уравнение (3) описывает усилие растяжения в затяжке (закон Гука).

2. РЕШЕНИЕ

Следует отметить, что задача геометрически нелинейная, т. е. расчетная схема континуальной модели конструкции меняется, что в математической модели выражается через неопределенность граничных условий (4) и (5) (входит неизвестное H (строго говоря, это будут уравнения связи) и “перевязанность” уравнений), в каждом из них присутствуют все неизвестные.

Метод решения: сначала решаются уравнения (1) и (2) приведением к главным координатам, полагая неизвестное H параметром. Получаются два аналитических решения для неизвестных функций $y(x, H)$, $T(x, H)$, определенных с точностью до параметра H :

$$\begin{aligned} y(x, H) = & x_{11} \left(C_1 \sin(\sqrt{\lambda_1}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda_1}x) + C_3x + C_4 \right) + \\ & x_{12} \left(C_5 e^{\sqrt{-\lambda_2}x} + C_6 e^{-\sqrt{-\lambda_2}x} + C_7x + C_8 \right) + \left(\frac{Z_1}{2\lambda_1} + \frac{Z_2}{2\lambda_2} \right) x^2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} T(x, H) = & x_{21} \left(C_1 \sin(\sqrt{\lambda_1}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda_1}x) + C_3x + C_4 \right) + \\ & x_{22} \left(C_5 e^{\sqrt{-\lambda_2}x} + C_6 e^{-\sqrt{-\lambda_2}x} + C_7x + C_8 \right) + \left(x_{21} \frac{Z_1}{2\lambda_1} + x_{22} \frac{Z_2}{2\lambda_2} \right) x^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ — это собственные векторы системы уравнений (1) и (2), записанной в матричном виде; λ_1, λ_2 — собственные числа той же матрицы; C_i , где $i = 1, 2, \dots, 8$ — постоянные интегрирования.

Последние слагаемые в решениях (6) и (7) представляют собой частные решения неоднородных дифференциальных уравнений (1) и (2), коэффициентами которых являются Z_1, Z_2 , которые зависят от параметра H . Собственные векторы $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ и собственные числа λ_1, λ_2 также зависят от параметра H .

Затем решается трансцендентное уравнение (3), получаемое подстановкой в него найденных функций (6) и (7). Это уравнение решается численно итерационным методом. Решением данного уравнения является неизвестная величина H , которая затем представляется в ранее найденные функции $y(x, H)$, $T(x, H)$.

Для обоснования эффективности работы конструкции сравним полученные результаты (прогибы) с результатами расчета конструкции — балки той же геометрии при тех же нагрузках (рис. 1а

на вклейке). Прогиб шпренгельной балки обозначен сплошной линией, прогиб обычной балки — пунктиром. В качестве меры эффективности принят критерий материоемкости, т. е. то минимальное количество материала, которое требуется в конструкции для восприятия внешних нагрузок с учетом распределения внутренних усилий. В рассчитываемой конструкции эффективность достигает 15% по сравнению с балкой (с учетом дополнительного расхода материала на затяжку и стойки).

Решение задачи МКЭ производилось в программном комплексе SCAD (рис. 3). Расчетная модель — плоская рама. Балка состоит из дутавра и тавра. В качестве затяжки была взята стальная труба длиной L с поперечным сечением диаметра 10 мм и толщиной 1 мм. Шаг стоек взят 1 м — из опытных данных, для соответствия расчетной модели: полной передачи перемещений с балки на затяжку. Нагрузка $q(x) = 1 \text{ т}/\text{м}$. Соединения составных частей балки — сварка [4].

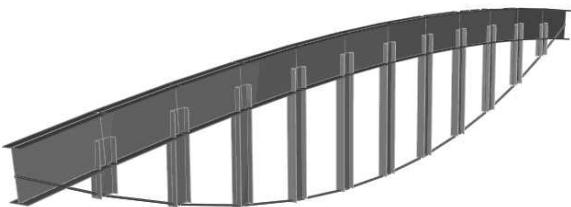


Рис. 3. Модель шпренгельной балки в комплексе SCAD.

Сравнение результатов расчета показано на рис. 1б на вклейке. Кривая, полученная при теоретическом расчете, обозначена сплошной линией, при расчете в комплексе SCAD — пунктирной. Представленные на графике зависимости показывают хорошее совпадение теоретических и практических расчетов.

Использование аналитических решений позволяет исследовать дополнительные конструктивные изменения: 1) вынос затяжки (вниз); 2) влияние количества затяжных элементов.

3. ВЛИЯНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ВЫНОСА ЗАТЯЖКИ НА ВЕЛИЧИНЫ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, РАСПОРА И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Из таблицы понятна общая тенденция системы: с увеличением выноса максимальный расчетный изгибающий момент и прогибы уменьшаются, а распор увеличивается. Это очень хорошая тенденция: при одном и том же сечении (конструктивный расчет балки производится как для внецентренно сжатого стержня, поэтому при разных выносах затяжки даже при уменьшившимся изгибающем моменте усилие сжатия в балке возрастает и коэффициент использования и сечение почти не меняются) материал затяжки используется наибольшим образом, так как работает на растяжение, и вертикальные перемещения системы уменьшаются (до 20%). Однако по технологическим, конструктивным и эстетическим требованиям вынос затяжки ограничен. В реальных конструкциях возможно добиться уменьшения вертикальных перемещений до 15%.

Расчетные усилия и перемещения

Вынос затяжки C , м	Изгибающий момент M , кНм	Распор H , кН	Максимальное вертикальное перемещение y , мм
0.1	162.2	14.177	47.3
0.15	160.8	14.745	46.8
0.3	156.2	16.324	45.3
0.5	150	18.13	43.2
0.7	143.6	19.598	41.1
1	134.1	21.206	37.9

4. ВЛИЯНИЕ КОЛИЧЕСТВА ЗАТЯЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ВЕЛИЧИНЫ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, РАСПОРА И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

В рассматриваемой модели предполагалось крепление затяжки к торцам балки, что практически невозможно, так как это площадки опирания конструкции. То есть в реальных конструкциях раз-

меры затяжки меньше (имеется в виду длина). Возникает вопрос о возможности устройства второй затяжки, чтобы компенсировать вышесказанное. Для ответа на вопрос была создана модель, учитывающая наличие двух затяжек, прикрепленных к балке:

$$\sum_{i=1}^2 H_i(y''(x) + f_i''(x)) + EIy^{IV}(x) = q(x) + \nu T''(x) + q_{pn}(x),$$

$$\frac{1}{\zeta}T^{IV}(x) = \gamma T''(x) - \frac{\nu}{EI} \left(\sum_{i=1}^2 H_i y''(x) - q(x) - q_{pn}(x) \right),$$

$$H_i = \frac{E_i^s A_i^s}{L_i^s} \left[L - \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \left(\sqrt{1+y'^2} + \sqrt{1+(f_1+y)^{\prime 2}} - \right. \right.$$

$$\left. \left. -(1-\frac{H_i}{EA})\sqrt{1+f_1'^2} \right) dx \right].$$

Границные условия:

$$y_{x=0} = y_{x=l} = y''_{x=0} = y''_{x=l} = 0.$$

Здесь количество неизвестных увеличивается на одно ($i = 1, 2$): H_i — распоры (усилия растяжения в затяжках), $f_i(x)$ — функции, описывающие форму затяжек. Параметры: E_i^s — модули Юнга затяжек; A_i^s — площади поперечных сечений затяжек, L_i^s — длины затяжек, расположенных на расстояниях α_i от левого торца балки и β_i от правого конца балки. Для расчетов в работе использовалось следующее расположение затяжек: $\alpha_1 = 0.5$, $\beta_1 = L - 0.5$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = L - 1$.

Отличие от предыдущей модели состоит в появлении нового неизвестного и нового уравнения. В результате выявлено, что двумя укороченными затяжками можно получить меньшие вертикальные перемещения, чем с одной, но более длинной затяжкой (до 10%). Также на 45% снизились усилия растяжения в затяжках, что позволяет экономить на их сечении.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам исследований комбинированной системы шпренгельного типа и влияния различных конструктивных особенностей на его работу можно сделать следующие выводы.

1. Рассматриваемая конструкция эффективнее наиболее распространенных в наше время (обычных балочных элементов) с точки зрения материоемкости, т. е. они способны воспринимать те же внешние нагрузки при меньшем поперечном сечении (до 15%).

2. Полученное численно-аналитическое решение является наиболее точным решением для данной конструкции в сравнении с производившимися приближенными расчетами других исследователей.

3. Достаточно точное решение позволило с аналогичной точностью проанализировать влияние конструктивных новшеств данной комбинированной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров В.В. Патент РФ на изобретение №2190735, Е04 С 3/10. Способ комбинированного предварительного напряжения перфорированной шпренгельной балки // Опубл. 10.10.2002. Бюл. №28.
2. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластинки. М. Стройиздат, 1986. 316 с.
3. Егоров В.В. Развитие конструктивных форм и методов расчета комбинированных систем шпренгельного типа.: дис. ... докт. техн. наук. СПб., 2004. 535 с.
4. Беленя Е.И. Металлические конструкции: учебник / под ред. Е.И. Беленя. 6-е изд., перераб. и доп. М. Стройиздат, 1985. 560 с.

ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕЙ С РАСТЯЖЕНИЕМ И СДВИГОМ

В.В. ЕЛИСЕЕВ, Е.А. ОБОРИН

Представлена общая нелинейная теория стержней как материальных линий Коссера, а также уравнения в компонентах для плоской задачи. Предложен способ численного решения с помощью компьютерной математики. Рассмотрены модели стержней с учетом податливости на растяжение и сдвиг. Среди них — прямой стержень, криволинейный стержень с описанием формы аналитически и по точкам.

1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Используем прямой подход к стержню как материальной линии Коссера, частицы которой являются твердыми телами [1]. Движение стержня (рис. 1) определяется зависимостью радиус-вектора $\underline{r}(s, t)$ и тензора поворота $\underline{\underline{P}}(s, t) = \underline{e}_i \underline{e}_{i0}$ от материальной координаты s и времени (суммируем по повторяющемуся индексу). Тройка ортов \underline{e}_i связана с каждой частицей для задания угловой ориентации; в начальном состоянии $\underline{e}_i = \underline{e}_{i0}, \underline{r}(s, 0) = \underline{r}_0(s), \underline{\underline{P}}(s, 0) = \underline{\underline{E}}$ (единичный тензор).

В модели Коссера нагрузками являются силы и моменты. На элемент ds действуют внешняя сила $\underline{q}ds$ и момент $\underline{m}ds$. Внутренняя сила $\underline{Q}(s)$ и момент $\underline{M}(s)$ задают воздействие “справа налево” — от $s + 0$ к $s - 0$.

Система уравнений выводится из принципа виртуальной работы для отрезка стержня (см. [3, 4])

$$\int_{s_1}^{s_2} (\underline{q} \cdot \delta \underline{r} + \underline{m} \cdot \delta \underline{o} - \delta \Pi) ds + (\underline{Q} \cdot \delta \underline{r} + \underline{M} \cdot \delta \underline{o})|_{s_1}^{s_2} = 0. \quad (1)$$

Доклад на семинаре 25 марта 2014 г.
© В.В. Елисеев, Е.А. Оборин, 2014

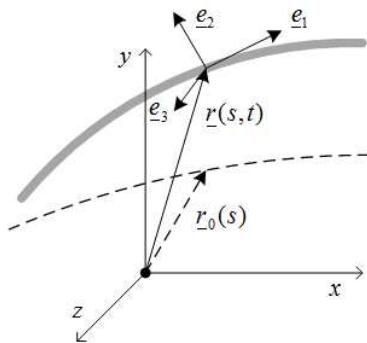


Рис. 1. Стержень как материальная линия.

