САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2012–2013 гг.

ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2013

ББК 22.25
Т78

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета

Т78 **Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2012–2013 гг.** — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. — 142 с.
ISSN 2218-7421

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ISSN 2218-7421

ББК 22.25

От редколлегии

Несмотря на то, что сборник трудов семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды" адресован в основном молодым ученым, мы сочли целесообразным, начиная с третьего выпуска сборника, в котором была опубликована статья проф. Л.Н. Ясницкого (ПГУ), включать в "Труды семинара" работы ведущих ученых-механиков. В этом выпуске публикуется статья А.П. Филина "Об одной трактовке метода Бубнова–Галеркина".

Анатолий Петрович Филин (1920–2012) был профессором, доктором технических наук, заслуженным деятелем науки и техники РФ. Он заведовал кафедрами Строительной механики в ЛИИЖТе (1954–1976) и ЛКИ (1978–1991); подготовил более двух десятков докторов и кандидатов наук. А.П. Филин является автором значительного числа научных трудов, среди которых известная трехтомная монография "Прикладная механика деформируемого тела". В последние годы он жил в США, где написал "Очерки об ученых-механиках", которые были опубликованы в Москве в 2007 г. В них упоминалось о том, что автор в свое время написал статью о применении рядов Фурье в методе Галёркина, но не опубликовал ее. Этой информацией заинтересовался проф. Исаак Элишаков (Isaac Elishakoff) из Атлантического университета Флориды (Florida Atlantic University). Он разыскал у американских коллег А.П. Филина машинописный подлинник статьи и предложил опубликовать эту работу в России.

В редколлегию сборника статья была передана одним из учеников А.П. Филина кандидатом технических наук, доцентом кафедры "Прочность материалов и конструкций" ПГУПС Борисом Михайловичем Аллахвердовым.

ОБ ОДНОЙ ТРАКТОВКЕ МЕТОДА БУБНОВА–ГАЛЕРКИНА

А.П. Филин

В статье показано, что метод Бубнова–Галеркина для решения дифференциальных уравнений можно трактовать и как результат непосредственного применения обобщенных рядов Фурье. При этом в определенном смысле облегчается как задача о сходимости метода, так и вопрос о выборе координатных функций.

Пусть имеем краевую задачу

$$L\,(u) = f \text{ в } D; \tag{1}$$

$$\lambda_k\,(u) = \varphi_k \text{ на } \Gamma, \qquad (k = 1, \ldots, p)\,, \tag{2}$$

где p соответствует порядку дифференциального уравнения (1).

Представим искомую функцию u в виде следующего разложения:

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i, \tag{3}$$

где a_i — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, χ_i — функции, удовлетворяющие граничным условиям (2) и образующие полную систему.

Подставим (3) в (1):

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i\right) = f. \tag{4}$$

Равенство (4) обращается в тождество при соответствующем множестве коэффициентов a_i. Введем обозначение

$$F = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i\right). \tag{5}$$

Для того чтобы составить условия для отыскания a_i, обеспечивающих тождественное равенство

$$F = f, \tag{6}$$

и, следовательно, тождественное удовлетворение рядом (3) уравнению (1), поступим следующим образом — представим обе части в (6) в виде обобщенных рядов Фурье, в которых разложение производится по ψ_i, образующим полную систему ортогональных функций:

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \psi_i, \qquad f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i, \tag{7}$$

где

$$b_j = \frac{\int_D F \cdot \psi_j dq}{\int_D \psi_j^2 dq}, \qquad c_j = \frac{\int_D f \cdot \psi_j dq}{\int_D \psi_j^2 dq}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), а затем (7) в (6), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_D F \cdot \psi_j dq}{\int_D \psi_j^2 dq} \psi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_D f \cdot \psi_j dq}{\int_D \psi_j^2 dq} \psi_j \tag{9}$$

или, учитывая линейную независимость функций ψ_j, получаем из (9)

$$\frac{\int_D F \cdot \psi_j dq}{\int_D \psi_j^2 dq} \psi_j = \frac{\int_D f \cdot \psi_j dq}{\int_D \psi_j^2 dq} \psi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

или, наконец, выполняя сокращение в (9), получим

$$\int_D F \cdot \psi_j dq = \int_D f \cdot \psi_j dq, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Перенося интеграл в (11) из правой части равенства в левую и используя (5), приходим к системе уравнений

$$\int_D \left(L\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i \right) - f \right) \psi_j dq = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

для отыскания коэффициентов a_i, обеспечивающих удовлетворение функцией (3) дифференциальному уравнению (1).

Если функции χ_i выбрать так, чтобы они кроме полноты системы и удовлетворения граничным условиям удовлетворяли и ортогональности, то в качестве системы ψ_i можно, в частности, принять и функции χ_i, тогда (12) приобретает общепринятый вид разрешающей системы уравнений метода Бубнова–Галеркина:

$$\int_D \left(L \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i \right) - f \right) \chi_j dq = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Разумеется, что в тех случаях, в которых выбрать систему функций, удовлетворяющих одновременно как граничным условиям, так и условиям ортогональности, затруднительно, форме (8) предпочтительнее форма (12), в которой функции χ_i удовлетворяют лишь граничным условиям, а ψ_j — лишь условиям ортогональности (условиям полноты должна удовлетворять каждая из систем функций χ_i и ψ_j). Сходимость метода сводится к представимости функций (5) первым обобщенным рядом Фурье (7).

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ОРБИТАЛЬНЫХ ТРОСОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИХ РАЗВЕРТЫВАНИЯ

Б.А. Смольников, В.А. Леонтьев

В работе рассмотрены вопросы развертывания на круговой околоземной орбите крупногабаритной тросовой (сетчатой) конструкции, основным строительным элементом которой являются гравитационные диполи (ГД). Предложены и проанализированы два способа раскрытия на орбите одиночного ГД. Результаты численного моделирования подтвердили эффективность предложенных способов развертывания и адекватность их компьютерных моделей.

1. Введение

Широкое использование тросовых элементов представляется совершенно необходимым условием для строительства на околоземной орбите крупногабаритных жилых, производственных и исследовательских комплексов, габариты которых исчисляются размерами от сотен метров до десятков километров. Для обеспечения необходимой жесткости подобных сетчатых сооружений требуется создавать в тросовых элементах определенную силу их натяжения посредством использования гравитационных, центробежных и электромагнитных сил. Для кратковременного натяжения тросов в процессе их раскрытия и монтажа можно использовать также тяговые реактивные модули.

Сферы практического применения орбитальных тросовых конструкций (ОТК) чрезвычайно разнообразны. Это, например, многомодульные жилые и производственные комплексы, соединенные тросами и обладающие вполне ощутимой микротяжестью. Это разномасштабные причальные сооружения для космических аппара-

---

Доклад на семинаре 4 сентября 2012 г.

тов и спутников, а также складские помещения. Это всевозможные энергодобывающие установки (на солнечных батареях). Это орбитальные сельскохозяйственные парники с гидропоникой для выращивания культурных растений. Построенная на основе ОТК конструкция в форме цилиндрической “орбитальной корзины” (рис. 1) может использоваться в качестве орбитального мусоросборника и даже мусоропереработчика, что станет крайне актуально уже в ближайшие годы.

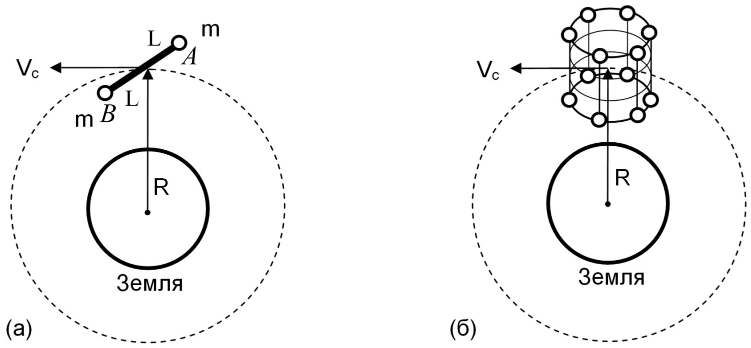

Рис. 1. (а) — одиночный ГД; (б) — система ГД на орбите (“корзина”).

Наконец, подобная орбитальная корзина может служить научным полигоном для проведения уникальных экспериментов в самых разных областях знаний и технологий. Большим достоинством предлагаемой ОТК является возможность ее расширения во всех направлениях путем присоединения к ней различных тросовых конструкций и модулей.

2. Общая схема развертывания ГД

При решении задач орбитального развертывания ОТК возникают два класса научно-технических и технологических проблем [1–6]:

а) раскрытие и орбитальный монтаж тросовых и сетчатых элементов;

б) стабилизация и управление собранной ОТК при ее эксплуатации.

Ограничиваясь здесь только первой проблемой, рассмотрим ее основной строительный элемент — гравитационный диполь (ГД), представляющий собой в развернутом состоянии совокупность двух модулей, соединенных длинным тросом, вытянутым вдоль местной вертикали, когда центр масс ГД равномерно движется по круговой орбите со скоростью V_c (см. рис. 1 (а)).

Уже этот простейший тросовый элемент представляет собой большой практический интерес, так как он позволяет создать в концевых модулях микротяжесть для обитающих там людей, достигающую 2–3% от наземной при длине троса L около 100 км. Однако гораздо больший интерес представляет использование ГД в качестве типового элемента при построении крупногабаритных ОТК. Так, разворачивая с помощью первого ГД целый ряд аналогичных ГД и образуя из них, посредством кольцевых тросов, круговую орбитальную корзину (рис. 1 (б)), можно построить целый орбитальный цилиндрический остов, пригодный для разнообразных целей. Для придания этому остову поперечной жесткости по связующим кольцам можно пропустить постоянный ток, для чего их целесообразно сделать сверхпроводящими. Тем самым остов приобретет желаемую жесткость как в продольном направлении (за счет приливных гравитационных сил, действующих на каждый ГД), так и в поперечном (за счет электромагнитного распора токовых колец). Это позволит перейти к решению задач по управлению как вращательным, так и поступательным движением остова в любом нужном направлении. Здесь возникает широкий круг задач, связанных с гашением возникающих колебаний сетчатых конструкций, а также с выбором оптимальных режимов управления ими.

Первым шагом в построении ОТК является, очевидно, раскрытие одиночного ГД с борта специализированного спутника-носителя (С-Н), движущегося по круговой околоземной орбите. Здесь могут быть использованы два способа развертывания ГД:

1) баллистический трехимпульсный маневр;

2) управляемое вытягивание троса из корпуса спутника посред-

ством тягового реактивного модуля B на нижнем конце троса.

В первом режиме концевому грузу (модулю) B троса сообщается дозированная начальная скорость V_0, после чего он в баллистическом полете вытягивает за собой трос из спутника до тех пор, пока не достигнет целевой точки, расположенной на текущем радиус-векторе С-Н, т.е. на его местной вертикали. В этой точке на модуле B включается тяговый реактивный двигатель, сообщающий ему тормозной импульс Δv_B, а верхнему концевому грузу (модулю) A сообщается необходимая для создания ГД орбитальная скорость Δv_A. В результате образуется изолированный ГД (AB), совершающий предписанное ему орбитальное движение, при котором оба его груза (модуля) располагаются на одной местной вертикали.

Во втором режиме процесс выпуска груза (модуля) B происходит под действием непрерывной малой тяги концевого двигателя на этом модуле, а задача управления состоит в выборе оптимальной величины и направления тяги.

Полностью развернутый ГД является своеобразным "кирпичом" будущей орбитальной корзины, причем отдельные тросы можно выпускать на предписанную орбиту со спутника либо независимо друг от друга, либо в виде некоторого пучка тросов с последующим их разделением и образованием цилиндрической сетчатой конструкции.

3. Анализ траекторий выбрасывания

Рассмотрим подробнее первый режим развертывания ГД. Свяжем со спутником-носителем орбитальную систему координат $OXYZ$, начало которой находится в центре масс С-Н и движется равномерно по круговой орбите радиуса R, причем ось OY всегда направлена к центру Земли, а ось OX — вдоль вектора орбитальной скорости С-Н. Угловая скорость (ω) вращения осей XY, очевидно,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}, \tag{1}$$

где g — ускорение силы тяжести на расстоянии R от центра Земли, а линеаризованные уравнения относительного движения точечного модуля B с массой m_B (без учета массы троса), выброшенного с носителя с начальной относительной скоростью V_0 под углом θ к оси OY, имеют следующий вид (см. [1])

$$\begin{aligned}&\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = 0,\\&\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Эти уравнения (2), при бросании тела из начала координат с начальной скоростью V_0, направленной под углом θ к оси местной вертикали Y (к центру Земли), имеют следующее решение:

$$\begin{aligned}&x(t) = (3t - \tfrac{4}{\omega}\sin(\omega t))V_0\sin(\theta) + \tfrac{2}{\omega}(1-\cos(\omega t))V_0\cos(\theta),\\&y(t) = \tfrac{2}{\omega}(1-\cos(\omega t))V_0\sin(\theta) + \tfrac{1}{\omega}\sin(\omega t)V_0\cos(\theta).\end{aligned} \tag{3}$$

Построим траектории модуля B, бросаемого под различными углами θ к местной вертикали с относительной начальной скоростью, например, $V_0 = 10$ м/сек. Для расчетов применялся высокоточный явный метод численного интегрирования (метод Дорманда–Принса, имеющий 8-й порядок точности).