Здесь $\delta\omega$ — вектор малого поворота ($\underline{\underline{\delta P}} = \delta\omega \times \underline{\underline{P}}$), Π — энергия деформации на единицу “длины”. Следствиями (1) являются известные [2, 3, 4, 6] уравнения баланса сил и моментов :

$$\underline{Q}' + \underline{q} = 0, \underline{M}' + \underline{r}' \times \underline{Q} + \underline{m} = 0. \quad (2)$$

Далее вводим выражения двух векторов деформации:

$$\underline{\Gamma} \equiv \underline{r}' - \underline{\underline{P}} \cdot \underline{r}'_0, \underline{K} \equiv \underline{\Omega} - \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\Omega}_0. \quad (3)$$

Вектор $\underline{\Gamma}$ определяет растяжение и поперечный сдвиг. Второй вектор деформации \underline{K} , характеризующий изгиб и кручение, выражается через вектор $\underline{\Omega}$:

$$\underline{e}'_i = \underline{\Omega} \times \underline{e}_i, \underline{\Omega} = \frac{1}{2} \underline{e}_i \times \underline{e}'_i. \quad (4)$$

При этом оказывается

$$\underline{\underline{P}}' = \underline{K} \times \underline{\underline{P}} \Leftrightarrow \underline{K} = -\frac{1}{2} (\underline{\underline{P}}' \cdot \underline{\underline{P}}^T)_{\times}. \quad (5)$$

Разумеется, векторы деформации равны нулю на “жестких” перемещениях:

$$\underline{\underline{P}}(s) = \text{const}(s), \underline{r}(s) - \underline{r}(s_1) = \underline{\underline{P}} \cdot (\underline{r}_0(s) - \underline{r}_0(s_1)) \rightarrow \underline{K} = 0, \underline{\Gamma} = 0.$$

Из принципа виртуальной работы следуют и соотношения упругости, связывающие силовые факторы с деформациями. Учитывая (2), из (1) получим

$$\delta\Pi = \underline{Q} \cdot (\delta\underline{r}' - \delta\underline{\varrho} \times \underline{r}') + \underline{M} \cdot \delta\underline{\varrho}' = Q_i \delta\Gamma_i + M_i \delta K_i. \quad (6)$$

Здесь использованы формулы для вариаций векторов деформации (Клебша) [3, 4] и введены компоненты в актуальном базисе ($Q_i = \underline{Q} \cdot \underline{e}_i$).

Следствием (6) являются соотношения упругости: $Q_i = \partial\Pi/\partial\Gamma_i$, $M_i = \partial\Pi/\partial K_i$. Считая далее плотность энергии деформации $\Pi(\Gamma_i, K_i)$ квадратичной формой, получим

$$\underline{M} = \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{\Gamma}}, \underline{Q} = \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{\Gamma}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{c}} \quad (7)$$

с тремя тензорами жесткости.

Эти соотношения можно обратить преобразованием Лежандра:

$$\Gamma_i = \partial\hat{\Pi}/\partial Q_i, K_i = \partial\hat{\Pi}/\partial M_i, \hat{\Pi} = \Gamma_i Q_i + Q_i M_i - \Pi. \quad (8)$$

В рассматриваемой физически-линейной модели потенциальная энергия Π равна дополнительной $\hat{\Pi}$, поэтому соотношения упругости можно записать в следующей обращенной форме:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}. \quad (9)$$

Здесь три тензора: $\underline{\underline{A}}$ — податливость на кручение и изгиб, $\underline{\underline{B}}$ — на растяжение и сдвиг, $\underline{\underline{C}}$ — тензор перекрестных связей (например, кручение от продольной силы).

Тензорные упругие модули определяются формой сечения и свойствами материала. Их расчет — за рамками данной работы. Можно использовать решение Сен-Бенана с равенством энергий одномерной и трехмерной моделей. Не только модули, но и все уравнения стержня можно вывести асимптотическим расщеплением трехмерной задачи [3, 4]. Заметим, что тензоры поворачиваются вместе с ортами: $\underline{\underline{A}}'(s) = \underline{\underline{\Omega}} \times \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{\Omega}}$. Если направить орты по главным осям тензора $\underline{\underline{A}}$, то $\underline{\underline{A}} = \sum A_k \underline{e}_k \underline{e}_k$. Подобным образом представляется $\underline{\underline{B}}$; но не $\underline{\underline{C}}$ — он несимметричен.

Уравнения баланса сил и моментов (2), выражения векторов деформаций (3) и соотношения упругости (7),(9) составляют полную систему нелинейной теории стержней с растяжением и сдвигом.

Границными условиями к данной задаче являются заданные выражения сил, моментов, радиус-вектора и тензора поворота. Встречаются лишь такие комбинации, из которых нельзя определить работу, — таковы естественные граничные условия вариационной постановки.

2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

Можно использовать рис. 1. Векторы $\underline{r}, \underline{Q}, \underline{e}_1, \underline{e}_2$ лежат в плоскости чертежа, вектор момента $\underline{M} = M\underline{e}_3; \underline{e}_3 = \underline{e}_{30}$ — по декартовой оси z . Поворот (вокруг оси z , от x к y) определяется углом θ ; тензор $\underline{\underline{P}}$ не нужен. Из (3)–(5) получим $\underline{K} = \theta' \underline{e}_3$. Тензоры податливости примем в простейшем виде

$$\underline{\underline{A}} = A \underline{e}_3 \underline{e}_3, \underline{\underline{B}} = B_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1 + B_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2, \underline{\underline{C}} = 0. \quad (10)$$

Уравнения полной системы упрощаются:

$$\begin{aligned} \underline{Q}' &= -\underline{q}, M' = -\underline{e}_3 \cdot \underline{r}' \times \underline{Q} + m = -x' Q_y + y' Q_x + m, \\ \theta' &= AM, \underline{\underline{\Gamma}} = \underline{r}' - \underline{\underline{P}} \cdot \underline{r}'_0 = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{Q}. \end{aligned} \quad (11)$$

Перейдем здесь к проекциям на оси x, y . Поскольку $\underline{r}'_0 = \underline{e}_{10}$, $\underline{P} \cdot \underline{e}_{k0} = \underline{e}_k$, то

$$\begin{aligned} \underline{r}' &= (1 + B_1 Q_1) \underline{e}_1 + B_2 Q_2 \underline{e}_2 \stackrel{\Delta}{=} \underline{d} \rightarrow \\ x' &= d_x = (1 + B_1 Q_1) \cos \Theta - B_2 Q_2 \sin \Theta, \Theta \equiv \theta + \alpha, \\ y' &= d_y = (1 + B_1 Q_1) \sin \Theta + B_2 Q_2 \cos \Theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Введен $\alpha(s)$ — угол между \underline{e}_{10} и осью x ; тогда Θ — между \underline{e}_1 и x . При этом

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_x \cos \Theta + Q_y \sin \Theta, \\ Q_2 &= -Q_x \sin \Theta + Q_y \cos \Theta \rightarrow \underline{d} = \underline{d}(Q_x, Q_y, \theta, s). \end{aligned} \quad (13)$$

Внешняя нагрузка $\underline{q}(s) = q_x \underline{e}_{10} + q_y \underline{e}_{20}$ и $\underline{m} = m \underline{e}_{30}$ произвольна и может содержать сосредоточенные силы и моменты (с дельта-функцией). Приходим к системе ОДУ шестого порядка:

$$\begin{aligned} Q'_x &= -q_x, Q'_y = -q_y, M' = -d_x Q_y + d_y Q_x + m, \\ \theta' &= A M, x' = d_x, y' = d_y. \end{aligned} \quad (14)$$

Следует добавить к системе шесть граничных условий в компонентах, описывающих нагрузки, повороты и координаты концов стержня.

3. АЛГОРИТМ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В системе компьютерной математики *Mathcad* есть встроенные средства решения краевых задач для систем ОДУ. Система (14) представляется в матричной форме:

$$Y' = F(s, Y), \quad Y = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ M \\ \theta \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -pq_x(s) \\ -pq_y(s) \\ -d_x Y_1 + d_y Y_0 + m \\ AY_2 \\ d_x \\ d_y \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} d_x(Y) &\stackrel{\Delta}{=} (1 + B_1 Q_1(Y)) \cos(Y_3 + \alpha(s)) - B_2 Q_2(Y) \sin(Y_3 + \alpha(s)), \\ d_y(Y) &\stackrel{\Delta}{=} (1 + B_1 Q_1(Y)) \sin(Y_3 + \alpha(s)) + B_2 Q_2(Y) \cos(Y_3 + \alpha(s)), \\ Q_1(Y) &\stackrel{\Delta}{=} Y_0 \cos(Y_3 + \alpha(s)) + Y_1 \sin(Y_3 + \alpha(s)), \\ Q_2(Y) &\stackrel{\Delta}{=} -Y_0 \sin(Y_3 + \alpha(s)) + Y_1 \cos(Y_3 + \alpha(s)). \end{aligned} \quad (16)$$

Краевая задача для системы (15) решается с помощью встроенных функций *sbval-rkfixed*, реализующих метод стрельбы. В некоторых случаях целесообразно использовать только метод Рунге—Кутты, занимаясь “пристрелкой” вручную.

4. ПРЯМОЙ СТЕРЖЕНЬ

Рассмотрим задачу о сжатии (с изгибом) консольного прямого стержня (рис. 2). Сила на свободном конце имеет небольшую поперечную компоненту.

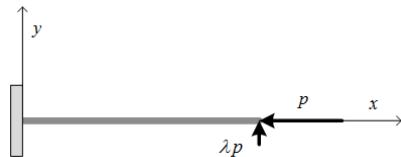


Рис. 2. Продольно-сжатый стержень
с малой поперечной нагрузкой.

Используем уравнения (14), в них равны нулю распределенные нагрузки и моменты. Границные условия:

$$\begin{aligned} s = 0 : \quad & \theta = 0, \quad x = 0, \quad y = 0; \\ s = L : \quad & M = 0, \quad Q_x = -p, \quad Q_y = \lambda p. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь p — параметр нагрузки, $\lambda \ll 1$ — малый параметр. Из первых двух уравнений (14) и граничных условий (17) имеем

$$\begin{aligned} Q_x' &= 0, \quad Q_y' = 0; \quad Q_x(L) = -p; \quad Q_y(L) = \lambda p, \\ Q_x(s) &= \text{const} = -p, \quad Q_y(s) = \text{const} = \lambda p. \end{aligned} \quad (18)$$

Для конкретных значений параметров и $\lambda = (0.1; 0.01; 0.001)$ методом стрельбы найдены численные решения уравнений при увеличении p . Форма стержня изображена рис. 3. На рис. 3, 4 на вклейке видно, что при достижении определенной нагрузки (критической) дальнейшее ее увеличение приводит к резкому увеличению прогибов.

5. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ СТЕРЖЕНЬ С АНАЛИТИЧЕСКИМ ЗАДАНИЕМ ФОРМЫ

Представленный в параграфе 4 алгоритм позволяет рассчитывать стержни произвольной формы с аналитическим заданием:

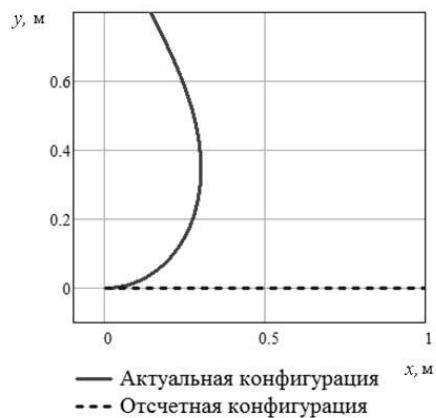


Рис. 3. Форма стержня при закритической нагрузке.

$x = x(s), y = y(s)$. Это задание может быть результатом интерполяции сплайнами (см. параграф 7). А пока рассмотрим схему на рис. 4, где задана кривизна $k(s)$ недеформированного стержня как функция материальной координаты s (от 0 до L).

Известно, что $k(s)$ определяет форму линии с точностью до перемещения твердого тела. Из формул Френе имеем:

$$(\cos \alpha)' = -k(s) \sin \alpha, (\sin \alpha)' = k(s) \cos \alpha, x_0' = \cos \alpha, y_0' = \sin \alpha. \quad (19)$$

Границные условия на левом конце недеформированного стержня:

$$s = 0 : \cos \alpha = 1, \sin \alpha = 0, x_0 = 0, y_0 = 0. \quad (20)$$

Система из четырех уравнений в компонентах с граничными условиями решена численно как начальная задача Коши.

После построения формы стержня используем уравнения статики стержня в плоскости (15). Границные условия будут в соответствии с рис. 4:

$$\begin{aligned} s = 0 : & x = 0, y = 0, \theta = 0, \\ s = L : & x = x_0(L), y = y_0(L), M = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

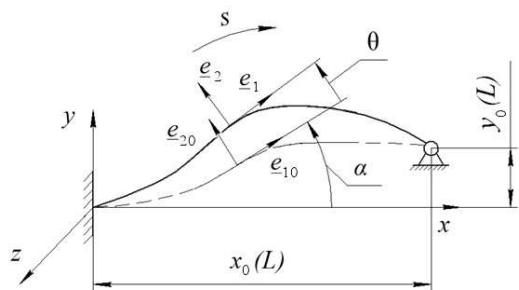


Рис. 4. Стержень с заданной кривизной.

Были решены уравнения (15) в *Mathcad* для частного случая (в системе СИ):

$$L = 1, \quad A = 0.022, \quad B_1 = 2.976 \times 10^{-8}, \quad B_2 = 9.143 \times 10^{-8}, \\ q_y = 1; k(s) = -2 \sin(5s) + 3.5s, \quad p_{\min} = -3200, \quad p_{\max} = 1850.$$

На рис. 5 показаны формы стержня при положительной и отрицательной нагрузке.

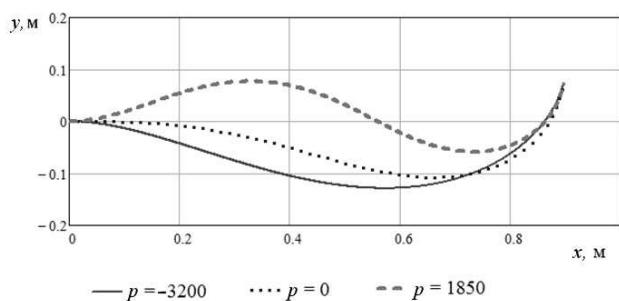


Рис. 5. Форма стержня, начальная и деформированная.

На рис. 6 представлены нагрузка в зависимости от прогибов середины стержня.

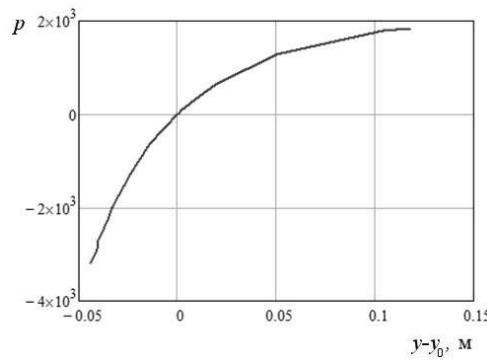


Рис. 6. Нагрузка в зависимости от прогибов.

6. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ СТЕРЖЕНЬ С ЗАДАНИЕМ ФОРМЫ ПО ТОЧКАМ

Стержень задан набором точек с тремя массивами: ξ_i, x_{0i}, y_{0i} (рис. 7). Здесь ξ — номера точек от 0. Интерполяция дает параметрическое задание линии: $x_0 = x_0(\xi), y_0 = y_0(\xi)$ (ξ как материальная координата). Связь с дуговой координатой в отсчетной конфигурации: $ds = md\xi, m = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}$. Радиус-вектор $\underline{r}_0(\xi) = x_0(\xi)\underline{e}_{10} + y_0(\xi)\underline{e}_{20}$. Орт касательной $\underline{t}_0 = \underline{r}_0' = m^{-1}\dot{\underline{r}}_0 \Rightarrow \cos\alpha = m^{-1}\dot{x}_0, \sin\alpha = m^{-1}\dot{y}_0$ (рис. 8).

При деформации каждая частица стержня поворачивается на угол θ (рис. 8). Вследствие сдвига “направляющий” орт \underline{e}_1 не равен орту касательной \underline{t} после деформации.

Используем уравнения нелинейной статики стержней в плоскости (14). Примем тензоры податливости в виде (10). Используем здесь выражения компонент силы:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_x \cos\Theta + Q_y \sin\Theta, \\ Q_2 &= -Q_x \sin\Theta + Q_y \cos\Theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{d} = \underline{d}(Q_x, Q_y, \Theta, \xi). \quad (22)$$

Напомним, здесь угол $\Theta \equiv \theta + \alpha$.

Внешняя нагрузка $\underline{q}(s) = q_x\underline{e}_{10} + q_y\underline{e}_{20}$ произвольна и может содержать сосредоточенные силы (с дельта-функцией). С коорди-

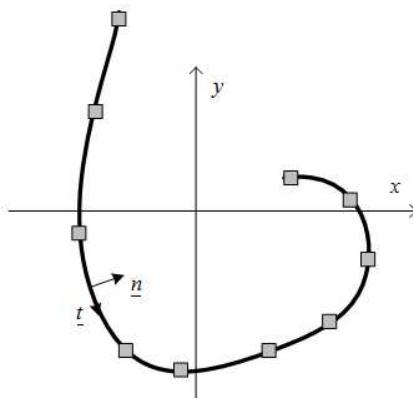


Рис. 7. Форма стержня, заданная по точкам.

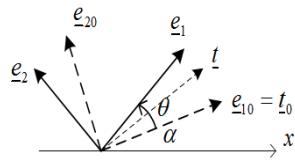


Рис. 8. Орты отсчетной и актуальной конфигурации.

натой ξ получается выражение

$$q(s)ds = \tilde{q}(\xi)d\xi \Rightarrow q(s) = m^{-1}\tilde{q}(\xi). \quad (23)$$

Можно перейти к дифференцированию по ξ , умножив правые части всех шести уравнений (14) на m , поскольку $(\dots)' = m^{-1}(\dots)'$.

При заделке на “левом” конце и свободном “правом” граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} s = 0 (\xi = 0) : & x = x_0, y = y_0, \theta = 0; \\ s = L (\xi = l) : & Q_x = Q_y = 0, M = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Задача является статически неопределенной — невозможно найти момент $M(\xi)$ без учета деформации. Но можно проинтегрировать уравнения для сил:

$$Q_x(\xi) = \int_{\xi}^l \tilde{q}_x(\xi) d\xi, \quad Q_y(\xi) = \int_{\xi}^l \tilde{q}_y(\xi) d\xi. \quad (25)$$

Преобразуя систему ОДУ для работы в системе компьютерной математики *Mathcad*, имеем:

$$\dot{Y} = D(\xi, Y), \quad Y = \begin{pmatrix} M \\ \theta \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad D = m \begin{pmatrix} -d_x Q_y + d_y Q_x \\ AY_0 \\ d_x \\ d_y \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} d_x(\xi, Y_1) &= (1 + B_1 Q_1(\xi, Y_1)) \cos \Theta(\xi, Y_1) - B_2 Q_2(\xi, Y_1) \sin \Theta(\xi, Y_1), \\ d_y(\xi, Y_1) &= (1 + B_1 Q_1(\xi, Y_1)) \sin \Theta(\xi, Y_1) + B_2 Q_2(\xi, Y_1) \cos \Theta(\xi, Y_1), \\ \Theta(\xi, Y) &= Y_1 + \alpha(\xi), \\ Q_1(\xi, Y_1) &= Q_x(\xi) \cos \Theta(\xi, Y_1) + Q_y(\xi) \sin \Theta(\xi, Y_1), \\ Q_2(\xi, Y_1) &= -Q_x(\xi) \sin \Theta(\xi, Y_1) + Q_y(\xi) \cos \Theta(\xi, Y_1). \end{aligned} \quad (27)$$

Однако стоит преобразовать $\cos \Theta$ и $\sin \Theta$:

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= m^{-1} (\cos Y_1 \cdot \dot{x}_0 - \sin Y_1 \cdot \dot{y}_0), \\ \sin \Theta &= m^{-1} (\sin Y_1 \cdot \dot{x}_0 + \cos Y_1 \cdot \dot{y}_0). \end{aligned} \quad (28)$$

Для ускорения вычислений к сложным зависимостям от ξ применяется линейная интерполяция.

Но краевую задачу даже с одним параметром процедурой *sbval* решить не удалось. Поэтому сделан эквивалент.

Для конкретных значений входящих в уравнения параметров (в системе СИ): $A = 1.63 \times 10^{-5}$, $B_1 = 2.546 \times 10^{-9}$, $B_2 = 7.945 \times 10^{-9}$, $p = 150.243$ и заданной с помощью массивов точек формы стержня (см. таблицу) были проведены расчеты. Результаты — отсчетная и актуальная конфигурации стержня — представлены на рис. 5 на вклейке.

Массив точек, определяющий форму стержня

ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_0	-1.3	-1.6	-1.7	-1.1	-0.3	1.2	2.1	2.6	2.4	1.5
y_0	2.9	1.5	-0.4	-2.0	-2.5	-2.3	-1.7	-0.8	0.2	0.5

7. ЭФФЕКТЫ РАСТЯЖЕНИЯ И СДВИГА

Применяя аналитические методы, обычно ограничиваются классической теорией без сдвига — это намного проще. Но с использованием компьютерной математики учет сдвига никак не усложняет расчет (см. [5]).

Известно, что эффекты растяжения и сдвига значительны для быстременяющихся решений, относительная толщина при этом возрастает. Их роль важна и в таких специальных случаях, как изгиб прямого стержня с закрепленными концами или деформация замкнутого кольца внутренним давлением.

Впечатляющей иллюстрацией с качественными эффектами может служить задача Эйлера о сжатии консольной балки "мертвой" силой. В этом случае получается следующая краевая задача [4]:

$$A_3^{-1}\theta'' + Q \sin \theta + \frac{1}{2}Q^2(B_2 - B_1) \sin 2\theta = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0. \quad (29)$$

Линеаризуя, получим задачу на собственные значения с квадратным уравнением для критической силы Q . Если (как обычно) жесткость на растяжение больше, чем на сдвиг, то корни уравнения имеют разные знаки. Положительный корень немногим меньше критической силы Эйлера. Отрицательный же корень означает неустойчивость при растяжении, что кажется парадоксальным. Если же жесткость на растяжение меньше, то неустойчивость может вообще отсутствовать. Об этом написано в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Коссера Э. и Коссера Ф. Заметка о теории евклидова действия/ Пер. А. Безрукова. М.: Тип. Кушнерева И.Н., 1911. 71 с.
2. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.

3. Елисеев В. В. Механика упругих тел. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 336 с.
4. Елисеев В. В. Механика деформируемого твердого тела. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2006. 231 с.
5. Елисеев В. В., Зиновьев Т. В. Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в процессе укладки // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 1. С. 70–78.
6. Елисеев В. В., Оборин Е. А. Деформация и пластическое разрушение балок дорожного ограждения при наезде автомобиля // Наука и техника в дорожной отрасли. 2014. №1. С. 9–11.

ДОКЛАДЫ, НЕ ВОШЕДШИЕ В СБОРНИК

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ ИЗ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОТЛОВАНОВ, ОГРАЖДЕННЫХ ШПУНТАМИ

Доклад на семинаре 17 сентября 2013 г.

Е.В. ПЕСТЕРЕВ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается фильтрация из котлованов, огражденных шпунтами Жуковского через слой грунта, подстилаемый хорошо проницаемым напорным водоносным горизонтом, на кровле которого содержится водонепроницаемый участок. Для изучения инфильтрации на свободную поверхность формулируется смешанная многопараметрическая краевая задача теории аналитических функций, которая решается с помощью применения метода Полубариновой-Кочиной. Анализируются предельные случаи, связанные с отсутствием одного из факторов, характеризующих моделируемый процесс.

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ МЯГКИХ ОВОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Доклад на семинаре 29 октября 2013 г.

А.В. Кузьмин

РЕЗЮМЕ

В первой части работы рассматривается деформация бесконечной цилиндрической оболочки, сжимаемой двумя пластинами. Оболочка заполнена идеальной несжимаемой жидкостью. Получены формулы, выражающие зависимость деформации и давления в жидкости от расстояния между пластинами.

Вторая часть работы посвящена исследованию осесимметричной деформации тороидальной оболочки, образованной сворачиванием в тор мягкой цилиндрической оболочки. Оболочка находится под действием внутреннего давления. Проведено численное интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих деформацию оболочки. Получены следующие члены асимптотических разложений решений этой системы. Проведено сравнение численных и асимптотических результатов.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИБРАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ
ГРАВИТАЦИОННО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Доклад на семинаре 26 ноября 2013 г.

Е.А. Косяков

РЕЗЮМЕ

Рассматривается гравитационно-ориентированное твердое тело на круговой кеплеровой орбите в центральном гравитационном поле. Вращательное движение тела зависит от возмущающего момента, который поддается кубической аппроксимации. Включение величин третьего порядка малости позволило получить обобщение известных уравнений в канонических переменных для случая действия как потенциальных, так и непотенциальных сил. Система уравнений такого вида удобна для анализа квазилинейных колебаний тела при движении вокруг его центра масс с использованием асимптотических методов нелинейной механики.

О ФОРМУЛАХ Г.В. КОЛОСОВА В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

Доклад на семинаре 25 февраля 2014 г.