На рис. 2 представлены траектории тела B при направлениях его бросания как вдоль, так и против местной вертикали. Это эллипсы с осями, направленными вдоль оси OX (большая ось) и OY (малая ось), и периодами, равными периоду обращения С-Н.

Далее на рис. 3 показана траектория при угле бросания 45°. Это петлевая спираль, раскручивающаяся вперед относительно спутника-носителя, движущегося по круговой орбите высотой 400 км с периодом обращения $T_{\text{orb}} = 5548$ сек ≈ 1.5 часа.

Учитывая общий характер таких траекторий, можно поставить вопрос о наиболее выгодном переходе модуля B в некоторую точку оси OY, где координата $x_B = 0$, а $y_B = L$. Вблизи этой точки к модулю B может быть приложен корректирующий импульс тяги, обеспечивающий орбитальную скорость данного модуля, необходимую для создания ГД длиной L. Одновременно верхний модуль A должен отделиться от корпуса С-Н, получив необходимую для этого орбитальную скорость.

В результате ГД начинает совершать предписанное ему движение, имея угловую скорость Ω, соответствующую величине радиус-

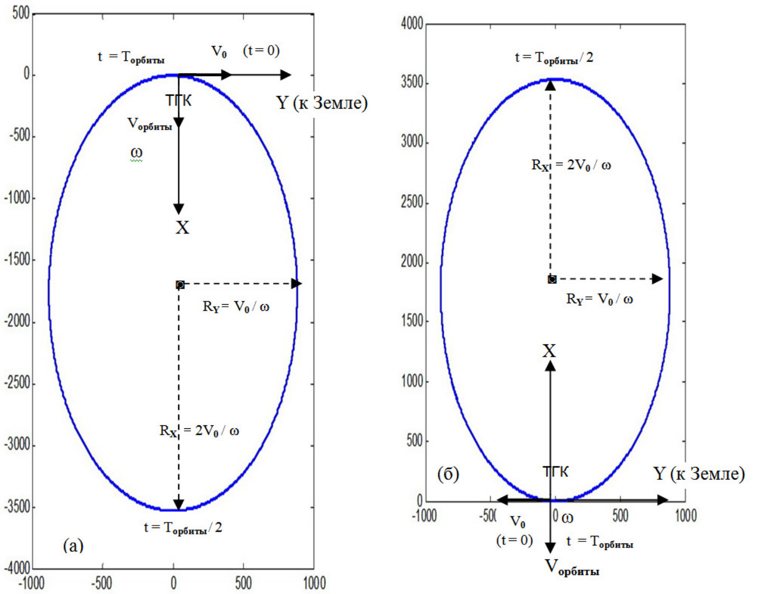

Рис. 2. Траектории тела B: слева — угол бросания $\theta = 0°$; справа — угол бросания $\theta = 180°$.

вектора ρ_c его центра масс, определяемой соотношением масс модулей m_A и m_B. Очевидно, что $\rho_c < R$, следовательно, согласно формуле (1), $\Omega > \omega$.

Поэтому орбитальная скорость модуля A, равная ΩR, будет превышать орбитальную скорость С-Н, равную ωR, вследствие чего ГД начнет обгонять С-Н, уходя от него в направлении оси OX и оставаясь при этом в положении относительного равновесия. При этом орбитальная скорость верхнего модуля будет равна ΩR, а нижнего — $\Omega(R - L)$. Положение центра масс ГД нетрудно найти из условия его равновесия под действием суммарной гравитационной силы $P_A + P_B$ (где $P_A = \mu m_A / R^2$, $P_A = \mu m_B / (R - L)^2$, $\mu = \gamma M$ — гравита-

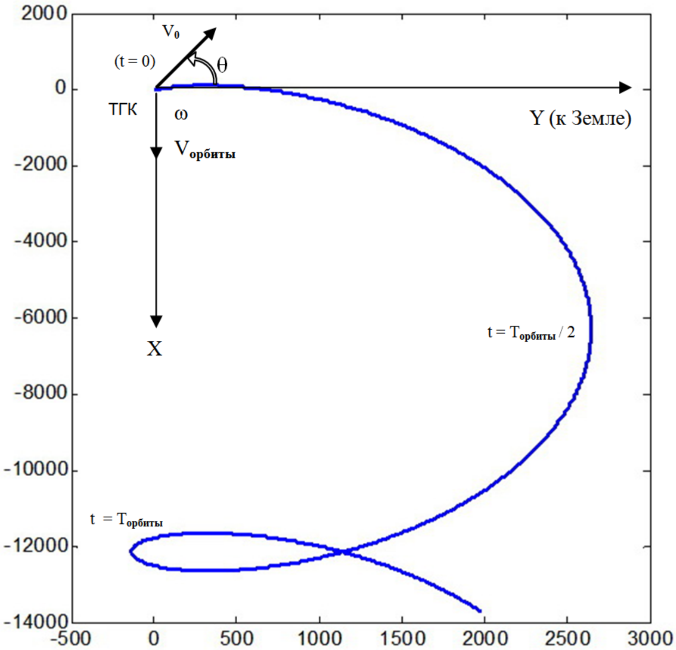

Рис. 3. Угол бросания $\theta = 45°$.

ционный параметр Земли) и центробежной силы, т.е. из равенства

$$P_A + P_B = \Omega^2 \rho_c (m_A + m_B). \tag{4}$$

Что касается оптимизации рассмотренного трехимпульсного перехода, то за критерий его качества можно принять либо величину суммарного прироста скоростей верхнего и нижнего модулей

$$J_c = V_0 + \Delta v_A + \Delta v_B, \tag{5}$$

либо дальность L, которая определит общую длину ГД.

4. Выбор оптимального режима развертывания

Рассмотрим здесь второй критерий. Переходя к безразмерному времени, пропорциональному угловому перемещению $\varphi = \omega t$, пройденному спутником-носителем по его орбите за время маневра раскрытия ГД, выразим координаты модуля B в момент его выхода на местную вертикаль в точке $x(\varphi) = 0$, $y(\varphi) = L$:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \tfrac{V_0}{\omega}\left((3\varphi - 4\sin\varphi)\sin\theta + 2(1-\cos\varphi)\cos\theta\right) = 0,\\ y(\varphi) &= \tfrac{V_0}{\omega}\left((2(1-\cos\varphi)\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta\right) = L. \end{aligned} \tag{6}$$

Далее, исключая из второго уравнения угол бросания θ, найденный из первого уравнения

$$\theta = \arctan\frac{2(1-\cos\varphi)}{4\sin\varphi - 3\varphi}, \tag{7}$$

можно получить следующее выражение для дальности бросания L:

$$L(\varphi) = \frac{V_0}{\omega}\frac{8(1-\cos\varphi) - 3\varphi\sin\varphi}{\sqrt{4(1-\cos\varphi)^2 + (4\sin\varphi - 3\varphi)^2}}. \tag{8}$$

Взяв производную от $L(\varphi)$ по φ и приравняв ее нулю, получаем, что дальность достигает максимума, когда величина φ удовлетворяет следующему трансцендентному уравнению:

$$\begin{aligned} &180\varphi + (27\varphi^3 - 144\varphi)\cos\varphi - 36\varphi\cos\varphi - (173 + 72\varphi^2)\sin\varphi +\\ &+(100 - 18\varphi^2)\sin 2\varphi - 9\sin 3\varphi = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Решая это уравнение численно, находим его корень $\varphi = \omega T_L = 2.10580 \approx 2\pi/3$, после чего определяем из (7) угол θ_m, обеспечивающий максимальную дальность $L_{\max}$:

$$\theta_m = \arctan(-1.049839648646) = 133.607^\circ \approx \frac{3}{4}\pi. \tag{10}$$

При этом время бросания на максимальную дальность не зависит от величины относительной скорости броска V_0 и тогда $T_L = 2.1058/\omega = 1859.5$ сек ≈ 31 мин (при угловой скорости на высоте

400 км, равной $\omega = 0.0011324366$ 1/сек). Напротив, максимальная дальность $L_{\max}$ зависит как от ω, так и от V_0:

$$L_{\max} = 1.59317713\frac{V_0}{\omega}. \tag{11}$$

При $V_0 = 10$ м/сек, $\omega = 0.0011324366$ 1/сек и при оптимальном угле (10) получаем

$$L_{\max} = 14068.58\text{м}. \tag{12}$$

Форма траектории бросания концевого модуля B на максимальную дальность $L_{\max}$ показана на рис. 4, а на рис. 5 представлены графические зависимости безразмерной функции дальности $F(\varphi) = L(\varphi)\cdot(\omega/V_0)$ и ее производной $dF/d\varphi = F1(\varphi)$.

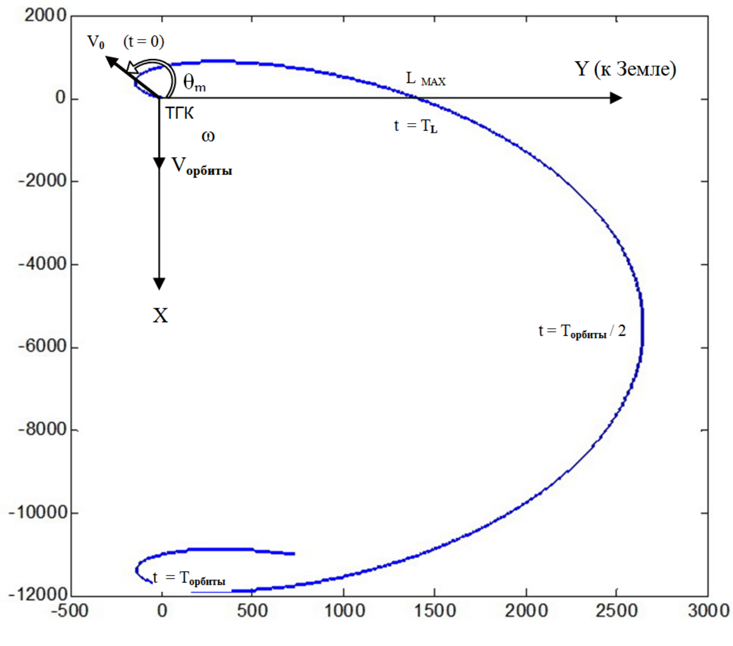

Рис. 4. Угол бросания $\theta_m = 133.607°$.

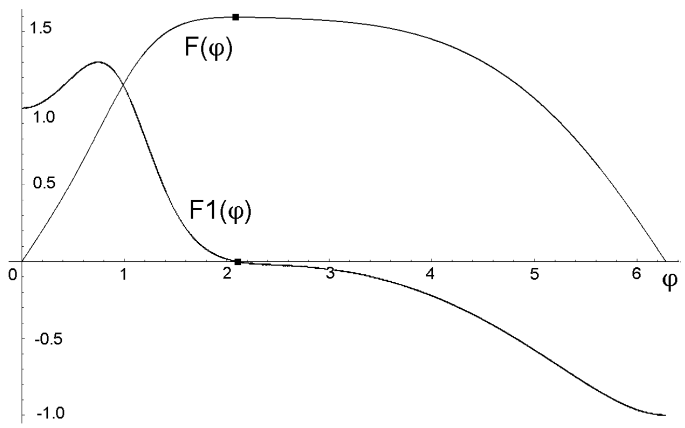

Рис. 5. Графики безразмерной функции дальности и ее производной.

Эти функции определяются формулой (8), где орбитальный угол φ измеряется в радианах. Из этих графиков видно, что максимальное удаление модуля B вдоль местной вертикали от С-Н достигается при $\varphi = 2.1058 \approx 2\pi/3$, причем вблизи этого экстремума (в диапазоне $1.8 \leqslant \varphi \leqslant 3$) безразмерная дальность $F(\varphi)$ изменяется весьма незначительно. При этом отвечающий данному диапазону угол бросания θ согласно (7) лежит в пределах $122° \leqslant \theta \leqslant 155°$. Это позволяет в указанном диапазоне углов оптимизировать процесс раскрытия ГД по какому-либо дополнительному критерию качества, например по (5).

5. Компьютерное моделирование задачи

Обратимся теперь ко второму режиму разворачивания ГД, основанному на использовании непрерывной малой тяги, приложенной к модулю B. В этом режиме очень важную роль играет учет массы и упругодиссипативных свойств вытягиваемого троса, так как эти факторы могут оказывать большое влияние на весь процесс раскрытия ГД.

Для расчета и моделирования тяговых режимов выпуска и развертывания троса с концевым модулем B была построена подробная расчетная схема и написана компьютерная программа численного моделирования, применяющая специальный метод интегрирования, представленный в работе [7]. Для наблюдения и оценки всех этапов процесса движения троса была написана специальная программа визуализации на языке Fortran-90, на основе графической библиотеки OpenGL в операционной системе Windows.