Ю.М. Даляр

РЕЗЮМЕ

Дано физическое и математическое истолкование зависимостей Г. В. Колосова, связывающих компоненты тензора напряжений с двумя регулярными функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$. Приведены новые соотношения, эквивалентные этим зависимостям, установлена их форма для ограниченного и неограниченного упругого тела.

Найдено точное аналитическое решение периодической задачи о плоскости, ослабленной на оси абсцисс неограниченным числом прямолинейных трещин. Выявлены условия, позволяющие свести первую основную краевую задачу теории трещин к задаче Гильберта–Привалова для функции $\Phi(z)$.

**ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ
“БЕДРЕННАЯ КОСТЬ–РЕГЕНЕРАТ–ИМПЛАНТАТ” ПРИ РЕАБИЛИТАЦИИ**

Доклад на семинаре 11 марта 2014 г.

О.В. Щепилина

РЕЗЮМЕ

Цель исследования — разработка метода исследования бедренной кости после остеосинтеза с учетом мышечной активности и изменения моду-

ля упругости (E , МПа) на каждом этапе ремоделирования костного регенерата. Разработан алгоритм, выполнены расчеты и проведены исследования и анализ напряженно-деформированного состояния системы “бедренная кость–регенерат–имплантат” на разных стадиях реабилитации.

Модель бедренной кости системы “бедренная кость–регенерат–имплантат” при введенных допущениях построена с помощью программного продукта Mimics, пакета прикладных программ SolidWorks и включает кость, представленную двумя однородными изотропными слоями, регенерат и имплантат–титановые винты.

По результатам исследований получены зависимости деформации в элементах системы от времени при динамическом нагружении головки бедренной кости в соответствии с клиническим экспериментом и сформулированы рекомендации по внесению коррекций в существующие технологии реабилитации.

Ровот против астероида

Доклад на семинаре 8 апреля 2014 г.

Б.А. Смольников, В.А. Леонтьев

РЕЗЮМЕ

Предлагается концепция транспортировки астероида на безопасную для Земли орбиту. Рассматриваются вопросы как вращательного, так и поступательного движения транспортируемого объекта. В качестве тягача предполагается использовать беспилотный космический аппарат с малой тягой.

Использование программного пакета Comsol Multiphysics в задачах биомеханики глаза

Доклад на семинаре 22 апреля 2014 г.

Е.Б. Воронкова

РЕЗЮМЕ

В докладе обсуждается моделирование в программном пакете COMSOL Multiphysics на примере задачи об изменении внутрглазного давления при введении в глаз дополнительного объема жидкости. Глаз моделируется как эллипсоидальная оболочка вращения, состоящая из одного (только склеры) или двух сегментов (склеры и роговица). Изучается влияние свойств тканей глаза на поведение оболочки. Показаны возможности COMSOL для задания неоднородных свойств тканей, а также при решении связанных задач, например механики твердого тела и механики жидкости.

ХРОНИКА

26-Й СЕМИНАР СЕВЕРНЫХ СТРАН ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

25–26 октября 2013 г. в Осло (Норвегия) прошел 26-й семинар Северных стран по вычислительной механике. Организатором семинара являлась Северная ассоциация вычислительной механики (NoACM, <http://www.noacm.org/>), представляющая интересы Международной ассоциации вычислительной механики (IACM). Первый подобный ежегодный семинар прошел в 1988 г. в Гётеборге (Швеция). В семинаре традиционно участвуют представители стран Северной Европы: Дании, Финляндии, Исландии, Норвегии, Швеции и Прибалтики (Эстония, Латвия и Литва).

Этот раз семинар проводил Центр биомедицинских вычислений (Center for Biomedical Computing (CBC)), входящий в состав исследовательской лаборатории Simula (Simula Research Laboratory). Оргкомитет возглавлял доцент Anders Logg. В семинаре приняли участие молодые представители российской научной школы, постоянные участники семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”: К.А. Игнатьева (СПбГУ) и А.М. Ермаков.

Семинар был посвящен вопросам, связанным с вычислительными методами и их приложениям к широкому классу задач механики. С пленарными докладами выступили Dr. Erik Burman (University College London, UK), Prof. Elena Celledoni (Norwegian University of Science and Technology, Norway), Asso. Prof. Jakob S. Jensen (Technical University of Denmark, Denmark), Dr. Juho Könöö (Wärtsilä, Finland) и Dr. Garth Wells (University of Cambridge, UK).

Научный уровень докладов был очень высоким, атмосфера на семинаре — творческой и дружественной, чему способствовали комфортные условия для общения, равноправие участников, отсутствие барьеров для обмена мнениями, обсуждение актуальных задач и перспективы партнерства по итогам конференции.

Следующий, 26-й семинар планируется провести в Стокгольме (Швеция).

К.А. Игнатьева

ОБ АВТОРАХ

Альчибаев Даниил Витальевич — студент магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела. Научный руководитель — проф. П.Е. Товстик. E-mail: soor1204@gmail.com

Бауэр Светлана Михайловна — доктор физико-математических наук, профессор кафедры гидроупругости СПбГУ. Область научных интересов — биомеханика и механика деформируемого твердого тела. E-mail: s_bauer@mail.ru

Бестужева Алла Николаевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики ПГУПС. Автор статей, посвященных задачам о волновых движениях жидкости в области переменной глубины, опубликованных в журналах “Океанология”, “Прикладная математика и механика”, “Прикладная математика и техническая физика” и др. E-mail: bes_alla@inbox.ru

Воронкова Ева Боруховна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования энергетических систем факультета прикладной механики — процессов управления СПбГУ, автор статей по вопросам биомеханики и механики твердого тела. E-mail: e.voronkova@spbu.ru

Даль Юрий Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела СПбГУ, заслуженный деятель науки Российской Федерации. Область научных интересов — математические методы механики деформируемого тела, линейная и нелинейная теория упругости, механика разрушения, влияние физи-

ческих и химических полей на прочность деформируемых тел.
E-mail: ymdahl@yandex.ru

Елисеев Владимир Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры “Машиноведение и основы конструирования” СПбПУ. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела. E-mail: yeliseyev@inbox.ru

Зайцева Марина Владимировна — студентка магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела. Научный руководитель — доц. Н.В. Наумова. E-mail: mariza1991@list.ru

Иванов Денис Николаевич — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела. E-mail: d.n.ivanov@spbu.ru

Ивченкова Алина Владимировна — студентка магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела, биомеханика. Научный руководитель — проф. С.М. Бауэр. E-mail: alinchik_@bk.ru

Королев Александр Игоревич — студент 3-го курса факультета “Управление процессами перевозок” ПГУПС. Область научных интересов — информатика и информационная безопасность. Научные руководители — доц. А.Н. Бестужева и проф. В.В. Егоров. E-mail: alig.korolev@gmail.com

Костенко Богдан Валерьевич — студент 4-го курса факультета “Мосты и тоннели” ПГУПС. Область научных интересов — комбинированные системы шпренгельного типа. Научные руководители — доц. А.Н. Бестужева и проф. В.В. Егоров. E-mail: polo_olop@mail.ru

Ксяков Евгений Александрович — студент магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Сфера научных интересов — нелинейная механика. Научный руководитель — проф. А.А. Тихонов. E-mail: 42_@mail.ru

Кузьмин Андрей Владимирович — студент магистратуры математико-механического факультета СПбГУ. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела. Научный ру-

ководитель – проф. С.Б. Филиппов. E-mail: ndrewk@ya.ru

Леонтьев Виктор Анатольевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Центрального научно-исследовательского и опытно-конструкторского института робототехники и технической кибернетики (ЦНИИ РТК). Область научных интересов – механика, физика, математическое и компьютерное моделирование динамических систем. E-mail: vleont@mail.ru

Лукин Мирослав Игоревич – студент 4-го курса факультета “Мосты и тоннели” ПГУПС. Область научных интересов – комбинированные системы шпренгельного типа. Научные руководители – доц. А.Н. Бестужева и проф. В.В. Егоров. E-mail: miroslav_93@mail.ru

Наумова Наталья Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела. E-mail: n.v.naumova@spbu.ru

Оборин Евгений Александрович – студент магистратуры кафедры “Машиноведение и основы конструирования” Института металлургии, машиностроения и транспорта СПбПУ. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела. Научный руководитель — проф. В.В. Елисеев. E-mail: oborin1@yandex.ru

Пестерев Егор Васильевич – аспирант кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации по специальности "Механика жидкости, газа и плазмы". Автор 25 опубликованных работ по вопросам теории фильтрации и термодинамики. Научный руководитель – проф. Э.Н. Береславский. E-mail: yogurt@live.ru

Седов Максим Сергеевич – аспирант 2-го курса кафедры “Прикладная математика” электротехнического факультета ПГУПС. Область научных интересов — математическое моделирование. Научные руководители – доц. А.Н. Бестужева и проф. В.В. Егоров. E-mail: maarcss@gmail.com

Смольников Борис Александрович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры механики и процессов управления СПбПУ, а также внештатный сотрудник Центрально-го научно-исследовательского и опытно-конструкторского института робототехники и технической кибернетики (ЦНИИ РТК). Об-

ласть научных интересов — общая механика, биомеханика и робототехника, движение космических объектов, теория управления.
E-mail: smolnikovba@yandex.ru

Трофименко Павел Валерьевич — аспирант кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — теория оболочек, биомеханика. Автор одной опубликованной работы. Научный руководитель — проф. С.М. Бауэр. E-mail: pasha.trofimenko@inbox.ru

Щепилина Олеся Валерьевна — соискатель кафедры Прикладной механики и инженерной графики Санкт-Петербургского Электротехнического университета «ЛЭТИ». Сфера научных интересов — биомеханика нижних конечностей. Автор трех опубликованных научных работ. Научный руководитель — проф. П.И. Бегун. E-mail: disjunctio@gmail.com

УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА, ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ в 2012–2014 гг.

Petr Aksenov (Петр Сергеевич Аксенов) — PhD (Computer Science), Hasselt University (Belgium), 2012. Supervisor — Prof. Karin Coninx.

Карпенко Антон Геннадьевич — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2013. Научный руководитель — проф. С.К. Матвеев.

Помыткин Сергей Павлович — докт. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2013.

Рубашова Дарья Александровна — канд. техн. наук, СПбГЭТУ, 2013. Научный руководитель — проф. П. И. Бегун.

SUMMARIES

Alchibaev .D.V. Buckling of a cylindrical anisotropic shell under normal pressure.

Buckling under normal pressure of a cylindrical thin shell of medium length made of an anisotropic material described by 21 elastic modules is considered. First two terms of the asymptotic expansion in power series of the relative thickness for the buckling mode are obtained. The correction to the buckling load has an order of the squared relative thickness. The differences for the buckling loads of anisotropic and isotropic shells are discussed. For the anisotropic shell the buckles are inclined with respect to the cylinder generatrix.

Keywords: anisotropic shell, shell buckling.

REFERENCES

1. *Donnell L.H.* Beams, Plates and Shells. New York: McGraw-Hill Book Company. 1976. 453 p.
2. *Ambartsumian S.A.* General theory of anisotropic shells. Moscow: Nauka., 1974. 446 p. (in Russian).
3. *Rodionova V.A., Titaev B.F., Chernykh K.F.* Applied Theory of Anisotropic Plates and Shells, St. Petersburg Univ. Press, 1996. P. 40–80 (in Russian).
4. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Two-dimentional model of plates made of an anisotropic material. Trudy seminara “Komputernye metody v mehanike sploshnoi sredy”. St. Petersburg Univ. Press, 2008. P. 4–16.
5. *Tovstik P.E.* Two-dimentional models of plates made of anisotropic material. Doklady Physics, 2009. Vol. 425. No. 4, P. 489–491.
6. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Buckling problems of a cylindrical shell made of anisotropic material. Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1, No. 2, 2013. P. 127–137.
7. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* One-dimensional models of beam made of anisotropic material with inclined anisotropy. Mechanics of Solids. Vol. 46, No. 6. 2011. P. 888–897.
8. *Tovstik P.E., Smirnov A.L.* Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells. World Scientific. Serie A. Singapore; New Jersey; London; Hong Kong, 2002. P. 347.

Bauer S. M., Voronkova E. B. Models of shells and plates in the problem of ophthalmology.

In this paper an overview of the mathematical models, developed in collaboration with ophthalmologists is presented. Models for the stress-strain state analyses of the eyeball after retinal detachment surgery, models related to the theory of accommodation of the eye are briefly described. The mathematical model for applanation tonometry and determination of true intraocular pressure (IOP) are discussed. Models that can be used for assessment of the effect of out-of-sphericity of the cornea and the scleral shapes, the central corneal thickness on intraocular pressure readings are displayed.

New results in solid mechanics were obtained while developing biomechanical models of the eye. For example, the problem of stability of spherical shell subjected to concentrated force and inner pressure, the problem of axisymmetric stability of annular plates, the problem of stability of orthotropic spherical segments under inner pressure and load with flattened foundation, the problems of deformation of spherical and cylindrical layers subjected to inner and outer pressure were solved. For pressurized spherical and cylindrical layers, the accuracy of the approximate solutions, obtained with the refined shell theories is analyzed by comparison of these solutions with the 3D exact solutions.

Keywords: mathematical simulation, shell theory, nonclassical models

REFERENCES

1. *Avetisov S.E., Bubnova I.A., Antonov A.A* The study of the effect of the corneal biomechanical properties on the intraocular pressure measurement // "Bulletin of the Siberian Branch of the Russian Academy of Medical Sciences". 2009. N 4. P. 30-33 (in Russian).
2. *Ambartsumyan S.A.* Theory of anisotropic plates. M., 1967. 226 p. (in Russian).
3. *Atroshenko E.I.* Models of some surgery in ophthalmology // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2006–2007 // St.Petersburg University Press, 2007. P. 29–38 (in Russian).
4. *Balashevich L.I., Kachanov A.B., Nikulin S.A., Bauer S.M., Zimin B.A.* Clinical Aberrometry and Keratotopography in Emmetropias and Ametropias // Ocular Biomechanics. M., 2007, P. 230–237 (in Russian).

5. *Balashevich L.I., Kachanov A.B., Nikulin S.A., Bauer S.M., Zimin B.A., Vovnenko N.V.* Aberrations of eyes in Emmetropia and Ametropias // Ocular Biomechanics. M., 2007, P. 238–241 (in Russian).
6. *Balashevich L.I., Kachanov A.B., Nikulin S.A., Golovatenko S.P., Bauer S.M., Zimin B.A.* The effect of cornea thickness on the intraocular pressure measurement // Ophthalmosurgery. 2005. N 1. P. 27–29 (in Russian).
7. *Bauer S.M.* On the necessity of creation of mathematical model of the theory of accommodation // Ocular Biomechanics. M., 2001, P. 137–141 (in Russian).
8. *Bauer S.M.* Axisymmetric deformations of inhomogeneous circular plates// Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1, No. 3. 2002, P. 65–68 (in Russian).
9. *Bauer S.M.* On the applanations method of the intraocular pressure measurements// Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2006–2007 // St.Petersburg University Press, 2007. P. 84–99 (in Russian).
10. *Bauer S.M., Voronkova E.B.* Nonclassical shell theories for the analysis of transversally isotropic spherical and cylindrical layers under normal pressure. // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1, N 3. 2011. P. 86–93 (in Russian).
11. *Bauer S.M., Voronkova E.B., Ermakov A.M., Kachanov A.B., Fedotova L.A.* The change of stress-strain state of cornea and IOP measurements after refractive surgery on the hyperopia // Proceedings of VI All-Russian national forum. 2013. Vol. 1. P. 191–194 (in Russian).
12. *Bauer S.M., Voronkova E.B., Romanova A.A.* On the unsymmetrical buckling of circular plates under normal pressure // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1, No. 1. 2012. P. 80–85 (in Russian).
13. *Bauer S.M., Voronkova E.B., Semenov B.N.* Mathematical models for applanational tonometry // Izvestiya VUZov. Severo-Kavkazskii region. Natural sciences. 2009. P. 19–22 (in Russian).
14. *Bauer S.M., Voronkova E.B., Semenov B.N.* Mechanical aspects of ocular rigidity // Modern problems of continuum mechanics. Proceedings XIV international Conference. Rostov-na-Donu. 2010. Vol. 1. P. 59–62 (in Russian).
15. *Bauer S.M., Voronkova E.B., Tipyasev A.S.* On Pressure-Volume relationship for a human eye shell // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1, No. 4. 2010, P. 106–109 (in Russian).
16. *Bauer S.M., Zamuraev L.A., Kotliar K.E.* Model of the transversal-isotropic spherical layer for estimation of intraocular pressure changes after intravitreal injections // Russian Journal of Biomechanics. 2006. Vol. 2. P. 43–49 (in Russian).

17. *Bauer S.M., Zimin B.A., Volkov V.V., Kachanov A.B.* On the biomechanical model of choroidea detachment // Applied Mechanics. SPb., 1995. Issue 9. P. 149–155 (in Russian).
18. *Bauer S.M., Zimin B.A., Kolezhuk U.N., Kachanov A.B., Lyubimov G.A.* On the Mathematical Simulation of the Intraocular Pressure Measurement by Maklakov's Method // Ocular Biomechanics. M., 2005. P. 121–123 (in Russian).
19. *Bauer S.M., Zimin B.A., Mironov A.N., Begun P.I., Kachanov A.B.* On the mathematical model of the eye after circlage // Damage to the organ of vision in children. Proceedings of the Saint-Petersburg State Pediatric Medical University. SPb., 1991. P. 57–64 (in Russian).
20. *Bauer S.M., Zimin B.A., Fedorchenko M.V., Balashevich L.I., Kachanov A.B.* On the change of the strength of the cornea after refractive surgery // Ocular Biomechanics. M., 2002. P. 55–60 (in Russian).
21. *Bauer S.M., Zimin B.A., Shelepin Yu.E., Vovnenko N.V., Lahman K.O.* Hydrodynamic model the intraocular fluid flow under oculagyratation // Modern problems of continuum mechanics. Proceedings XIV international Conference. Rostov-na-Donu., 2010. Vol. 2, P. 112–115 (in Russian).
22. *Bauer S.M., Karamshina L.A., Kachanov A.B.* Mechanical Models of the Measurements of Intraocular Pressure by Goldmann and Maklakov Applanation tonometers after refractive surgery // Russian Journal of Biomechanics. 2012. Vol. 16. No. 3. P. 25–31 (in Russian).
23. *Bauer S.M., Karamshina L.A., Kachanov A.B., Kornikov V.V.* Intraocular pressure measurement models after refractive surgery // Modern problems of continuum mechanics. Proceedings XIV international Conference. Rostov-na-Donu. Vol. 2, 2012. P. 26–33 (in Russian).
24. *Bauer S.M., Kachanov A.B., Semenov B.N., Sliesoraityte I.* The effect of cornea thickness on the measurements of intraocular pressure by applanation methods // Ocular Biomechanics. M., 2007. P. 119–124 (in Russian).
25. *Bauer S.M., Lyubimov G.A., Tovstik P.E.* Mathematical Modelling of Maklakoff's Method for Mesuring the Intraocular Pressure // Fluid Dynamics, Vol. 40, N 1. 2005, P. 20–33 Translated from Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk, Mechanika Gidkosti i Gaza, N 1. 2005. P. 24–39
26. *Bauer S.M., Lyubimov G.A., Tovstik P.E.* Physical analysis on intraocular pressure measurement by Maklakov's method // Ocular Biomechanics. M., 2004. P. 91–96 (in Russian).
27. *Bauer S.M., Mironov A.N.* The contact between a spherical shell and an elastic ring // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1, No. 3. 2007. P. 111–114 (in Russian).
28. *Bauer S.M., Tiplyasev A. S.* On the Mathematical Model of the Measuring of the Intraocular Pressure by Maklakov Method // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1, No. 4. 2008. P. 98–101. (in Russian)

29. *Bauer S.M., Tovstik P.E., Zimin B.A.* The simplest models of shells and plates in ophthalmology. SPb., 2000. 92 p. (in Russian).
30. *Bauer S.M., Tovstik P.E., Kachanov A.B.* On the mathematical models of glaucoma. // Russian Journal of Biomechanics. 1999. Vol. 3. No. 2. P. 9–10.
31. *Volkov V.V.* Actual and the most perspective directions of study biomechanics of the eyes in normal and pathological states // Ocular Biomechanics. M., 2001. P. 3–4.
32. *Volkov V.V.* Pseudonormal Pressure Glaucoma. Guide for Physicians. M.: Meditsina, 2001 (in Russian).
33. *Voronkova E.B.* Mathematical models of glaucoma // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2005–2006 // St.Petersburg University Press, 2006. P. 82–107 (in Russian).
34. *Vurgafit M.B., Vurgafit Ya.M* Tonometric methods of the research of intraocular pressure and hydrodynamics of eye under glaucoma. Kazan, 1991. 112 p. (in Russian).
35. *Ermakov A.M.* Stress-strain state of orthotropic nonhomogeneous conjugated elliptical shells under inner pressure // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2008–2009 // St.Petersburg University Press, 2009. P. 4-16 (in Russian).
36. *Ermakov A.M.* Large deformations of orthotropic spherical shells under inner pressure // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1, No. 43. 2010, P. 119–126 (in Russian).
37. *Ermakov A.M.* Stress-strain state and stability of spherical segment under the load with the plane base. // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2011–2012 // St.Petersburg University Press, 2012. P. 78–89 (in Russian).
38. *Zamuraev L.A.* Deformation of transversally isotropic spherical layer under the inner and outer pressure. // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2005–2006 // St.Petersburg University Press, 2006. P. 119–129 (in Russian).
39. *Zolotuchina (Karamshina) L.A.* On the deformation of the multilayer Lamina Cribrosa // Russian Journal of Biomechanics. No. 4 (42), 2008. P. 40–46 (in Russian).
40. *Iomdina E.N.* Biomechanics of the scleral eye shell in myopia: diagnostics of damages and their experimental correction: abstract of doctoral dissertation. M., 2000. 32 p. (in Russian).
41. *Ivanova O.V.* Models of lens under accommodation // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2005–2006 // St.Petersburg University Press, 2006. P. 52–63 (in Russian).
42. *Ivchenkova A.V.* Deformation of the spherical segment under dynamic loading (the elementary model of a pneumotonometer) // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2013–2014 // St.Petersburg University Press, 2014 (in Russian).

43. *Ignateva K.A.* Buckling of axisymmetric equilibrium states of circular plates under normal pressure // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2012–2013 // St.Petersburg University Press, 2013. P. 21–34 (in Russian).
44. *Kalfa S.Yu.* Elastotonometry of eye // Russian Ophthalmological Journal. 1928. Vol. 8. N 2. P. 250–262 (in Russian).
45. *Karamshina L.A.* Mechanical models of applanation tonometry taking into account the cornea multilayer structure // Russian Journal of Biomechanics. 2011. No. 3. P. 30–36 (in Russian).
46. *Karamshina L.A.* On the deformations of double-layer transversal -isotropic spherical shell // Vestnik of St. Petersburg University, Ser. 1, No. 2. 2011, P. 133–138 (in Russian).
47. *Karamshina L.A.* On the deformations of three-layer isotropic spherical shell // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2010–2011 // St.Petersburg University Press. 2012. P. 15–26 (in Russian).
48. *Krakovskaya E.V.* On the deformation of the conjugated spherical shell under internal pressure // Vestnik of St. Petersburg University, Ser. 1, No. 2. 2008, P. 129–132. (in Russian)
49. *Krakovskaya E.V.* Stress-strain state of conjugated spherical shells under the internal pressure // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2006–2007 // St.Petersburg University Press. 2007. P. 84–99 (in Russian).
50. *Krakovskaya E.V.* Application of the conjugated theory of shells to some problem in Ophthalmology // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2005–2006 // St.Petersburg University Press. 2006. P. 5–19 (in Russian).
51. *Lahman K.O.* Hydrodynamic model the intraocular fluid flow under the moving of the head // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2010–2011 // St.Petersburg University Press. 2012. P. 65–70 (in Russian).
52. *Lebedev O.I., Yavorskii A.E.* The impact of refractive surgery on the level of intraocular pressure readings in myopic patients // Russian Journal of Ophthalmology. 2008. N 2. P. 23–25 (in Russian).
53. *Maklakoff A.N.* Ophthalmotonometry // Med.Obozrenie. 1884. Vol. 24. P. 1092–1095 (in Russian).
54. *Mironov A.N.* Axisymmetrical contact problem for not shallow spherical shells // Applied mechanics. Proceedings // St.Petersburg University Press. 1997. Vol. 10. P. 136–140 (in Russian).
55. *Mironov A.N., Semenov B.N.* Mathematical modelling of the episcleral sealing of the eye // Applied mechanics. Proceedings // St.Petersburg University Press, 1995. Vol. 9. P. 155–160 (in Russian).