Программа использует данные, сбрасываемые основной программой моделирования в выходной файл, в качестве своего входного файла. Координаты отдельных точек троса (сочленений дискретной модели троса, разработанной на основе диссертационных материалов одного из авторов; см., например, работу [8]) сглаживаются с помощью неравномерных сплайнов NURBS (Non Uniform Rational B-Splines), имеющихся в OpenGL.

Рабочее окно программы визуализации можно видеть на рис. 1 и 2 на вклейке, где показаны ГД с тросом, выпускаемым в сторону Земли (ось OY), и система координат XYZ, связанная с С-Н. Плоскость орбиты показана как сверху (со стороны оси Z), так и в поперечном ракурсе (со стороны оси X). В этом окне отображаются также значения момента времени, координат модуля B и величины силы натяжения троса и указан угол выброса θ.

Основной целью компьютерных экспериментов было определение оптимального режима выпуска троса и его остановки с помощью силы тяги на концевом модуле, а также изучение влияния силы притормаживания троса в выпускном канале на процесс развертывания. Число разбиений троса на основные участки было выбрано равным 30, общее число дискретных участков в модели троса равнялось 90, а общее число степеней подвижности (полная размерность дискретной модели) была равна 373. Масса элементов троса (материал троса — кевлар), продольная и угловые жесткости (изгибные и крутильные) учитывались во всех элементах модели троса. При этом масса С-Н была принята равной 7000 кг, а модуля B — 100 кг.

Рис.1 на вклейке показывает случай выброса модуля B с тросом при отсутствии силы притормаживания троса в выпускном канале С-Н. Видно, что она обязательно должна присутствовать, иначе происходит смятие троса и образование петель, ведущих к его последующему обрыву. А при притормаживании троса его форма становится гладкой и стабильной.

На рис. 2 на вклейке показан найденный в результате проведенных компьютерных экспериментов наилучший режим развертывания и остановки троса.

Вначале делается выброс модуля B с тросом под малым углом $\theta = 3^\circ$ к местной вертикали Y. Сила выброса (реактивная сила тяги на модуле B), равная 30 Н, действует в течение 15 секунд, а сила притормаживания в канале выпуска равна 1 Н. После 15 секунд работы сила тяги отключается, что обеспечивает дальнейшее движение троса с модулем B по инерции, плавно и без возбуждения его колебаний, вплоть до достижения предельной длины $L_{\max}$.

Заметим, что если затем не применить режим торможения модуля B с помощью силы тяги, то начнется уход троса от местной вертикали Y в направлении оси X. Авторам статьи удалось показать, что возможно обеспечить быструю остановку модуля B с тросом вблизи целевой точки с помощью предложенного режима управления вектором постоянной тяги величиной 30 Н. На терминальном этапе тяга включается и остается постоянной, изменяя лишь угол своего наклона к оси Y (θ_{thrust}) согласно следующему алгоритму "AUTO-TETA":

$$\theta_{\text{thrust}} = 45^\circ \frac{D_X}{D_{X(T_0)}} \operatorname{sign} V_X. \tag{13}$$

Здесь V_X — проекция скорости движения модуля B на ось X; D_X — расстояние от точки B до оси Y, которое необходимо измерять посредством датчиков, а $D_{X(T_0)}$ — его значение в момент T_0 включения тормозной тяги. Алгоритм (13) задает как проекцию силы тяги, уменьшающую скорость V_X, так и проекцию, натягивающую трос. В момент T_0 расстояние $D_X = D_{X(T_0)}$, после чего угол тяги θ_{thrust} уменьшается от 45° до 0° при приближении модуля B к оси Y, когда сила тяги лишь натягивает трос. Практика моделирования показала высокую эффективность предложенного закона управления остановкой выпуска троса, так как модуль B с тросом останавливается быстро, и без возбуждения колебаний.

После этого необходимо отключить силу тяги и одновременно с этим отделить модуль A от корпуса С-Н со скоростью Δv_A. В результате ГД перейдет в штатный режим орбитального движения, в котором натяжение троса определяется разностью сил земного притяжения модулей A и B и их центробежных сил инерции. При наличии неточностей в задании орбитальных скоростей Δv_A и Δv_B развернутый ГД может совершать остаточные малые маятниковые колебания вокруг осей X и Z. Однако со временем эти колебания должны затухнуть благодаря наличию внутренней диссипации энергии в материале троса (см., например, работы [9, 10]).

6. Заключение

Проведенный качественный и количественный анализ иллюстрирует основные этапы процесса разворачивания ГД на круговой орбите. Для их компьютерного исследования была разработана специальная математическая модель упруговязкого троса и предложен рациональный закон управления его концевым модулем. Результаты исследования демонстрируют практическую приемлемость предложенных решений поставленной задачи.

Литература

1. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука. 1990. 336 с.
2. *Алпатов А.П., Белецкий В.В., Драновский В.И.* и др. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 560 с.
3. *Иванов В.А.* Тросовые системы в космосе // Авиация и космонавтика. 1984. №5. С. 43–44.
4. *Иванов В.А., Ситарский Ю.С.* Динамика полета системы гибко связанных космических объектов. М.: Машиностроение, 1986. 246 с.
5. *Левин Е.М.* О развертывании протяженной связки двух тел на орбите. // Космические исследования. 1983. Т. XXI. №1. С. 678–688.
6. *Поляков Г.Г.* Радиальная система связанных спутников // Космические исследования. 1981. Т. IX. № 3. С. 467–470.
7. *Leontyev V.A.* Direct time integration algorithm with controllable numerical dissipation for structural dynamics: Two-step Lambda method // Applied

Numerical Mathematics, 2010, vol. 60, N 3, pp. 277–292. (Published by Elsevier B.V., Amsterdam).

8. *Леонтьев В.А.* Оптимальная дискретизация распределенной упругости в расчетных моделях звеньев манипулятора // Материалы 1-й научно-технической конференции “Роботы и манипуляторы в экстремальных условиях”. СПб.: СПбДНТП, 1992. С. 100–106.

9. *Смольников Б.А., Леонтьев В.А.* Диссипативная динамика орбитальных тросовых систем // Материалы 7-й международной конференции “Планетоходы, космическая робототехника и наземные роверы”. СПб. ЛЕНЭКСПО, 2010. С. 48–49.

10. *Smolnikov B.A., Leontyev V.A.* Evolutionary dynamics of orbital objects // European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS 2011), Saint Petersburg, Russia, 4–8 July 2011. EUCASS CD book of papers 2011. Symposium 4, N 24.

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

К.А. Игнатьева

В работе рассматривается устойчивость осесимметричных форм равновесия неоднородных круглых и кольцевых пластин, загруженных нормальным давлением. Внешний край пластины закреплен от поворотов, но точки края свободно смещаются в радиальном и окружном направлениях, а внутренний — свободно смещается в направлении оси пластины, но не поворачивается. Ищется критическое значение нагрузки, при котором возможна бифуркация пластины в неосесимметричное состояние. Полагается, что несимметричная составляющая решения системы носит периодический характер, и численным методом определяется наименьшее значение нагрузки, при которой появляются волны в окружном направлении. Исследовано влияние отверстия в центре пластины, степени неоднородности материала на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости.

1. Введение

Исследованию устойчивости круглых и кольцевых пластин посвящены многочисленные статьи и монографии. В них обсуждаются влияние способа нагружения, граничных условий, начальных неправильностей на величину критической нагрузки, при этом в большинстве работ полагается, что до- и послекритическое поведение пластины является осесимметричным. Вопрос о существовании несимметричных решений у симметрично загруженной круглой пластины был впервые рассмотрен в работе [1]. В которой авторы исследовали большие перемещения пологих пластин и оболочек и рассматривали условия перехода форм равновесия, обладающих круговой симметрией, в несимметричные. С помощью метода Галёркина они привели решение, соответсвующее переходу симметричной формы равновесия к неосесимметричной. Существование и единственность симметричного решения было доказано Н.Ф. Морозовым в монографии [2]. В работе [3] были сформулированы и дока-

Доклад на семинаре 16 октября 2012 г.

заны теоремы о существовании и единственности решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих поведение упругих сферических оболочек и пластин. В работах [4, 5] для пологой сферической оболочки и круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения определены значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной. В настоящей работе рассматривается задача о потере устойчивости неоднородной круглой/кольцевой пластины, модуль упругости которой изменяется при движении от центра пластины к ее краю. Такая пластина может быть простейшей моделью решетчатой пластины диска зрительного нерва человека [6]. Исследуется влияние отверстия в центре пластины и неоднородности материала пластины на величину критической нагрузки.

2. Постановка задачи

Рассмотрим круглую/кольцевую пластину, внешним радиусом R, внутренним радиусом R_{in} (в случае кольцевой пластины) и толщиной h, лицевая поверхность которой загружена нормальным давлением. Материал пластины полагается изотропным, модуль упругости меняется при удалении от центра пластины к краю. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z), где (r, θ) — координаты срединной поверхности пластины ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$), ($R_{in} \leqslant r \leqslant R$ для пластины с отверстием в центре), z — расстояние по нормали до срединной поверхности ($-h/2 \leqslant z \leqslant h/2$).

Система уравнения равновесия пластины имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{T_r - T_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{2}{r}S + \frac{1}{r}\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} = 0,\\
&\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + T_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + T_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) +\\
&+2S\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) = -p,\\
&\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta} = N_r, \quad \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{2H}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} = N_\theta,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где p — нормальное давление, T_r, T_θ, S — усилия, M_r, M_θ, H — моменты, N_r, N_θ — перерезывающие силы, возникающие в пластине.

Внутренние усилия и моменты представлены в виде

$$
\begin{aligned}
&T_r(r,\theta) = -\frac{hE(r)}{1-\nu^2}(\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta),\\
&M_r(r,\theta) = -D(r)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right),\\
&T_\theta(r,\theta) = -\frac{hE(r)}{1-\nu^2}(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_r),\\
&M_\theta(r,\theta) = -D(r)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right),\\
&S(r,\theta) = -\frac{hE(r)}{2(1+\nu)}\epsilon_r\theta,\\
&H(r,\theta) = D(r)(1-\nu)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right),
\end{aligned}
$$

где $D(r) = \dfrac{E(r)h^3}{12(1-\nu^2)}$, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, ϵ_r, ϵ_θ, $\epsilon_{r\theta}$ — составляющие деформации.

После введения функции усилий $F(r,\theta)$ по формулам

$$
T_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2},\quad T_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2},\quad S = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) \tag{2}
$$

первые два уравнения равновесия (1) удовлетворяются автоматически.

Исключим силы N_r, N_θ из системы уравнений равновесия. Для этого продифференцируем четвертое уравнение системы (1) по r, прибавим его же, разделенное на r и сложим с пятым уравнением, продифференцированным и разделенным на r. Сравнивая полученное соотношение с третьим уравнением системы (1) и подставляя выражения для усилий и моментов, получим первое уравнение разрешающей системы

$$
\begin{aligned}
&D\Delta\Delta w + D'(r)L_1^+(w) + D''(r)L_2^+(w) = p + L(w,F),\\
&\frac{\Delta\Delta F}{E} + \left(\frac{1}{E}\right)'(r)L_1^-(F) + \left(\frac{1}{E}\right)''(r)L_2^-(F) = -hL(w,w)/2,\\
&(\,)' = \partial(\,)/\partial r,\quad \dot{(\,)} = \partial(\,)/\partial\theta,
\end{aligned} \tag{3}
$$

где Δ — оператор Лапласа, E — модуль Юнга, p — нормальное давление, L, $L_i^{\pm}$, $(i = 1, 2)$ — дифференциальные операторы:

$$L_1^{\pm}(y) = 2y''' + \frac{2 \pm \nu}{r} y'' + \frac{2}{r^2} (\ddot{y})' - \frac{y'}{r^2} - \frac{3\ddot{y}}{r^3},$$
$$L_2^{\pm}(y) = y'' \pm \nu \left(\frac{y'}{r} + \frac{\ddot{y}}{r^2} \right),$$
$$L(y, z) = y'' \left(\frac{z'}{r} + \frac{\ddot{z}}{r^2} \right) + z'' \left(\frac{y'}{r} + \frac{\ddot{y}}{r^2} \right) - 2 \left(\frac{\dot{y}'}{r} - \frac{\dot{y}}{r^2} \right) \left(\frac{\dot{z}'}{r} - \frac{\dot{z}}{r^2} \right).$$

Второе уравнение (3) получено после исключения тангенциальных составляющих вектора перемещения (u и v) из выражений, связывающих усилия и деформации с учетом (2).

Обозначим среднее значение модуля упругости как E_{av}:

$$E_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R E(r) r \, dr d\theta, \qquad E(r) = E_0 f(r), \tag{4}$$

где $f(r)$ — достаточно гладкая, положительная на отрезке $[0, R]$ функция.

Граничные условия

Примем, что внешний край пластины (сплошной и кольцевой) закреплен от поворотов, но точки края свободно смещаются в радиальном и окружном направлениях. В этом случае растягивающие и сдвигающие усилия на контуре полагаем равными нулю:

$$w = w' = T_r = S = 0 \tag{5}$$

при $r = R$.

Для кольцевой пластины рассмотрим два варианта условий на краю при $r = R_{in}$:

свободный край —

$$M_r = R_r = T_r = S = 0, \tag{6}$$

край смещается в направлении оси пластины, но не поворачивается —

$$w' = R_r = u = S = 0. \tag{7}$$

В условиях (6), (7) за R_r обозначено поперечное реактивное усилие: $R_r = N_r + \dfrac{H}{r}$.

Введем безразмерные переменные:

$$r = \frac{r^*}{R}, \ \ \delta = \frac{R_{in}}{R}, \ \ w = \beta \frac{w^*}{h}, \ \ p = \beta^3 \frac{p^* R^4}{E_{av} h^4},$$
$$F = \beta^2 \frac{F^*}{E_{av} h^3}, \ \ \beta^2 = 12(1-\nu^2).$$

Тогда система (3) примет вид (знак "*"в дальнейшем опускаем):

$$\begin{aligned} &g_1(r)\Delta\Delta w + g_1'(r) L_1^+(w) + g_1''(r) L_2^+(w) = p + L(w,F), \\ &g_2(r)\Delta\Delta F + g_2'(r) L_1^-(F) + g_2''(r) L_2^-(F) = -L(w,w)/2, \\ &(\,)' = \partial(\,)/\partial r, \quad (\dot{\,}) = \partial(\,)/\partial\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

где $g_1(r)$ — достаточно гладкая функция, определяющая закон изменения модуля упругости в плоскости пластины; $g_2(r) = 1/g_1(r)$.

Граничные условия, выраженные через искомые функции w и F, записываются в виде равенств

$$\begin{aligned} r = 1, \quad & w = w' = F'/r + \ddot{F}/r^2 = -\left(\dot{F}/r\right)' = 0; \\ r = \delta, \quad & w' = -\left(\dot{F}/r\right)' = 0, \\ & w''' + w''/r - w'/r^2 + (2-\nu)\left(\ddot{w}\right)'/r^2 - (3-\nu)\ddot{w}/r^3 = 0, \\ & \Delta F' + \Delta F - \tfrac{1-\nu}{r}(F + \ddot{F})' + g_2'(w'' + \nu(\tfrac{w'}{r} + \tfrac{\ddot{w}}{r^2})) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Для сплошной пластины, учитывая ограниченность искомых решений, в центре пластины дополнительно полагаем $w' = F' = 0$.

На рис. 1 изображен прогиб сплошной однородной ($q = 0$) и неоднородной пластин, с увеличением ($q = 3$) и уменьшением ($q = -3$) модуля упругости от центра пластины к ее краю.

На рис. 2 на примере неоднородной пластины показано, что при возрастании внешней нагрузки увеличивается интенсивность сжимающих напряжений и, одновременно, сужается зона, в которой они появляются, создавая тем самым дополнительные предпосылки для перехода пластины в неосимметричное состояние (см. [3]). Возможность перехода симметрично нагруженной пластины в несим-

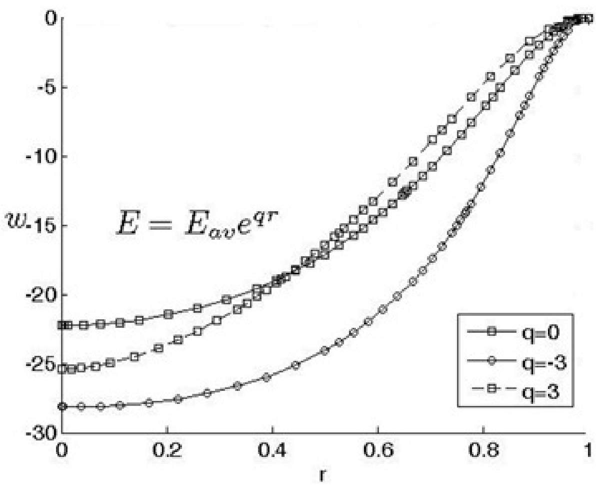

Рис. 1. Безразмерный прогиб сплошной однородной и неоднородной пластин.

метричное состояние обусловлено появлением, при больших прогибах, сжимающих напряжений в окрестности контура пластины, что может привести к потере устойчивости.

3. Схема решения

Мы ищем критическое значение нагрузки $p = p_{cr}$, при котором возможна бифуркация пластины в неосесимметричное состояние. Полагая, что несимметричная составляющая решения системы носит периодический характер, представим решение в виде (см. [4–6])

$$\begin{aligned} w(r,\theta) &= w_s(r) + w_n(r)\cos n\theta, \\ F(r,\theta) &= F_s(r) + F_n(r)\cos n\theta, \end{aligned} \tag{10}$$

где функции w_s, F_s описывают докритическое симметричное решение, а функции $w_{ns}(r,\theta) = w_n(r)\cos n\theta$, $F_{ns}(r,\theta) = F_n(r)\cos n\theta$ — закритическое состояние пластины (за n принято число волн в

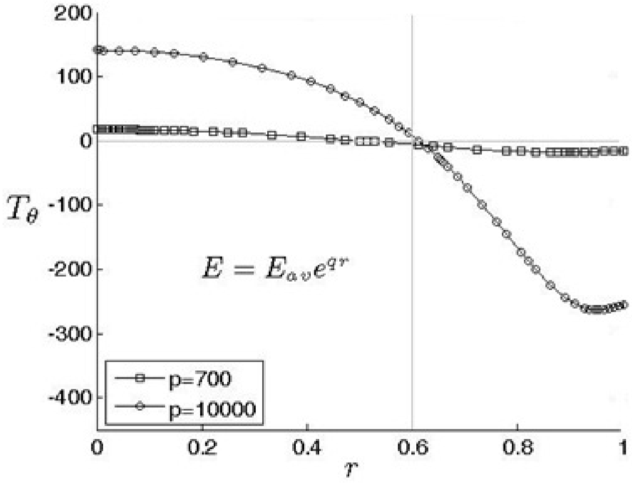

Рис. 2. Безразмерное окружное усилие для различных значений нагрузки.

окружном направлении, образовавшихся после потери устойчивости).

После разделения переменных (10) исходная система (8) — (9) распадается на две: нелинейную, для нахождения симметричного решения $w_s(r)$, $F_s(r)$, и линейную систему относительно $w_n(r)$, $F_n(r)$. Функции w_{ns}, F_{ns} полагаются малыми сразу после перехода пластины в неосесимметричное состояние.

При малых значениях p система (8) — (9) имеет симметричное решение, несимметричное решение этой системы появляется при возрастании нагрузки [2].

Система (8), соответствующая симметричной форме равновесия, в случае сплошной пластины, с учетом замены $\omega_0 = w'$, $\phi_0 = F'$

будет иметь следующий вид:

$$g_1\left(\omega_0''+\frac{\omega_0'}{r}-\frac{\omega_0}{r^2}\right)+g_1'\left(\omega_0'+\frac{\nu}{r}\omega_0\right)=\frac{pr}{2}+\frac{\omega_0\phi}{r},$$
$$g_2\left(\phi_0''+\frac{\phi_0'}{r}-\frac{\phi_0}{r^2}\right)+g_2'\left(\phi_0'-\frac{\nu}{r}\phi_0\right)=-\frac{\omega_0^2}{2r}, \tag{11}$$

а граничные условия:

$$\omega_0(1)=0,\quad \phi_0(1)=0. \tag{12}$$

В случае кольцевой пластины уравнения (8) имеют вид

$$g_1\left(\omega_0''+\frac{\omega_0'}{r}-\frac{\omega_0}{r^2}\right)+g_1'\left(\omega_0'+\frac{\nu}{r}\omega_0\right)=\frac{p}{2}(r-\frac{\delta^2}{r})+\frac{\omega_0\phi}{r},$$
$$g_2\left(\phi_0''+\frac{\phi_0'}{r}-\frac{\phi_0}{r^2}\right)+g_2'\left(\phi_0'-\frac{\nu}{r}\phi_0\right)=-\frac{\omega_0^2}{2r}; \tag{13}$$

к граничным условиям на краю при $r=1$ вводим дополнительные условия на внутреннем крае:

в случае сплошной пластины, учитывая ограниченность искомых решений, в центре пластины дополнительно полагаем

$$\omega_0(0)=\phi_0(0)=0; \tag{14}$$

для кольцевой пластины —

$$\omega_0'(\delta)+\frac{\omega_0(\delta)}{r}=0,\quad \phi_0'(\delta)+\frac{\nu}{r}\phi_0(\delta)=0. \tag{15}$$

Для каждого числа волн в окружном направлении n мы сначала решаем симметричную задачу, а затем проверяем существование несимметричного решения $w_n(r)$, $F_n(r)$. Критической нагрузкой выберем $p_{cr}=\min\limits_n p(n)$.

4. Результаты

4.1. Результаты для круглой сплошной пластины

Были проведены серия расчетов для неоднородной сплошной пластины при изменении модуля упругости пластины по закону

$E = E_0^{(1)} e^{q_1 r}$ и $E = E_0^{(2)}(1 + q_2 r)$. Параметры $E_0^{(i)}$ и q_i $(i = 1, 2)$ выбирались так, чтобы среднее значение модуля упругости пластины (2) оставалось постоянным. Для однородной пластины наименьшее значение нагрузки, найденное при численном интегрировании системы(8) совместно с (9), составляет $p_{cr}^0 = 62598$, а соответствующее этой нагрузке волновое число $n = 14$. Значение параметра $q = 0$ соответствует пластине с постоянным модулем упругости. Для неоднородных сплошных, защемленных по краю пластин результаты расчетов приведены в табл. 1, 2 и на рис. 3.

Таблица 1. **Критическая нагрузка для неоднородной сплошной пластины** ($E = E_0^{(1)} e^{qr}$)

E	$q = -3$	$q = -1$	$q = -0.5$	$q = 0$	$q = 0.5$	$q = 1$
p_{cr}	26497	47570	54712	62598	71363	81220
n	15	14	14	14	14	14

Из табл.1 видно, что в каждой серии расчетов с уменьшением модуля упругости к краю пластины потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходила при более низкой нагрузке и с образованием большего числа складок в окружном направлении, чем для однородной пластины. При увеличении критическая нагрузка, наоборот, возрастала.

Таблица 2. **Критическая нагрузка для неоднородной сплошной пластины** ($E = E_0^{(2)}(1 + qr)$)

E	$q = -0.9$	$q = -0.5$	$q = -0$	$q = 0.5$	$q = 1$	$q = 3$
p_{cr}	18794	50790	62598	69035	73149	81150
n	17	14	14	14	14	14

По табл. 2 видно, что, чем быстрее убывает модуль упругости, тем ниже становится величина критической нагрузки. Именно при уменьшении модуля упругости закон его изменения играет большую роль на значении критического давления.

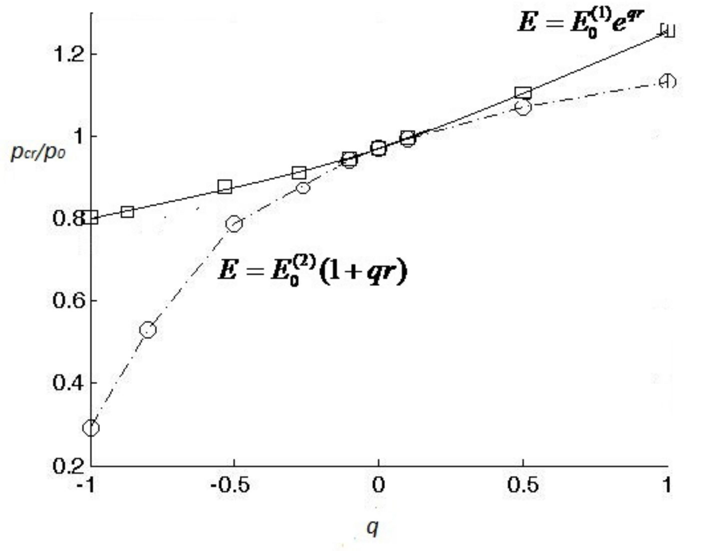

Рис. 3. Изменение критической нагрузки для неоднородной сплошной пластины, при различных законах изменения модуля упругости, q, p_0 — критическая нагрузка для однородной пластины.

4.2. Результаты для кольцевой пластины.

Были проведены серии расчетов для однородной кольцевой и неоднородной кольцевой пластин при изменении модуля упругости пластины по законам, аналогичным для сплошной пластины. Для однородной пластины наименьшее значение нагрузки составляет $p_{cr}^0 = 62598$, а соответствующее этой нагрузке волновое число $n = 14$. Значение параметра $q = 0$ соответствует пластине с постоянным модулем упругости. Для неоднородных сплошных, защемленных по краю пластин результаты расчетов приведены на рис. 4 и табл. 3, 4.