56. *Mironov A. H.* On the construction of elastic potential of sclera's tissue // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2005–2006 // St.Petersburg University Press. 2006. P. 130–142 (in Russian).
57. *Mishina E.N.* On the estimation of stress-strain state of the eye shell under the bell load // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1, No. 2. 1995, P. 68–72 (in Russian).
58. *Mishina E.N.* The stress-strain state of orthotropic spherical shell under the bell load// Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1, No. 4. 1999 (in Russian).
59. *Morozov N.F.* To the question of the existence of an asymmetrical solution in the problem on the large deflection of a circular plates loaded by symmetrical load // Izvestija vishih uchebnih zavedenii, Mathematics. 1961. N 2. P. 126–129 (in Russian).
60. *Nestorov A. P., Bunin A. Y., Kantselson L. A.* Intraocular pressure, M.: Nauka, 1974. 381 p. (in Russian).
61. *Obrubov S.A., Sidorenko E.I., Fedorova V.N., Dubovaja T.K., Dreval A.A.* Acoustic Biomechanics of the eye and its clinic value. M., 2001. 128 p. (in Russian).
62. *Palii O.M., Spiro V.E.* Anisotropic Shells in Shipbuildings. Theory and Analysis. Leningrad: Sudostroenie, 1977. 386 p. (in Russian).
63. *Panov, D. Yu., Feodos'ev V.I.* Equilibrium and loss of stability of shallow shells with large deflections // J. Appl. Math. Mech, Vol. 12, 1948, P. 389–406 (in Russian).
64. *Romanova A.A.* On the models of the lamina cribrosa deformation // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2007–2008 // St.Petersburg University Press. 2008. P. 110–116 (in Russian).
65. *Rodionova V.A., Titaev B.F., Chenyh K.F.* Applied theory of plates and shells. SPb.: SPbU, 1996. 278 p. (in Russian).
66. *Svetlova O.V., Bauer S.M., Koshtis I.N.* Biomechanical aspects of the treatment of presbyopia by method's R. Schahar and H. Fukusaku // Proceedings of the international symposium 18–20.12.2001. M., 2001. P. 232–233 (in Russian).
67. *Taruta E.P., Erichev V.P., Larina T.Yu.* Controlling intraocular pressure after keratorefractive operations // Ocular Biomechanics. M., 2004. P. 120–122 (in Russian).
68. *Tiplyasev A.S.* The estimation of the effect of the curvature of cornea and sclera on intraocular pressure measurements by applanation tonometers. // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2008–2009 // St.Petersburg University Press. 2009. P. 98–111 (in Russian).
69. *Trofmenko P.V.* On pressure-volume dependence for a human eye // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2012–2013 // St.Petersburg University Press. 2013. P. 35–41 (in Russian).

-
70. *Trofmenko P.V.* Nonclassical shell theories for the analysis of transversally isotropic spherical layers under normal pressure // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2013–2014 // St.Petersburg University Press. 2014 (in Russian).
 71. *Franus D. V.* On mathematical models of tonography // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2012–2013 // St.Petersburg University Press. 2013. P. 42–52 (in Russian).
 72. *Battaglioli J.L., Kamm R.D.* Measurements of the compressive properties of scleral tissue // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. 1984. Vol. 25, No. 1. P. 59–65.
 73. *Bauer S.M.* Mechanical models of the development of glaucoma // Advances in Mechanics of Solids In Memory of Prof E M Haseganu. Singapore, 2006. P. 153–178.
 74. *Bauer S.M.* Mathematical simulation in ophthalmology // Shell and membrane theories in mechanics and biology: from Macro-to Nanoscale Structures. Proceedings of the international Scientific Conference. Minsk, 2013. P. 16–17.
 75. *Bauer S.M., Ermakov A.M.* Buckling of a spherical segment under the flat base load // Proceedings of the 2nd International Conference Optimization and Analysis of Structures. 2013. P. 24–27.
 76. *Bauer S.M., Krakovskaya E.V.* On the stress-strain state of the fibrous eye shell after refractive surgery // Proceedings of the 23rd Nordic Seminar on Computational Mechanics. 2010. P. 60–62.
 77. *Bauer S.M., Lyubimov G.A., Tovstik P.E.* On the mathematical simulation of the measuring of the intraocular pressure by Maklakov method // Technische Mechanik. 2004. Vol. 24, N 3. P. 231–235.
 78. *Bauer S.M. and Mironov A.N.* On the mathematical simulation of the stress-strain state of the eye shell undergoing the scleral buckling procedure // Proceedings of the XIII Conference of the European Society of Biomechanics. 2002. P. 726–727.
 79. *Bauer S.M., Romanova A.A., Semenov B.N.* Mathematical models for applanation tonometry // Proceedings of the 23rd Nordic Seminar on Computational Mechanics. Stockholm, 2010. P. 66–68.
 80. *Bauer S.M., Romanova A.A., Smirnov A.L.* On formulation of the problem on deformation of the lamina cribrosa // Russian Journal of Biomechanics. 2001. Vol. 5, N 3. P. 18–22.
 81. *Bauer S.M., Tovstik P.E.* Buckling of Spherical Shells under Concentrated Load and Internal Pressure // Technische Mechanik. 1998. Vol. 18. N 2. P. 135–139.
 82. *Bauer S.M., Tovstik P.E., Kachanov A.B.* On the stability of the eye shell under encerclng band // Technische Mechanik. 1995. Vol. 15, N 3. P. 183–190.

83. *Bauer S.M., Voronkova E.B.* On the deformation of the lamina cribrosa under intraocular pressure // Russian Journal of Biomechanics. 2001. Vol. 5, N 1. P. 273–82.
84. *Bauer S.M., Voronkova E.B.* The mechanical response of the lamina cribrosa to the elevated intraocular pressure // Proceedings of the XIII Conference of the European Society of Biomechanics. 2002. P. 712–713.
85. *Bauer S.M., Voronkova E.B.* On the unsymmetrical buckling of the nonuniform orthotropic circular plates // Lecture Notes in Computer Science. Numerical Analysis and its Applications. Springer. 2013. Vol. 8236. P. 198–205.
86. *Bauer S.M. and Voronkova E.B.* Nonclassical theories for bending analysis of orthotropic circular plate // Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. Gdansk, 2014. Vol. 3, P. 57–60.
87. *Bauer S.M., Voronkova E.B., Ignateva K.A.* Unsymmetric equilibrium states of inhomogeneous circular plates under normal pressure // Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. Gdansk, 2014. Vol. 3, P. 171–174.
88. *Cheo L.S., Reiss E.L.* Unsymmetric wrinkling of circular plates // Quart. Appl. Math. 1971. N 31. P. 75–91.
89. *Faucher A., Gregoire J., Blondeau P.* Accuracy of goldmann tonometry after refractive surgery // J. Cataract Refract. Surg. 1997. Vol. 23. P. 832–838.
90. *Kotliar K., Maier M., Bauer S., Feucht N., Lohmann C., Lanzl I.* Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model // Acta Ophthalmol. Scand. 2007. Vol. 85, N 7. P. 777–781.
91. *Ljubimova D.Y., Eriksson A., Bauer S.M.* Numerical study of effect of vitreous support on eye accommodation // Acta of Bioengineering and Biomechanics. 2005. Vol. 7, N 2. P. 3–15.
92. *Ljubimova D.Y., Eriksson A., Bauer S.M.* Aspects of eye accommodation evaluated by finite elements // Biomech. Model. Mechanobiol. 2008. Vol. 7, № 2. P. 139–150.
93. *Maier M.M., Bauer S.M., Lanzl I.M., Kotliar K.E.* How Does Optical Refraction Change in Myopia, Emmetropia and Hypermetropia After Encircling Band Procedure? A Biomechanical Model // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. 2005. Vol. 46: E-Abstract 5523.
94. *Mironov A.N., Semenov B.N.* Zum problem der mathematischen modellierung in der ophtalmologie // Technische Mechanik. 1996. № 3. P. 245–249.
95. *Piechocki W.* On the non-linear theory of thin elastic spherical shells // Arch. Mech. Stos. 1969. N 21. P. 81–101.

-
96. Voronkova E.B., Bauer S.M., Eriksson A. Nonclassical theories of shells in application to soft biological tissues // Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Springer. 2011. Vol. 15. P. 647–654.
 97. Yan D. B., Flanagan J. G., Farra T., Trope G. E., Ethier C. R. Study of regional deformation of the optic nerve head using scanning lazei tomography, // Current Eye Research. 1998. Vol. 17, P. 903–916.

Bestuzheva A.N., Korolev A.I., Kostenko B.V., Lukin V.I., Sedov M.S. The numerical-analytical study of the stress-strain state of the combined frame system.

The combined stiffening beam the cross section of which consists of two or three welded beams is studied. Such design feature makes the model more complex since it contains the additional unknown, the shear force, required in analysis of the joint weld. The problem of evaluation of the internal stress resultants, deflections and deformations of the combined frame system is analyzed. The mathematical model describing the structure is reduced to a system of ordinary differential equations of the fourth order. Firstly, the system of equation is solved analytically. The solution contains the unknown parameter, which is evaluated when the transcendental equations is solved numerically. The main results obtained by means of numerical-analytical methods agree well with the results of analysis with the program complex SCAD. The proposed mathematical model takes into account the specific futures of pre stressed struttred frame structures. The use of the analytical solutions permits to analyze the technology concepts in design of such structures.

Keywords: combined frame systems, collar tie.

REFERENCES

1. Egorov V.V. RF patent for invention №2190735, E04 C 3/10. The way of the combined pre-voltage perforated trussed girders. Published 10.10.2002. Bulletin№28 (in Russian).
2. Rzhanichyn A.R. Composite rods and plates. Moscow, "Stroyizdat 1986.
3. Egorov V.V. Development of a constructive forms and methods of calculation combined systems strut frame type: thesis ... doctor of technical Sciences:05.23.01 St. Petersburg, 2004. P. 535.
4. Belenya E.I. Metal construction: textbook, edited by E.I.Belenya. Edition 6th, revised and expanded // Moscow, "Stroyizdat 1985.

Ivchenkova A.V. Deformation of a spherical segment under dynamic loading (the elementary model of a pneumotonometer).

The problem of dynamic loading of a spherical shallow shell is analyzed. Modeling of the interaction between a pneumotonometer and a cornea under measurement of intraocular pressure has special interest. Two mathematical models of a pneumotonometer are developed in the paper. The first one is based on equations of the moment theory of shells and the second — on the membrane theory of shells. The effect of different parameters on behavior of a spherical shallow shell is studied. It appears that results obtained with the membrane shell model agree better with experimental data than those due to the moment shell theory. It seems that last theory cannot provide an adequate description of the clinical data.

Keywords: spherical shallow shell, pneumotonometer.

REFERENCES

1. *Bauer S.M.* On applanation methods of measurements of intraocular pressure. Trudy seminara "Komp'iuternye metody v mekhanike sploshnoi sredy" 2006–2007. St. Petersburg University Press, 2007. P. 3–19.
2. *Volmir A.S.* Shells in a flow of liquid and gas. Aero- elastic Problems. Nauka: Moscow, 1976 (in Russian).
3. *Volmir A.S.* Stability of elastic system. Defense Technical Information Center, 1965. 1045 p.
4. *Vurgafit M.B., Vurgafit Ya.M.* Tonometric methods of studt of intraocular pressure and hydrodynamics of eye under glaucoma. Kazan, 1991. 112 p.
5. *Iomdina E.N.* Biomechanics of the Scleral Shell of the Eye in Myopia: Diagnostics of Impairments and their Experimental Corrections: Thesis for the degree of Doctor of Science in biology. M., 2000. 32 p. (in Russian).
6. *Kalfa S.Yu.* Elastometry of Eye // Russian Ophthalmological Journal, 1928, T. VIII, No. 2. P. 250–262.
7. *Maklakoff A.N.* Ophthalmotonometry // Med. Obozrenie. 1884. Vol. 24. P. 1092–1095.
8. *Nesterov A.P., Vurgafit M.B.* Calibration Tables for the Filatov-Kalf elastonometer // Vest. Oftalmol. 1972. № 2. P. 20–25.
9. *Nesterov A., Bunin A., Katsnelson L.* Intraocular pressure: physiology and patholog. Moscow: Mir Publishers, 1978. 448 p.
10. *Filin A.P.* Elements of theory of shells [Elementy teorii obolochek]. Leningrad: Stroyizdat, Leningr. otd-nie, 1975. 256 p. (in Russian).