В каждой серии расчетов с уменьшением модуля упругости к краю пластины потеря устойчивости происходила при более низкой

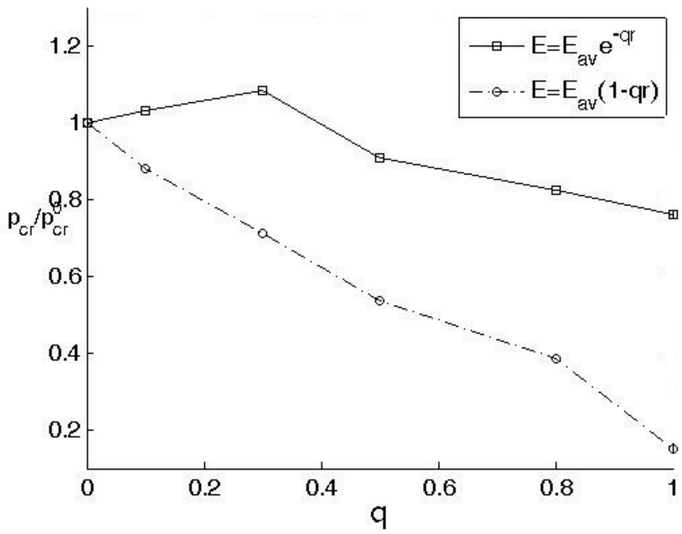

Рис. 4. Изменение критической нагрузки для кольцей пластины, при различных законах изменения модуля упругости, q, p_0 — критическая нагрузка для однородной пластины.

нагрузке, нежели в случае сплошной пластины и с образованием большего числа складок в окружном направлении. Видно, что чем быстрее убывает модуль упругости, тем ниже становится величина критической нагрузки. Именно при уменьшении модуля упругости закон его изменения играет большую роль на значении критического давления.

В табл. 3 приведены безразмерные значения критической нагрузки p, числа волн n, образующихся по краю пластины при переходе в неосесимметричное состояние, для однородной кольцевой пластины при различных радиусах центрального отверстия. Из табл. 3 видно, что потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия при увеличении радиуса центрального отверстия происходит при большем значении критической нагрузки с образованием меньшего числа складок в окружном направлении.

Таблица 3. **Критическая нагрузка для однородной кольцевой пластины при $\delta = 0$**

	$\delta = 0$	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.15$
p_{cr}	62598	62863	64385	67707	72048
n	14	13	13	12	12

В табл. 4 приведены безразмерные значения критической нагрузки p, числа волн n для неоднородной кольцевой пластины при изменении модуля упругости по закону $E = E_0 e^{qr}$ и значении центрального отверстия $\delta = 0.05$. Из табл. 4 в случае убывания модуля упругости от центра пластины к ее краю потеря устойчивости происходит при более низкой нагрузке, чем для однородной кольцевой и неоднородной сплошной пластин. Такую же закономерность мы видим и при увеличении модуля упругости к краю пластины.

Таблица 4. **Критическая нагрузка для неоднородной кольцевой пластины**

	$q = -0.5$	$q = -0.1$	$q = 0$	$q = 0.1$	$q = 0.5$	$q = 1$
p_{cr}	47060	62696	64385	66111	73413	83600
n	13	13	13	13	13	13

4.3. Моделирование решетчатой пластины глаза

Подобная пластина может быть простейшей моделью решетчатой пластины (РП) диска зрительного нерва человека. РП является неоднородной, существенно мягче склеры – основной оболочки глаза, в связи с тем, что в несколько раз тоньше, а также ослаблена множеством отверстий. Учитывая связь размерных и безразмерных, находим, что критическое давление $p^o_{cr} = 62598$, полученное для неоднородной сплошной, защемленной по краю пластин радиуса $R = 1$ мм, толщиной $h = 0.1$ мм, $E_{av} = 0.3$ МПа, $\nu = 0.45$, при котором возможна бифуркация в неосесимметричное состояние, соответствует 63.43 Кпа или 476 мм рт. ст. В табл. 5 приведены результаты размерного давления для неоднородной сплошной пластины, модуль упругости которой изменяется по закону $E = E_0 e^{q_r}$.

Таблица 5. **Размерная критическая нагрузка для неоднородной кольцевой пластины**

	$q = -0.3$	$q = -1$	$q = -0.5$	$q = 0$	$q = 0.5$	$q = 1$
P_{cr} мм.рт.ст	204.81	361.56	415.84	476	542.40	617.32

В случае кольцевой неоднородной пластины, при убывании модуля упругости к краю пластины это возможно при давлении, равном 9.67 Кпа или 77 мм рт. ст. Данные значения пластины, для которых производился расчет, являются приближенными параметрами решетчатой пластины глаза.

5. Заключение

В работе численным методом исследована потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия неоднородных сплошных/кольцевых пластин. Было найдено критическое давление, при котором возможна бифуркация пластины в неосесимметричное состояние. Показано влияние степени неоднородности и размера центрального отверстия пластины на изменение критической нагрузки. Произведен численный анализ критической нагрузки для различных законов изменения модуля упругости пластины, размеров внутреннего края в случае кольцевой пластины и различных краевых условиях.

Литература

1. *Панов Д. Ю., Феодосьев В. И.* О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // ПММ. T.XII, 1948. С. 389–406.

2. *Морозов Н. Ф.* Единственность симметричного решения задачи и о больших прогибах симметрично загруженной круглой пластины // ДАН СССР. Т.123. № 3. 1958.

3. *Piechocki W.J.* On the non-linear theory of thin elastic spherical shells // Arch. Mech.1969. № 21, P. 81–101.

4. *Huang N. C.* Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells // J.Appl. Mech.1964. № 31. P. 447–457.

5. *Cheo L. S., Reiss E. L.* Unsymmetrical wrinkling of circular plates // Quart. Appl. Math.1971. № 31. P. 75–91.

6. *Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.* О потере устойчивости симметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Вып. 3. 2012. Сер. 1.

ЗАВИСИМОСТЬ ВНУТРИГЛАЗНОГО ОБЪЕМА ОТ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ

П. В. Трофименко

В работе для эллипсоидальных изотропных оболочек вращения получены зависимости изменения объема оболочки от приложенной нагрузки (внутреннего давления) по линейной безмоментной теории оболочек. Выведены соотношения, позволяющие при одном и том же объеме оценить влияние формы оболочки (соотношения главных полуосей оболочки) на зависимость “объем–давление”.

1. Введение

В последнее время различные теории оболочек широко применяются для решения ряда медицинских проблем, в том числе и в задачах офтальмологии. Новые знания в офтальмологии помогают более качественно диагностировать ряд заболеваний и разрабатывать эффективные методы их лечения.

В офтальмологии под ригидностью глаза понимают некоторый параметр, характеризующий зависимость изменения объема глаза при изменении давления внутри фиброзной оболочки глаза [1, 2]. Понятие ригидности глаза лежит в основе клинической тонометрии и тонографии. Одним из современных способов лечения некоторых глазных заболеваний является интрасклеральная инъекция небольшой (до 0,2 мл) дозы лечебного препарата. За счет кратковременного увеличения внутреннего объема глазного яблока при введении таких инъекций в первый момент происходит резкое увеличение внутриглазного давления (ВГД). Даже кратковременное увеличение ВГД выше определенного индивидуального уровня может привести к нарушению кровообращения на сетчатке и в диске зрительного нерва. Важно в каждом конкретном случае оценить возможный уровень изменения ВГД в результате инъекции и риск для отдельного пациента, а также, возможно, на основе этих данных рекомендовать уменьшенную дозу препарата для отдельных больных.

Доклад на семинаре 13 ноября 2012 г.

2. Деформация сферической оболочки

В случае деформации сферической изотропной оболочки под действием внутреннего давления p в отсутствии массовых сил единственным перемещением, отличным от нуля, является нормальное перемещение, при этом ε — относительное удлинение радиуса R_0 срединной поверхности (см. [3]):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_n}{E}(1-\nu), \tag{1}$$

где σ_n, E, ν — нормальное напряжение, модуль Юнга, коэффициент Пуассона соответственно.

$$\sigma_n = \frac{pR_0}{2h}, \tag{2}$$

здесь h — толщина оболочки. Изменение объема сферы имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta V &= \tfrac{4}{3}\pi\Big(R_0^6\tfrac{p^3}{8h^3E^3}(1-\nu)^3 + R_0^5\tfrac{p^2}{4h^2E^2}(1-\nu)^2 + R_0^4\tfrac{p}{2hE}(1-\nu)\Big) = \\ &= \tfrac{2\pi p(1-\nu)R_0^4}{hE}\Big[1+\tfrac{pR_0}{2hE}(1-\nu)+\tfrac{p^2R_0^2}{12h^2E^2}(1-\nu)^2\Big]. \end{aligned} \tag{3}$$

При нагружении изотропной сферической оболочки внутренним давлением от 0 до 80 мм рт.ст. получается практически линейная зависимость изменения объема от изменения давления. Результаты расчетов при $E = 14.3$ МПа, $h = 0.5$ мм, $\nu = 0.45$, $R_0 = 12$ мм представлены на рис. 1.

При всех реальных параметрах эта зависимость остается линейной.

3. Деформация эллипсоидальной оболочки вращения

Для нахождения влияния формы оболочки на зависимость “объем–давление” рассмотрим поверхность, полученную вращением эллипса вокруг оси. У такой оболочки линиями главной кривизны являются ее меридианы и параллели. В соответствии с этим в качестве главных криволинейных координат срединной поверхности можно взять в данном случае угол θ (образуемый нормалью к

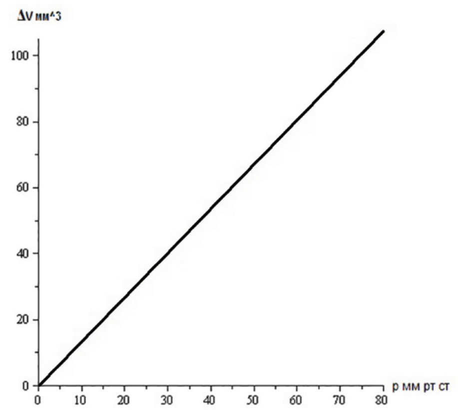

Рис.1. Зависисмость изменения объема от изменения давления сферы.

срединной поверхности с осью оболочки) и угол ϕ, определяющий положение точки на соответствующем параллельном круге (рис. 2).

Если R_1 — радиус кривизны меридиана, то второй радиус кривизны, R_2, равен длине отрезка нормали к срединной поверхности от этой поверхности до оси оболочки [3], причем

$$R_1 = \frac{b^2}{a\left(\frac{b^2}{a^2}\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad R_2 = \frac{a}{\left(\frac{b^2}{a^2}\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4}$$

где a и b — значения главных полуосей эллипса, причем b соответствует оси вращения. Так как оболочка осесимметричная (нагрузки не зависят от угла ϕ), то уравнения нормальных усилий примут вид (см. [4]):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{R_2\sin(\theta)}\int_0^{\theta}(p_n\cos(\theta) - p_1 sin(\theta))R_1R_2\sin(\theta)d\theta, \\ N_2 &= p_nR_2 - \frac{R_2N_1}{R_1}. \end{aligned} \tag{5}$$

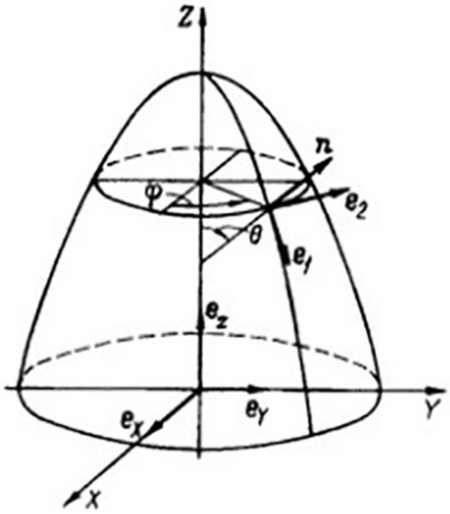

Рис.2. Модель оболочки.

Здесь p_1 и p_n — составляющие интенсивности внешней нагрузки, распределенной по срединной поверхности оболочки. Далее, в силу симметрии, будем рассматривать сечение оболочки — четверть эллипса.

Подставив (4) в систему (5), можно найти нормальные усилия:

$$N_1 = \frac{pa}{2\left(\frac{b^2}{a^2}\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}},$$
$$N_2 = pa\left(\frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2}\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2}{2b^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{6}$$

Для полюса ($\theta = 0$) имеем $R_1 = R_2 = a^2/b$, и уравнения (6) дадут

$$N_1 = N_2 = \frac{pa^2}{2b}. \tag{7}$$

На экваторе ($\theta = \pi/2$) имеем $R_1 = b^2/a$ и $R_2 = a$. Отсюда

$$N_1 = \frac{pa}{2}, \qquad N_2 = pa\left(1 - \frac{a^2}{2b^2}\right). \tag{8}$$

Определив N_1 и N_2, можно найти прогиб w на полюсе и экваторе из формул линейных деформаций (см. [3]):

$$\begin{aligned} R_1\varepsilon_1 &= \frac{du}{d\theta} + w = \frac{R_1}{Eh}(N_1 - \nu N_2),\\ R_2\varepsilon_2 &= u\operatorname{ctg}(\theta) + w = \frac{R_2}{Eh}(N_2 - \nu N_1). \end{aligned} \tag{9}$$

После определения прогиба оболочки может быть также определен и ее новый объем.

На рис. 3 показано относительное изменение объема изотропных эллипсоидальных оболочек, имеющих первоначально одинаковый объем, но разные отношения главных полуосей $k = b/a$ (табл. 1) при нагружении оболочек внутриглазным давлением 45 мм рт.ст.

4. Заключение

Из графика на рис. 3, описывающего изменения внутреннего объема для различного соотношения главных полуосей изотропной эллипсоидальной оболочки, видно, что наибольшее изменение внутреннего объема происходит в случае, когда оболочка имеет форму сплюснутого эллипсоида (участок 1), что соответствует глазу с гиперметропией (рис. 3(a) на вклейке). Наименьшее изменение соответствует сферической форме (точка А). Для эллипсоидальной вытянутой оболочки (участок 3) характерно постепенное медленное возрастание значения изменения объема при увеличении соотношения главных полуосей (случай миопии (рис. 3(b) на вклейке)). Из общих картин деформации, представленных для различных случаев, можно сделать вывод, что оболочки под действием внутреннего давления стремятся принять сферическую форму. Поэтому максимальный прогиб наблюдаем именно в более пологой части.

Из полученных результатов видно, что зависимость “объем–давление” очень чувствительна к первоначальной форме оболочки, поэтому следует учитывать этот факт при решении задач о

Таблица 1. **Относительное изменение объема изотропных эллипсоидальных оболочек**

	$a(mm)$	$b(mm)$	$k = b/a$
1	15.13	7.56	0.5
2	14.23	8.53	0.6
3	13.21	9.9	0.75
4	12.67	10.76	0.85
5	12	12	1
6	11.14	13.92	1.25
7	10.48	15.72	1.5
8	9.96	17.43	1.75
9	9.53	19.06	2

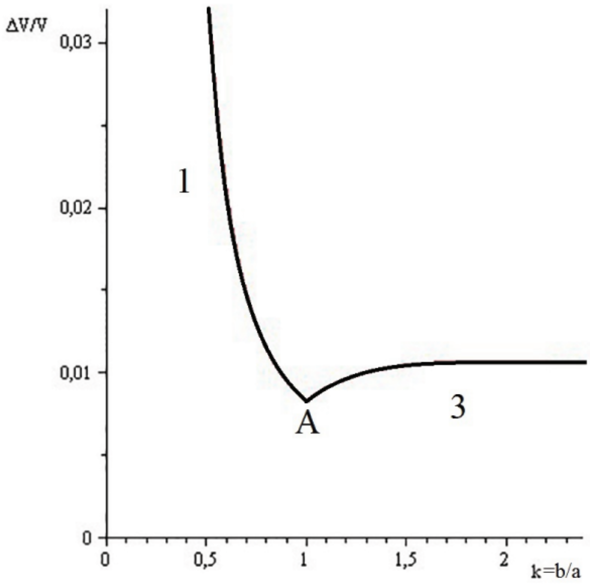

Рис.3. Относительное изменение объема эллипсоидов при одинаковом давлении и разных значениях $k = b/a$.

инъекциях. В связи с этим полезно на примере решения задачи о сферическом слое сравнить трехмерное решение с решением, полученным по неклассическим теориям оболочек. Это поможет понять, какую их этих теорий целесообразней использовать для задачи об интрасклеральных инъекциях.

Литература

1. *Pallikaris I.G., Dastiridou A.I., Tsilimbaris M.K., Karyotakis N.G., Ginis H.S.* Expert Rev. Ophthalmol. 5(3), Ocular rigidity, 343–351 (2010).
2. *Нестеров А.П., Бунин А.Я., Канцельсон Л.А.* Внутриглазное давление. Физиология и патология. М.: Наука, 1974. 381 с.
3. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки. М., 1966. 636 с.
4. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. Изд. 2-е, доп. и перераб. Л.: Стройиздат, Ленингр. отделение, 1975. 256 с.

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТОНОГРАФИИ

Д.В. Франус

В работе обсуждаются существующие математические модели тонографии глаза. Тонография — метод исследования динамики внутриглазной жидкости. Сущность метода заключается в продленной тонометрии (обычно 4 мин) и определении коэффициента легкости оттока и минутного объема водянистой влаги. В рассмотренной недавно московскими учеными новой модели тонографии предложено отказаться от основного положения классической модели о постоянстве скорости притока жидкости в глазу. При отказе от этого положения усовершенствованная модель может использоваться для определения коэффициента легкости оттока по данным о внутриглазных инъекциях.

1. Введение

Глаз как механическая система в первом приближении может рассматриваться как сферическая оболочка, заполненная несжимаемой жидкостью [1]. Важным параметром, характеризующим внутриглазную жидкость, является внутриглазное давление (ВГД), а уровень ВГД определяется балансом между производством внутриглазной жидкости (притоком) и дренажом (оттоком из глаза через трабеклярную сеть и увеосклеральные пути) [1, 2]. Таким образом, важными параметрами являются также показатели гидродинамики глаза.

Инструментальные методы измерения внутриглазного давления называются тонометрией, а приборы для измерения внутриглазного давления — тонометрами. Методы измерения показателей гидродинамики глаза называют тонографией, а соответствующие приборы — тонографами.

Основной принцип тонометрии заключается в том, что под действием внешних сил (т.е. под действием тонометра) оболочки глаз-

Доклад на семинаре 27 ноября 2012 г.

ного яблока деформируются. Деформации роговой оболочки по форме могут быть в виде вдавления (импрессии) и сплющивания (аппланации). По изменению формы роговицы при ее нагружении на основании эмпирических данных или расчётов судят об уровне внутриглазного давления.

Тонометр, поставленный на глаз, чисто механически вызывает повышение внутриглазного давления. В связи с этим, если тонометр будет некоторое время находиться на глазу, то начнется компенсаторный ускоренный отток внутриглазной жидкости и внутриглазное давление начинает постепенно снижаться.

Таким образом, сущность тонографии заключается в продленной тонометрии (обычно до 4 минут) и последующем вычислении основных показателей гидродинамики глаза — коэффициента легкости оттока и минутного объема водянистой влаги.

О необходимости измерять ВГД заговорили в середине XIX в. Первый импрессионный тонометр был создан Альбрехтом фон Грефе в 1862 г., однако его показатели оказались ошибочными [2], первый аппланационный тонометр был создан А.И. Маклаковым в 1884 г. Простота конструкции и хорошая повторяемость получаемых результатов сделали его популярным в нашей стране. Тонометр подобного типа в несколько измененном виде с 1962 г. используют и в США. О необходимости замерять параметры гидродинамики глаза заговорили позже. Сопротивление оттоку, (R), первоначально предложил измерять Гольдман в 1951 г. величиной давления в мм рт.ст., которое требуется, чтобы, преодолевая сопротивление, вытеснить из глаза за 1 минуту 1 мм^3 влаги. Результат оценивали в мм рт.ст. $\cdot$мин/мм^3. Однако в широкую клиническую практику вошел обратный показатель $1/R = C$ — коэффициент легкости оттока размерностью мм^3/(мин$\cdot$мм рт.ст).

2. Классическая модель тонографии

Простейшая механическая модель глазного яблока основана на представлении его упругой оболочкой, заполненной несжимаемой жидкостью (рис. 4 на вклейке). Внутренний объем оболочки связан с системой притока жидкости, через которую в единицу времени поступает объем жидкости F_h, и системой оттока, через которую в единицу времени вытекает объем жидкости F_e. В стационарных условиях приток и отток равны между собой: $F_h = F_e = F_{h0}$, и жидкость в оболочке имеет некоторый стационарный объем V_0 и давление p_0. Связь между V_0 и p_0 определяется упругими свойствами оболочки.

В традиционно используемой врачами модели глазного яблока [1] принимается, что приток водянистой влаги к глазу (F_h) не изменяется как после нагружения глаза, так и в течение всего нестационарного процесса установления внутриглазного давления под нагрузкой. Он, таким образом, равен величине оттока водянистой влаги F_{e0} в стационарном режиме до нагружения $F_h = F_{e0} = \text{const}$. Считается, что величина оттока F_e определяется соотношением, соответствующим постоянному гидравлическому сопротивлению путей оттока водянистой влаги:

$$F_e = \frac{p - p_e}{R} = C\left(p - p_e\right), \qquad C = \frac{1}{R} = \text{const}, \tag{1}$$

Здесь p – текущее значение внутриглазного давления, p_e – давление в эписклеральных венах, R – сопротивление путей оттока, C – коэффициент легкости оттока, который в принятой модели считается не зависящим от условий течения жидкости, нагружения глаза и уровня внутриглазного давления.

Из условия равенства притока и оттока до нагружения следует выражение для величины притока:

$$F_h = F_{e0} = \frac{p_0 - p_{e0}}{R} = C\left(p_0 - p_{e0}\right), \tag{2}$$

При очень быстром (длительностью не более нескольких секунд) первоначальном нагружении глаза тонографом (как и при тонометрии) давление в глазу мгновенно возрастает от стационарного значения p_0 перед нагружением глаза до некоторой величины $p\left(0\right) = p_1$, которая определяется весом груза P, упругими свойствами оболочки, формой контактной поверхности груза и роговицы и т.д. Изменение объема жидкости в глазу при этом пренебрежимо мало: $V\left(0\right) = V_1 = V_0$.

Если груз остается на поверхности роговицы продолжительное время, то в глазу реализуется нестационарный процесс частичного опорожнения глаза и установления нового стационарного состояния [3].

Так, если изменение объема жидкости в глазу dV за малый промежуток времени dt равно разности мгновенных значений притока и оттока $F_h - F_e$, то нестационарный процесс перехода от одного стационарного состояния к другому описывается уравнением

$$\frac{dV}{dt} = F_h - F_e, \quad \text{при } F_e = C\left(p - p_e\right), \ F_h = \text{const}. \tag{3}$$

При принятых предположениях уравнение интегрируется от $t = 0$ до $t = \triangle t$ (где $\triangle t$ – время тонографического исследования), и получается соотношение:

$$\frac{V\left(t\right) - V\left(0\right)}{\triangle t} = F_h - C\left(\langle p\rangle - \langle p_e\rangle\right). \tag{4}$$

Здесь угловыми скобками обозначены средние за время $\triangle t$ значения давлений в глазу и эписклеральных венах. Как подчеркивается в работе [3], среднее значение должно пониматься как среднее интегральное

$$\langle p\rangle = \frac{1}{\triangle t}\int_0^t p\left(t\right)dt, \qquad \langle p_e\rangle = \frac{1}{\triangle t}\int_0^t p_e\left(t\right)dt. \tag{5}$$

Подставляя в полученное соотношение выражение для F_h, получаем точное в рамках принятой модели соотношение для определения коэффициента легкости оттока:

$$C = \frac{V\left(0\right) - V\left(t\right)}{\triangle t\left[\langle p\rangle - p_0 - \left(\langle p_e\rangle - p_{e0}\right)\right]}. \tag{6}$$

Это соотношение лежит в основе стандартной методики обработки тонографических кривых и оценке величины коэффициента легкости оттока [1, 2]. При этом на практике чаще всего используют среднее арифметическое между начальным и конечным значениями $< p >= [p(0)+p(t)]/2$. В работе [3] показано, что замена среднего интегрального средним арифметическим может приводить к большим ошибкам.

3. Усовершенствованные или модифицированные модели тонографии

В работах [3-5] обсуждются модифицированные методы тонографии, основанные на линеаризации зависимости $V(p, P)$.

На протяжении тонографического опыта поведение оболочки глаза можно считать линейно-упругим:

$$dV = \alpha dp. \tag{7}$$

Обычно полагают, что упругое поведение оболочки не зависит от величины груза тонографа. Имеющиеся в настоящее время результаты расчётов задачи о деформации упругой оболочки, моделирующей глаз, показывают, что величина коэффициента объемной упругости оболочки α в диапазоне параметров, характерных для офтальмологии, слабо зависит от веса груза. В связи с этим в работах [3, 4] принимается, что величина α не зависит от величины нагрузки при тонографии. Обычно принимается следующее равенство: $\alpha = \frac{1}{p_0} 0.0215 \ln 10$.

Также обычно считается, что нагружение глаза приводит к изменению давления в эписклеральных венах на некоторую постоянную величину. При стандартной обработке для этой величины предполагается всегда одно и то же (небольшое в сравнении со стационарным значением) постоянное значение:

$$p_e = p_{e0} + 1.25 \text{ мм рт. ст.}, \tag{8}$$

где p_e – давление в эписклеральных венах в нагруженном глазу. Согласно современным представлениям, величина давления в эписклеральных венах в обычных стационарных условиях у разных людей варьирует в небольших пределах: $p_{e0} \sim$ 8-10 мм рт. ст.