11. *Khusainov R.R., Tsibul'skii V.R., Yakushev V.L.* Simulation of eye deformation in the measurement of intraocular pressure // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2011. Volume 51, Issue 2. P. 326–338.
12. *Yakushev V.L.* Statement of the problem of intraocular pressure measurement modeling by a pneumotonometric method // Mechanics of Solids, 2011. Volume 46, Issue 6. P. 937–945.
13. *Lusce D., Taylor D.* Reichert Ocular Response Analyzer. Measures Corneal Biomechanical Properties and IOP. Reichert Ophthalmic Instruments, 2006.

Naumova N.V., Ivanov D.N., Zaitseva M.V. Mathematical Modelling of cylindrical shell vibrations under internal pressure of fluid flow.

Axisymmetric vibrations of thin elastic cylindrical shell under the internal pressure of fluid flow are analyzed. Fluid in cylindrical tube is assumed to be an incompressible homogeneous ideal fluid. The mathematical model describing the structure is reduced to a system of linearized ordinary differential equations of the second order. Solutions of the problem are obtained by using the approximate theory, whereas the system of equation is solved analytically. The solution contains the unknown constants, which are evaluated with Mathematica 8.0. Analytical formula for evaluation of components of normal and tangential deflections of the shell middle surface are found. The approximate results are presented by either analytical formulas or in the form of plots. The obtained analytical results agree well with numerical (FEM) results obtained with the program complex ANSYS WORKBENCH 13.

Keywords: cylindrical shell vibrations, shell under internal pressure.

REFERENCES

1. *Kirichevskii V. V.* Finite Elements Method in Mechanics of Elastomers. Kiev: Naukova Dumka, 2002. 655 p. (in Russian).
2. *Oden J. T.* Finite Elements of Nonlinear Continua. Dover Publications Inc. Mineola. N.Y., 2006.
3. *Misyura E.Yu.* Numerical solution of geometry nonlinear problem for thickwall cylinder made of Jone's material // Vestnik of NTU. Dynamics and stability of machines. 2004. № 19. P. 141–148 (in Russian).

4. *Muha B., Canic S.* Existence of a weak solution to a nonlinear fluid-structure interaction problem modeling the flow of an incompressible,viscous fluid in a cylinder with deformable walls // Arch. Rational Mech. Anal. 2013. Vol. 207. P. 919–968.
5. *Guidorzi M., Padula M., Plotnikov P. I.* HOPF solutions to a fluid-elastic interaction model // Math. Models Methods Appl. Sci. 2008. № 18. P. 215–225.
6. *Arshinov G.A., Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I.* Twodimensional solitary waves in nonlinear viscoelastic continua // RAN. Acoustical Journal. 2000. Vol. 46. № 1. P. 116–117 (in Russian).
7. *Arshinov G.A., Mogilevich L.I.* Statical and dynamical problems of Viscoelasticity. Saratov: SSAU, 2000 (in Russian).
8. *Blinkova A.Yu.* Modeling of nonlinear deformations waves in linear viscoelastic cylindrical shell, containing viscous incompressible fluid // Saratov: Vestnik of SGTU, 2012. No. 4 (68). P. 7–15 (in Russian).
9. *Kantor B.Ya., Kundelev A.Yu., Misjura E.Yu.* Biomechanics of hyperelastic bodies of revolution. Kharkov, 2006 (in Russian).
10. *Kotschin N. J., Kibel I. A., Rose N. W.* Theoretische Hydromechanik. Vol. 2. Akademie-Verlag, 1954.
11. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Fluid Mechanics, Second Edition: Vol. 6 (Course of Theoretical Physics). Pergamon Press, 1959.
12. *Goldenveizer A. L., Lidskii V. B., Tovstik P.E.* Free vibrations of thin shells. Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
13. *Filippov S.B.* The theory of the joint and supported shells. SPb., 1999 (in Russian).

Trofimenco P.V. Nonclassical shell theories for the analysis of transversely isotropic spherical layers under normal pressure.

Scleral and fibrous shells are similar in structure to transversely isotropic tissue, which are characterized with modulus of elasticity those are smaller in the radial direction than in the tangential plane. The problem of deformation of thin elastic spherical shell consisting of two transversely isotropic layers under internal and external pressure is analyzed. Solutions are obtained by using the exact 3D theory of elasticity and two approximate theories for orthotropic plates: the theory of shells of moderate thicknesses by Palyi–Spiro (PS) and the refined theory developed by Rodinova–Titaev–Chernykh (RTC). The motion of the inner and outer shells of the eye, the radial stresses of the inner and outer shells of the eye, the tangential stresses in the inner

and outer shells of the eye, the effect of strains and displacements on the elastic characteristics are studies. The results are compared with the exact solutions obtained with three-dimensional theory of elasticity.

Keywords: deformations of transversally isotropic spherical layers.

REFERENCES

1. *Iomdina E. N.* Mechanical properties of the human eye tissues. Modern Problems of Biomechanics. Vol. 11. Moscow University Press, 2006. P. 183–200.
2. *Saulgozis J.* Deformation features of the sclera. Mechanics of composite materials. N 3. 1981. P. 505–514.
3. *Poloz M.V., Iomdina E.N.* Active deformation of the human eye Biomechanics-2010, X Russian Conference, theses of reports. Saratov University Publishing. P. 137–139.
4. *Novozhilov V V* Thin Shell Theory. Groningen: P. Noordhoff, 1964. 377 p.
5. Bauer, S.M., Voronkova, E.B.: Nonclassical shell theories for the analysis of transversally isotropic spherical and cylindrical layers under normal pressure. Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1, No. 3. 2011. P. 86–93 (in Russian).
6. *Lurie A.I.* Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 492 p. (in Russian)
7. *Palii, O.M., Spiro, V.E.* Anisotropic Shells in Shipbuildings. Theory and Analysis. Leningrad: Sudostroenie, 1977. 386 p. (in Russian).
8. Rodionova, V.A., Titaev, V.F., Chernykh, K.F.: Applied Theory of Anisotropic Plates and Shells. St.Petersburg: St. Petersburg University Press, 1996. 280 p (in Russian).

Yeliseyev V.V., Oborin E.A. Theory and calculation of large elastic deformations of flat rods with tension and shear

A general geometrically nonlinear theory of rods in 3D space is presented. Rods are described as Cosserat material lines. Each material point of these lines has three translational and three rotational degrees of freedom. For the plane problem the nonlinear system of six ordinary differential equations in displacements and the boundary conditions are obtained. For numerical solution of the boundary value problem the shooting method is applied and an elegant method to find solutions with the help of applied software is proposed. Some models of rods taking into account tension and shear are considered including i) a

straight rod under large compressive force and small transverse force and ii) a curved rod under distributed load. The forms of rods are described either by analytical formulas or as an array of points. The numerical solutions are presented in the form of plots. The qualitative effects of simultaneous consideration of bending, tension and shear are discussed

Keywords: nonlinear rods, bending with tension and shear.

REFERENCES

1. *Cosserat E. and Cosserat F.* Theorie des corps deformables. Paris: Hermann. 1909. 465 p.
2. *Popov E. P.* Theory and calculation of flexible elastic rods. Moscow: Nauka, 1986. 296 p. (in Russian).
3. *Yeliseyev V. V.* Mechanics of elastic bodies. SPb.: SPbSPU, 2003. 336 p. (in Russian).
4. *Yeliseyev V. V.* Mechanics of deformable solid bodies. SPb.: SPbSPU, 2006. 231 p. (in Russian).
5. *Yeliseyev V. V., Zinovieva T. V..* Nonlinear-elastic strain of underwater pipeline in laying process // Computational continuum mechanics. 2012. Vol. 5. N 1. P. 70–78.
6. *Yeliseyev V. V., Oborin E. A.* Deformation and plastic fracture of guardrail bands under the impact of a car hit // Science and Engineering for roads. 2014. N 1. P. 9–11.

СОДЕРЖАНИЕ

От редактории	3
<i>C.M. Бауэр, Е.Б. Воронкова. Математическое моделирование в офтальмологии</i>	
1. Введение.....	5
2. Модели лечения отслойки сетчатки.....	7
3. Модели отслоения сосудистой оболочки.....	13
4. Деформация решетчатой пластинки диска зрительного нерва	15
5. Модели теории аккомодации	23
6. Об операциях на роговице глаза.....	24
7. Математические модели тонометрии — методов измерения внутриглазного давления	26
8. О зависимости объем–давление для глазного яблока. (Изменение ВГД при введении инъекций в стекловидное тело)	35
9. Заключение	39
<i>Д.В. Альчикаев. Устойчивость анизотропной цилиндрической оболочки под действием нормального давления</i>	
1. Введение.....	48
2. Постановка задачи.....	49
3. Обобщенная модель Тимошенко-Рейснера.....	50
4. Пример анизотропии.....	51
5. Уравнения равновесия.....	53
6. Построение решения.....	54
7. Выводы	58
<i>Н.В. Наумова, Д.Н. Иванов, М.В. Заичева. Математическое моделирование колебаний цилиндрической оболочки, вызываемых действием внутреннего потока жидкости</i>	
1. Введение.....	61
2. Постановка задачи.....	61
3. О вычислении давления в вязкой жидкости.....	63
4. Уравнения вынужденных колебаний цилиндрической оболочки.....	65
5. Решение системы (24)	67
	70

6. Решение системы (25)	71
7. Численные расчеты	73
8. Заключение	73
<i>П.В. Трофименко. Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах о деформации трансверсально-изотропных сферических слоев под действием нормального давления</i>	76
1. Введение	76
2. Деформации двухслойной трансверсально-изотропной сферической оболочки	77
2.1. Постановка задачи	77
2.2. Деформации двухслойной трансверсально-изотропной сферической оболочки по теории Палия–Спиро	78
2.3. Деформации двухслойной трансверсально-изотропной сферической оболочки по теории Родионовой–Титаева–Черныха	81
2.4. Деформации двухслойной трансверсально-изотропной сферической оболочки по трехмерной теории	82
3. Сравнение полученных результатов	84
4. Заключение	87
<i>А.В. Ивченкова. Деформация сферического сегмента под действием динамической нагрузки (простейшая модель пневмотонометра)</i>	89
1. Введение	89
2. Постановка задачи	91
3. Результаты анализа	96
4. Заключение	97
<i>А.Н. Бестужева, А.И. Королев, Б.В. Костенко, М.И. Лукин, М.С. Седов. Исследование напряженно-деформированного состояния комбинированной системы шпренгельного типа численно-аналитическими методами</i>	99
1. Введение	99
2. Решение	102
3. Влияние величины выноса затяжки на вертикальные перемещения, распор и изгибающие моменты	104
4. Влияние количества затяжных элементов на вертикальные перемещения, распор и изгибающие моменты	104
5. Заключение	105

<i>B.B. Елисеев, Е.А. Оборин. Теория и расчет больших упругих деформаций плоских стержней с растяжением и сдвигом</i>	107
1. Общая теория.....	107
2. Плоская задача	110
3. Алгоритм в системе компьютерной математики.....	111
4. Прямой стержень	112
5. Криволинейный стержень с аналитическим заданием формы.....	112
6. Криволинейный стержень с заданием формы по точкам	115
7. Эффекты растяжения и сдвига.....	118
Доклады, не вошедшие в сборник	120
Хроника	123
Об авторах	124
Summaries	128

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.3

Альчибаев Д.В. Устойчивость анизотропной цилиндрической оболочки под действием нормального давления // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2013–2014 гг. С. 48–59.

В работе рассматривается устойчивость тонкой цилиндрической оболочки средней длины, выполненной из анизотропного материала, описываемого 21 упругим модулем, под действием нормального давления. Найдены первые два слагаемых асимптотического разложения формы потери устойчивости в случае жесткой заделки края. Получено, что поправка к величине критической нагрузки имеет порядок, равный квадрату относительной толщины оболочки. Обнаружены особенности, отличающие ее от изотропной оболочки. Форма потери устойчивости приобретает наклон по отношению к образующей.

Библиогр. 8 назв. Ил. 3.

Ключевые слова: математическое моделирование, теория оболочек, анизотропия, устойчивость.

УДК 539.3

Бауэр С.М., Воронкова Е.Б. Математическое моделирование в офтальмологии // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2013–2014 гг. С. 5–47.

Предметом настоящего обзора стали математические модели, построенные в сотрудничестве с врачами-офтальмологами. Кратко описаны модели расчета напряженно-деформированного состояния оболочки глаза после выполнения операций, связанных с лечением отслойки сетчатки, модели теории аккомодации.

Обсуждаются математические модели, описывающие процесс определения истинного внутриглазного давления (ВГД) при помощи аппланационных методов. Представлены модели, которые позволяют оценить влияние отклонений формы роговицы и склеры от сферической формы, влияния толщины роговицы на показатели внутриглазного давления. Отмечается, что модели биомеханики

глаза помогли получить ряд новых результатов в механике деформируемого твердого тела, например решить задачу об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием сосредоточенной силы и внутреннего нормального давления, об устойчивости осесимметричной формы равновесия кольцевых неоднородных ортотропных пластин, находящихся под действием нормального давления, задачу об устойчивости сегмента ортотропной оболочки, находящегося под действием нормального внутреннего давления и приложенного груза с плоским основанием, решить задачи о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев, находящихся под действием внутреннего и внешнего давлений. Сравнение этих решений с решениями, получающимися по неклассическим теориям оболочек, позволили оценить точность некоторых теорий.

Библиогр. 97 назв. Ил. 13.

Ключевые слова: математическое моделирование, биомеханика глаза, теория оболочек, модели неклассических теорий оболочек.

УДК 624.072.2/.4:519.6

Бестужева А.Н., Королев А.И., Костенко Б.В., Лукин М.И., Седов М.С. Исследование напряженно-деформированного состояния комбинированной системы шпренгельного типа численно-аналитическими методами // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2013–2014 гг. С. 101–108.

В работе решалась задача о нахождении внутренних усилий, прогибов, деформаций континуальной модели комбинированной конструкции. Математическая модель сводилась к системе обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Метод решения заключался в аналитическом решении системы уравнений с точностью до неизвестного параметра и последующем уточнении этого параметра с помощью решения трансцендентного уравнения численными методами. Основные результаты, полученные численно-аналитическими методами, сравнивались с результатами расчета в программном комплексе SCAD.

Библиогр. 4 назв. Табл. 1. Ил. 4.

Ключевые слова: математическое моделирование, комбинированные системы шпренгельного типа, затяжка.

УДК 519.63:539.3

Елисеев В.В., Оборин Е.А. Теория и расчет больших упругих деформаций плоских стержней с растяжением и сдвигом // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2013–2014 гг. С. 109–121.

Представлена общая нелинейная теория стержней как материальных линий Коссера, а также уравнения в компонентах для плоской задачи. Предложен способ численного решения с помощью компьютерной математики. Рассмотрены модели стержней с учетом податливости на растяжение и сдвиг, среди них — прямой стержень, криволинейный стержень с описанием формы аналитически и по точкам.

Библиогр. 6 назв. Ил. 11.

Ключевые слова: нелинейные стержни, изгиб с растяжением и сдвигом.

УДК 539.37

Ивченкова А. В. Деформация сферического сегмента под действием динамической нагрузки (простейшая модель пневмотонометра). // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2013–2014 гг. С. 90–100.

Рассматривается задача о действии динамической нагрузки на пологую сферическую оболочку. Задача представляет особый интерес как модель для изучения действия пневмотонометра на роговицу глаза при измерении внутрглазного давления. В работе построены две простейшие модели пневмотонометра, одна из которых основывается на уравнениях для моментной теории оболочек, другая — для безмоментной теории оболочек. Проведены исследование поведения пологой сферической оболочки при разных параметрах и сравнение представленных моделей. На основании сравнений сделан вывод о том, что модель безмоментной оболочки даёт результаты, близкие к наблюдаемым в экспериментах. Показано, что моментная модель не может адекватно описать клинические данные.

Библиогр. 13 назв. Ил. 5.

Ключевые слова: математическое моделирование, теория оболочек, пологие оболочки, биомеханика глаза.

УДК 539.3

Наумова Н.В., Иванов Д.Н., Зайцева М.В. Математическое моделирование колебаний цилиндрической оболочки, вызываемых действием внутреннего потока жидкости // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2013–2014 гг. С. 3–16.

Исследована задача о колебаниях тонкой упругой цилиндрической оболочки под влиянием давления, действующего со стороны внутреннего потока жидкости.

При движении жидкости в упругой трубе происходит силовое взаимодействие жидкой и упругой среды. Упругая среда — тонкая упругая цилиндрическая оболочка кругового сечения постоянной толщины. В работе доказано, что давление в вязкой несжимаемой жидкости, пульсирующей в цилиндрической оболочке, изменяется по определенному закону. Получено выражение для давления жидкости в общем виде. В качестве примера, в частном случае, была взята модель идеальной несжимаемой жидкости и получено выражение для давления, действующего со стороны жидкости на внутреннюю поверхность оболочки. В результате решения поставленной задачи гидроупругости были найдены приближенные выражения для тангенциальных и нормальных компонентов перемещений срединной поверхности цилиндрической оболочки. При решении задачи применено сочетание аналитических и численных методов.

Библиогр. 13 назв. Ил. 4.

Ключевые слова: математическое моделирование, теория оболочек, модели неклассических теорий оболочек.

УДК 539.3

Трофименко П.В. Неклассические теории аниратропных оболочек в задачах о деформации трансверсально-изотропных сферических слоев под действием нормально-го давления // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2013–2014 гг. С. 75–89.

Склеральная и фиброзная оболочки близки по своей структуре к трансверсально-изотропной ткани: характеризуются более низким модулем упругости в направлении своей толщины (в радиальном направлении), чем в продольном и поперечном. Рассматривается задача о деформации тонкой упругой сферической оболочки, состоящей из двух трансверсально-изотропных слоев, под действием внутреннего и внешнего давления. Решение задачи построено с помощью неклассических теорий оболочек: теория Палия–Спиро, теория Родионовой–Титаевой–Черныха. Получены зависимости: для перемещений внутренней и внешней оболочек глаза, для радиальных напряжений внутренней и внешней оболочек глаза, для тангенциальных напряжений внутренней и внешней оболочек глаза, напряжений и смещений от упругих характеристик. Проведено сравнение результатов с точным решением трехмерной теории упругости.

Библиогр. 8 назв. Ил. 7.

Ключевые слова: математическое моделирование, теория оболочек, модели неклассических теорий оболочек.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

2013–2014 гг.

Обложка художника *E. A. Соловьевой*
Корректор *H. B. Ермолова*
Компьютерная верстка *A. M. Вейшторп*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

Подписано в печать . . 2014. Формат 60×84¹/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл.-печ. л. . Тираж 123 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21.

Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22.
E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:
С.-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11/21, к. 21.
Телефоны: 328-77-63, 325-31-76.
E-mail: post@unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.



Светлана Михайловна Бауэр

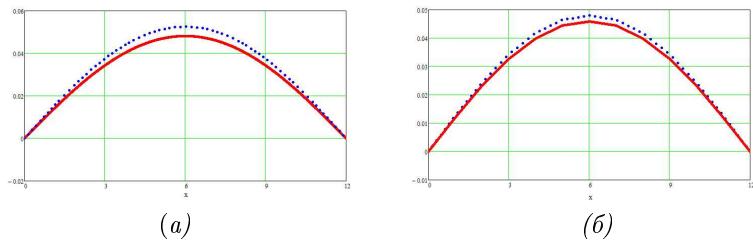


Рис. 1. Прогиб шпренгельной и обычной балки (слева) и прогиб шпренгельной балки — теоретический расчет и расчет в комплексе SCAD (справа) (к статье А.Н. Бестужевой и др.).

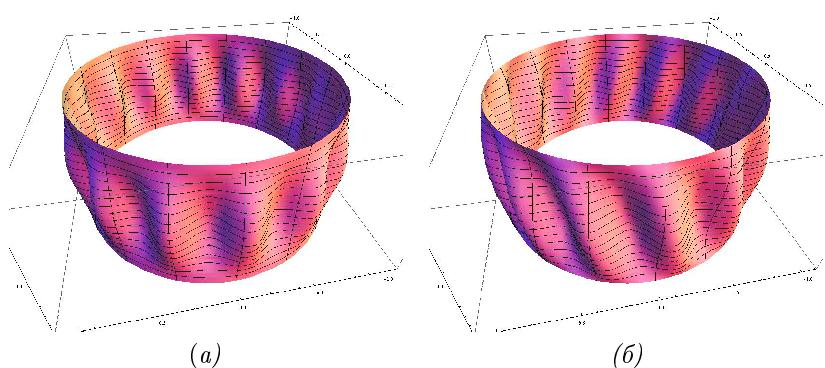


Рис. 2. Форма прогиба в нулевом и первом приближении (к статье Д.В. Альчибаева).

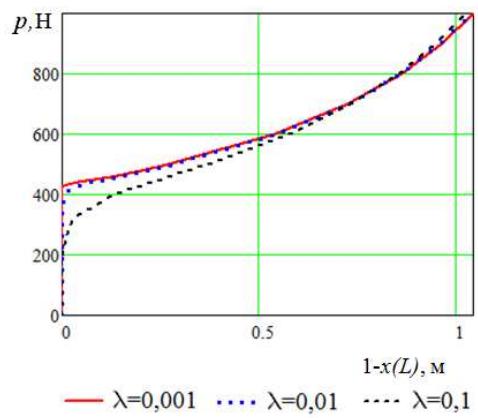


Рис. 3. Горизонтальное перемещение конца стержня в зависимости от нагрузки (к статье В.В. Елисеева и Е.А. Оборина).

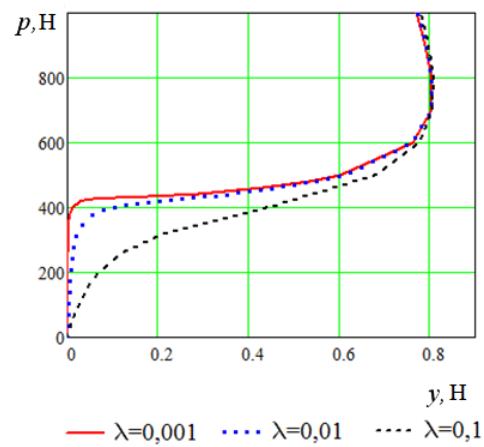


Рис. 4. Вертикальное перемещение конца стержня в зависимости от нагрузки (к статье В.В. Елисеева и Е.А. Оборина).

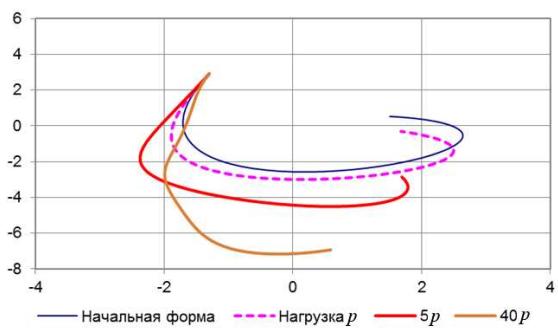
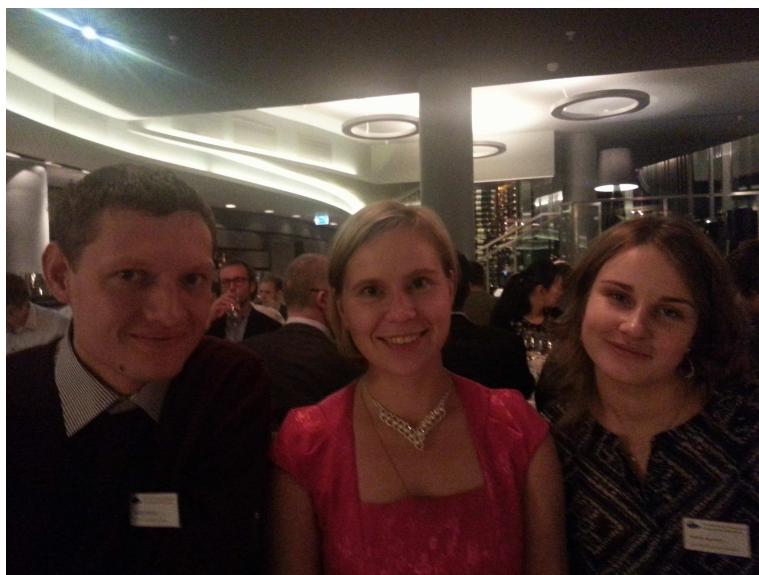


Рис. 5. Начальная и деформированная форма стержня (к статье В.В. Елисеева и Е.А. Оборина).



На семинаре NSCM-26: (слева направо) канд физ-мат. наук А.М. Ермаков (СПбГУ), L. Feklistova, PhD (Estonia), аспирант К.А. Игнатьева (СПбГУ)