При сформулированных предположениях уравнение (7) с учетом (3) принимает вид

$$\alpha \frac{dp}{dt} = C\left(p_0 - p_{e0} - p + p_e\right). \tag{9}$$

причем величины α, C, p_0, $p_e - p_{e0}$ – постоянные, не зависящие от веса груза-тонометра. Решение этого уравнения при соответствующем подборе константы C должно совпадать с тонограммой $p = p(t)$ для заданных величин α, $p_e - p_{e0}$ и p_0, что дает возможность оценить коэффициент легкости оттока для конкретного обследуемого.

Решение уравнения (9) имеет вид

$$p = p_\infty + (p_1 - p_\infty)\, e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad p_\infty = p_0 + p_e - p_{e0}, \quad \tau = \frac{\alpha}{C}. \tag{10}$$

Здесь τ — характерное время релаксации внутриглазного давления, $p_1 = p(0)$ – начальное давление для тонограммы (внутриглазное давление сразу после установки груза на глаз, т.е. при $t = 0$), которое всегда превышает давление до нагружения p_0 $(p_1 > p_0)$, $p_\infty = p(\infty)$ – давление, которое установилось бы в глазу при неограниченной длительности нагружения.

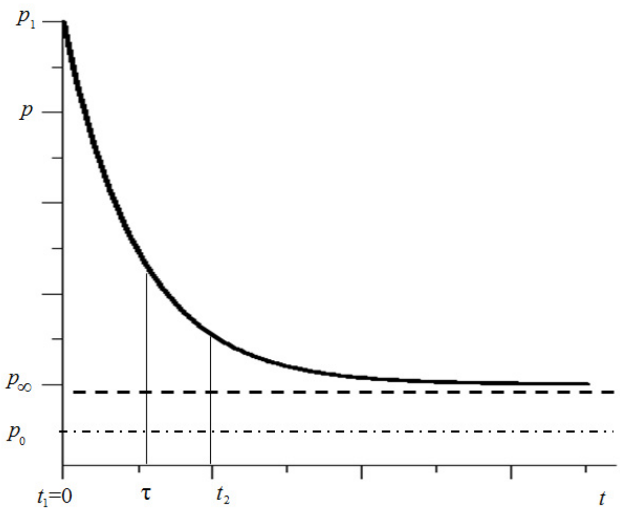

Рис. 1. Аппроксимация тононграммы экспонентой.

Таким образом, аппроксимируя тонограмму экспонентой и определяя параметр τ и асимптотическое значение давления при $t \to \infty$, можно оценить величину коэффициента легкости оттока C и изменение давления в эписклеральных венах при нагружении в предположении, что интенсивность притока и выходная проводимость под грузом не изменились по сравнению с разгруженным состоянием:

$$C = \frac{\alpha}{\tau}, \quad p_e - p_{e0} = p_\infty - p_0. \tag{11}$$

Обработка данных на основе уравнения (9) позволяет не только оценить коэффициент легкости оттока, но и показывать, что, как правило, $p_\infty \neq p_0$. В стационарном состоянии, которое установится в глазу под грузом, внутриглазное давление p_∞ отличается от давления p_0 в ненагруженном глазу [3, 4]. Отсюда следует, в частности, что принимаемое обычно соотношение (8) не удовлетворяется, и величина давления в эписклеральных венах должна быть включена в число определяющих параметров, зависящих от величины нагрузки на глаз.

В работах [4-6] обсуждается также правомерность предположения о постоянстве скорости притока жидкости в глазу, сделанного в классической модели тонографии. Показано, что это допущение является “сомнительным и предложена усовершенствованная модель, в которой приток жидкости рассматривается как сумма гидравлического и негидравлического (осмотического) компонентов. Сделано ограничение о постоянстве негидравлического компонента. Принято, что для скорости притока имеет место равенство

$$F_h = L(p_\alpha - p) + F_h^*, \tag{12}$$

где L — гидравлическая проводимость эквивалентной мембраны, разделяющей кровь в артериальных капиллярах цилиарного тела и водянистую влагу в задней камере глаза, p_α — давление в капиллярах, а F_h^* — компонент скорости притока, полагаемый постоянным, так же как и L и p_α.

Подставляя соотношения (12) в равенства (2) и (3) и повторяя выкладки, описанные выше, можно получить измененные выражения для характерного времени τ и установившегося под нагрузкой давления p_∞ в следующем виде:

$$\tau = \frac{\alpha}{\frac{1}{R} + L}, \qquad p_\infty = p_0 + (1 + LR)\,(p_e - p_{e0})\,. \tag{13}$$

Используя (13) и принебрегая разностью $p_e - p_{e0}$, можно получить

$$C + L = \frac{1}{R} + L = \frac{\alpha}{\tau} = \frac{\alpha\,(p\,(0) - p\,(t))}{\triangle t\,[\langle p\rangle - p_0 - (\langle p_e\rangle - p_{e0})]}, \tag{14}$$

откуда

$$C = \frac{\alpha\,(p\,(0) - p\,(t))}{\triangle t\,[\langle p\rangle - p_0 - (\langle p_e\rangle - p_{e0})]} - L. \tag{15}$$

Как отмечается в работе [3], теперь экспонента, которая аппроксимирует тонографическую кривую, зависит от трех констант. Две из этих констант соответствуют начальному тонометрическому давлению и предельному давлению p_∞. Из (13) видно, что если при постоянном притоке, зная τ, можно найти отношение податливости глазной оболочки α к проводимости выводящих путей (коэффициенту легкости оттока), то при постоянном негидравлическом притоке можно найти только отношение податливости к суммарной проводимости систем притока и оттока. В работе [4] отмечается также, что получаемая информация зависит от допущений об организации притока, а податливость α может быть определена при измерении внутриглазного давления при введении в глаз заданных объемов жидкости.

4. Изменение давления при интрасклеральных инъекциях

Отметим, что в настоящее время для лечения различных глазных заболеваний широко используют внутрисклеральные инъекции небольшой (до 0,2 мл) дозы лечебного препарата. Приведем, например, данные из работы [7]. На рис. 2 представлен график зависимости изменения внутриглазного давления от времени при введении дополнительного объема жидкости объёмом 0.05 мл. Клинические данные представлены в таблице.

Таблица 1. **Результаты эксперимента по введению внутресклеральных инъекции объёмом 0,05 мл.**

Время относительно введения	Клиническая группа, среднее ВГД, мм.рт.ст.
до введения	19.5
через 0.5 мин.	65.2
через 3 мин.	33.4
через 5 мин.	27.6

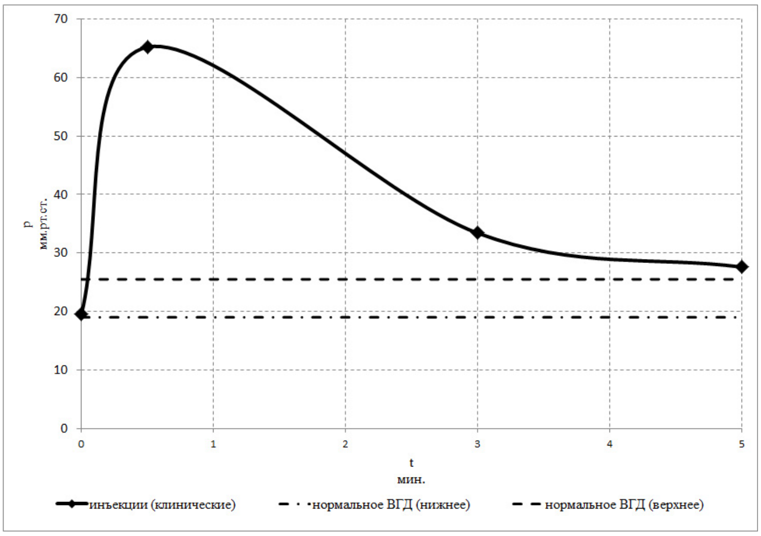

Рис. 2. Зависимость внутриглазного давления при введении внутресклераных инъекций объемом 0,05 мл.

За счёт кратковременного увеличения внутреннего объема глазного яблока при введении таких инъекций в первый момент происходит резкое увеличение внутриглазного давления (ВГД). В дальнейшем, как и при тонографии, в живом глазу происходит восстановление давления. Такая экспериментальная кривая может также рассматриваться как тонографическая кривая и может помочь оценить и изменение скорости притока, и коэффициент легкости оттока.

Оценочные расчёты дают

$$L = 0.3\frac{\text{мм.}^3}{\text{мин}\cdot\text{мм рт.ст.}}, \qquad \alpha = \frac{1}{p_0 0.0215\ \ln 10}, \tag{16}$$

Тогда по соотношению (15) можно получить в данном случае коэффициент легкости оттока: $C = 0.47\frac{\text{мм.}^3}{\text{мин}\cdot\text{мм рт.ст.}}$.

5. Заключение

Сравнение тонограммы при приложении груза с плоским основанием (или тонометра) с графиками зависимости “давление-объем"при введении инъекций показывает, что усовершенствованные модели тонографии могут использоваться для определения коэффициента легкости оттока по данным о внутриглазных инъекциях.

Литература

1. *Нестеров А.П., Бунин Ф.Я., Кацнельсон Л.А.* Внутриглазное давление. Физиология и патология. М.: Наука, 1974. 381 с.
2. *Волков В.В.* Глаукома открытоугольная // Медицинское информационное агентство. 2008. С. 10–13.
3. *Любимов Г.А., Моисеева И.Н., Штейн А.А.* Динамика внутриглазной жидкости: математическая модель и ее основные следствия // Известия РАН. Мех. жидк. и газа. 2007. N. 5. С. 7–18.
4. *Любимов Г.А., Моисеева И.Н., Штейн А.А.* Механический смысл тонографических методов исследования давления // Биомеханика глаза–2007. Сборник трудов конференции. М.: Московский НИИ глазных болезней им. Гельмгольца, 2007. С.127–134.

5. *Любимов Г.А., Штейн А.А., Мичурина М.В., Моисеева И.Н.* Математическое моделирование методов, используемых в офтальмологии для измерения механических характеристик глаза // Современные проблемы механики. М.: Изд-во МГУ; Изд-во Омега-Л., 2008. С. 290–306.

6. *Моисеева И.Н., Штейн А.А.* Анализ зависимости давление – объем для глазного яблока, нагруженного плоским штампом, на основе двухсегментной упругой модели // Изв. РАН. Мех. жидк. и газа. 2011. N. 5. С. 3–15.

7. *Ермолаев А.П., Сургуч В.К., Першин Б.С.* Влияние введения дополнительного объема жидкости в стекловидное тело на внутриглазное давление. Доклад на семинаре “Биомеханика - 2011”. СПб. 2011.

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ШПАНГОУТАМИ С РАЗНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Г.А. Нестерчук

В работе исследуется влияние изменения закона распределения жесткостей шпангоутов вдоль образующей тонкой упругой цилиндрической оболочки на значение критической нагрузки и первой частоты колебаний оболочки.

Получено приближенное аналитическое решение задач об оптимизации параметров с целью увеличения критической нагрузки и первой частоты колебаний всей системы.

1. Введение

В современном судостроении, ракетной технике и авиастроении наряду с гладкими оболочками используются подкрепленные (или ребристые) оболочки. Ребристые оболочки популярнее гладких и это обусловлено тем, что при правильном выборе параметров оболочки и ее ребер (шпангоутов) подкрепленная оболочка без потери устойчивости способна выдерживать давление в несколько раз большее, чем оболочка той же массы, изготовленная из того же материала.

В большинстве работ рассматриваются оболочки, подкрепленные ребрами одинаковой жесткости.

В данной работе исследуется случай подкрепления оболочки ребрами, чьи высоты изменяются вдоль образующей оболочки согласно какому-либо закону: линейно, параболически или экспоненциально. Получено приближенное аналитическое решение.

В статье [1] методом Ритца исследован случай подкрепления оболочки ребрами разной жесткости. Высоты шпангоутов линейно распределены вдоль образующей оболочки симметрично относительно середины оболочки.

Доклад на семинаре 26 февраля 2013 г.

2. Постановка задачи

Рассматривается случай подкрепления шарнирно опертой цилиндрической оболочки ребрами разной жесткости с нулевым эксцентриситетом (центр тяжести шпангоута находится на срединной поверхности оболочки). Высоты шпангоутов распределяются вдоль образующей цилиндрической оболочки неравномерно.

После разделения переменных безразмерная система уравнений, описывающих малые свободные колебания цилиндрической оболочки, принимает вид (см. [2])

$$\mu^4 \cdot \Delta^2 w - \sigma \Delta_k \Phi - \lambda w = 0, \ \Delta^2 \Phi + \Delta_k w = 0, \tag{1}$$

где

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{ds^2} - m^2 w, \ \Delta_k w = \frac{d^2 w}{ds^2}, \ \sigma = 1 - \nu^2, \ \mu^4 = \frac{h^2}{12}, \ \lambda = \omega^2 R^2 \frac{\sigma \rho}{E}.$$

Здесь s — координата, направленная по образующей, Φ — функция усилий, w — проекция перемещения на направление нормали, m — число волн по параллели, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, ρ — плотность материала, E — модуль Юнга, ω — частота собственных колебаний, μ — малый параметр. За единицу длины выбран радиус R основания цилиндра.

Ограничимся определением низших частот колебаний. Предположим, что граничные условия не допускают изгибания срединной поверхности оболочки. Тогда низшим частотам соответствуют $\lambda \sim \mu^2$, $m \sim \mu^{-1/2}$. Исключая из системы Φ — функцию усилий и считая, что $\Delta \sim m^2$, получим уравнение

$$w_0^{\mathrm{IV}} - \alpha^4 w_0 = 0, \quad \alpha^4 = \frac{m^4 \lambda_0 - \mu^4 m^8}{\sigma}, \tag{2}$$

где w_0 — приближенное решение системы (1), λ_0 — приближенное значение λ, $w' = dw/ds$ (см. [3]). В дальнейшем рассматривается только приближенное решение, и вместо w_0 и λ_0 используются обозначения w и λ.

Граничные условия для уравнения (2) в случае шарнирного опирания краев оболочки имеют вид

$$w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l) = 0, \tag{3}$$

где l — безразмерная длина оболочки.

Если оболочка подкреплена по параллелям с координатами $s = s_i$, $i = 1, 2$ ..., $n - 1$ круговыми стержнями (шпангоутами), то $w = w^{(i)}$ при $s \in [s_{i-1}, s_i], i = 1, 2, ..., n$, причем $s_0 = 0$, $s_n = l$:

$$w_0^{(i)^{\mathrm{IV}}} - \alpha^4 w_0^{(i)} = 0, \ i = 1, 2, .., n. \tag{4}$$

Предположим, что характерный размер поперечного сечения шпангоута $a_i \ll \mu$. Тогда на параллелях, подкрепленных шпангоутами, выполняются условия сопряжения (см. [4])

$$\begin{gathered} w^{(i)} = w^{(i+1)}, \quad w^{(i)'} = w^{(i+1)'}, \\ w^{(i)''} = w^{(i+1)''}, \quad w^{(i)'''} - w^{(i+1)'''} = -c_i w^{(i+1)}, \\ s = s_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$c_i = \frac{m^8 \mu^4 l \eta_i}{\sigma n}, \quad \eta_i = \frac{12 \sigma n E_c J_i}{h^3 E l}, \quad J_i = \frac{a \cdot b_i^3}{12}.$$

Здесь E_c – модуль Юнга материала шпангоута, η_i – безразмерная жесткость шпангоута, пропорциональная отношению изгибных жесткостей шпангоута и оболочки, введенная в работе [5], J_i – момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно образующей цилиндра. Индекс i означает, что шпангоуты могут отличаться друг от друга по высоте, а следовательно, и по жесткости.

Приближенное значение параметра частоты подкрепленной оболочки определяется по формуле

$$\lambda_i = \frac{\sigma \alpha_i^4(c)}{m^4} + \mu m^4,$$

где $\alpha_i(c)$ – собственное значение краевой задачи (4), (5) с граничными условиями (3).

3. Задача о колебаниях

Краевая задача (3)–(5) эквивалентна задаче об определении низших частот колебаний шарнирно опертой балки, подкрепленной пружинами жесткости c_i в точках s_i (рис. 1)

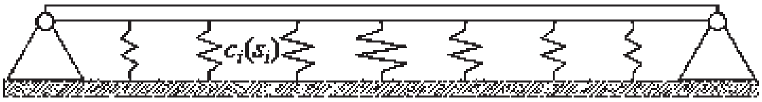

Рис. 1. Балка, подкрепленная пружинами.

В работе [6] проанализированы различные случаи расположения пружин. Путем перебора вариантов определено, что оптимальным является расположение пружин в узлах формы колебаний неподкрепленной балки. В случае шарнирного опирания краев оболочки $s_i = \frac{il}{n}$ – узлы формы колебаний $w_n(s) = \sin(\alpha_n s)$, где $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$.

Рассмотрим соответствующую краевую задачу о колебаниях балки, подкрепленной пружинами. Для ее решения применим метод Рэлея. Формулу Рэлея для подкрепленной пружинами балки можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\alpha_1^4 = (I_1 + I_2)/I_0,$$
$$I_1 = \int_0^l (w'')^2 ds, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i w^2(s_i), \quad I_0 = \int_0^l w^2 ds. \tag{6}$$

На рис. 2 изображена оболочка со шпангоутами в разрезе вдоль оболочки. Приравняем модуль Юнга шпангоутов модулю Юнга оболочки и в дальнейшем будем считать, что жесткость шпангоута зависит только от его размеров. Предположим, что все шпангоуты имеют одинаковую ширину, равную a, а высота первого шпангоута $b = ka$. Также введем $f(i)$ — функцию распределения высот шпангоутов вдоль образующей цилиндра: $b_i = bf(i) = kaf(i)$.

После подстановки в формулу Рэлея безразмерной жесткости шпангоута и первой формы колебаний неподкрепленной оболочки

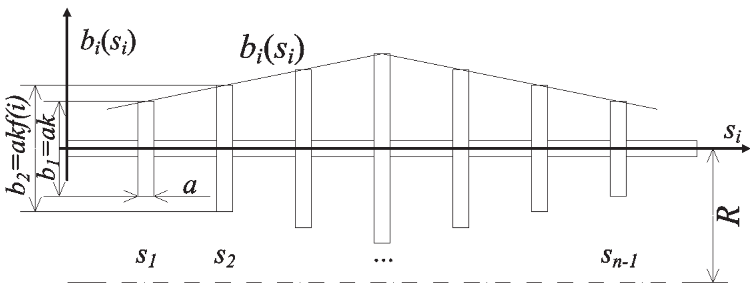

Рис. 2. Оболочка, подкрепленная шпангоутами.

получим следующее выражение для α_1^4:

$$\alpha_1^4(\eta, m) = \frac{\pi^4}{l^4} + \frac{2}{l} c(\eta, m) T(n), \quad \text{при } c(\eta, m) = c_1, \eta = \eta_1, \tag{7}$$

где

$$J_i = \frac{a^4 k^3}{12} f^3(s_i) = J f^3(s_i), \qquad J = \frac{ab^3}{12},$$

Подставим полученное α_1 в выражение для параметра частоты λ_i и получим выражение

$$\lambda(\eta, m) = X m^{-4} + Y m^4,$$

где

$$X = \frac{\sigma \pi^4}{l^4}, \qquad Y = \left(1 + \frac{2T(n)}{n}\eta\right)\mu^4,$$

здесь

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f^3(i) \sin^2\left(\frac{\pi i}{n}\right).$$

Найдем наименьшее значения параметра частоты λ_1, минимизировав полученную функцию $\lambda_1(\eta, m)$ по m:

$$\lambda'_m(\eta, m) = -4Xm^{-5} + 4Ym^3 = 0, \qquad \lambda_1(\eta) = 2\sqrt{XY},$$

$$\lambda_1(\eta) = \frac{2\pi^2\mu^2\sqrt{\sigma}}{l^2}\sqrt{1+\frac{2T(n)}{n}\eta}.$$

Поскольку для малого параметра μ выполнено соотношение $\mu^4 = h^2/12$, напишем λ_1 в следующем виде:

$$\lambda_1(\eta) = \frac{\pi^2 h\sqrt{\sigma}}{l^2\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{2T(n)}{n}\eta}. \tag{8}$$

4. Оптимизация параметров оболочки

Пусть масса подкрепленной оболочки фиксирована. Рассмотрим задачу об определении оптимального распределения массы между шпангоутами и оболочкой (обшивкой), которому соответствует наибольшее значение первой частоты.

Наименьшую частоту колебаний ω_0 цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми краями, имеющей безразмерную длину l и толщину h_0, можно определить с помощью приближенной формулы:

$$\omega_0^2 = \frac{E\lambda_1(0)}{\rho R^2\sigma} = \frac{Eh_0\pi^2}{\rho R^2 l^2\sqrt{3\sigma}}. \tag{9}$$

Предположим, что за счет уменьшения толщины оболочки до величины h на ней установлен $n-1$ шпангоут прямоугольного поперечного сечения шириной a и высотой $b(i)$, причем масса подкрепленной оболочки

$$M_s = M(h) + M_r,$$

где $M(h) = 2\pi R^3\rho hl$ — масса обшивки, а масса шпангоутов

$$M_r = \sum_{i=1}^{n-1} 2\pi R^3\rho\cdot a\cdot ak\left((f(i)-1)(u-1)+1\right)$$

совпадает с массой гладкой оболочки $M_0 = M(h_0)$.

Пусть шпангоуты установлены на равном расстоянии l/n друг от друга и от краев оболочки. Для определения первой частоты колебаний подкрепленной оболочки ω_1 воспользуемся формулами (8) и (9). Введем функцию отношения первой частоты колебаний подкрепленной оболочки к первой частоте колебаний гладкой оболочки:

$$f_v^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} = \begin{cases} d\sqrt{1 + \frac{2T(n)}{n}\eta}, & 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_*, \\ dn^2, & \eta_* < \eta, \end{cases}$$

где $d = \frac{h}{h_0}$, $\eta_* = n^4 - 1$ — эффективная жесткость шпангоута [4, 5].

После упрощения получаем

$$f_v^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} = \begin{cases} d\sqrt{1 + \frac{Ba^4}{d^3}}, & 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_*, \\ dn^2, & \eta_* < \eta, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$B = \frac{2\sigma k^3}{lh_0^3} \cdot T(n).$$

Условие равенства массы подкрепленной оболочки массе гладкой оболочки ($M(h_0) = M(h) + M_r$) примет следующий вид:

$$a^4 = \frac{(1-d)^2}{A^2},$$

где

$$A = \frac{k}{h_0 l} \cdot P(n), \qquad P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i \cdot l}{n}\right).$$

Используя такое выражение для a^4, функцию $f_v^2(d)$ можно представить в следующем виде:

$$f_v^2(d) = \begin{cases} dn^2, & 0 \leqslant d \leqslant d_* \\ d\sqrt{1 + \frac{B}{A^2} \cdot \frac{(1-d)^2}{d^3}}, & d_* < d \leqslant 1 \end{cases}.$$

$$\eta_* = n^4 - 1 = \frac{B}{A^2} \cdot \frac{(1-d_*)^2}{d_*^3}; \qquad d_*^3 - \frac{B}{A^2(n^4-1)}(1-d_*)^2 = 0.$$

Таким образом, мы получили кубическое уравнение, корень которого соответствует максимальной первой частоте колебаний шарнирно опертой оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости:

$$d_*^3 - \frac{2\sigma kl}{h_0} \cdot \frac{T(n)}{P^2(n)(n^4-1)} \cdot (d_* - 1)^2 = 0,$$

При этом a_* и f_v^*, соответствующие d_*, можно найти по следующим формулам:

$$a_* = \sqrt{\frac{1-d_*}{A}}, \quad f_v^* = n \cdot \sqrt{d_*}.$$

5. Задача о потере устойчивости

Рассмотрим теперь задачу о потере устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки под действием внешнего бокового давления. Критическое давление p_0 для гладкой оболочки длиной l и толщиной h_0 можно найти по приближенной формуле Саутуэлла–Папковича взятой из работы [4] :

$$p_0 = \lambda_1 \frac{Eh}{\sigma} = \frac{4\pi E h_0^{5/2}}{6^{3/2} l \sigma^{3/4}}, \tag{11}$$

где λ_1 и η_* определяются по формулам

$$\lambda_1(\eta) = \min_m \left[\frac{\sigma \alpha_1^4(\eta, m)}{m^6} + \mu^4 m^2 \right], \quad \eta_* = n^{4/3} - 1.$$

Для оболочки с той же массой, подкрепленной равноотстоящими шпангоутами, критическое давление p_1 определим с помощью формулы

$$f_b^2 \simeq \frac{p_1^2}{p_0^2} = \begin{cases} d^{5/2}(1 + \frac{Ba^4}{d^3})^{3/4}, & 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_*, \\ d^{5/2} n^2, & \eta_* < \eta. \end{cases} \tag{12}$$

Используя полученные выше результаты, получим

$$f_b^2(d) = \begin{cases} d^{5/2} n^2, & 0 \leqslant d \leqslant d_*, \\ d^{5/2}(1 + \frac{B}{A^2} \cdot \frac{(1-d)^2}{d^3})^{3/4}, & d_* < d \leqslant 1, \end{cases}$$

где d_* — корень кубического уравнения

$$d_*^3 - \frac{2\sigma k l}{h_0} \cdot \frac{T(n)}{P^2(n)(n^{4/3}-1)} \cdot (d_* - 1)^2 = 0.$$

Здесь

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i \cdot l}{n}\right), \quad T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f^3\left(\frac{i \cdot l}{n}\right) \sin^2(\frac{\pi i}{n}).$$

При этом a_* и f_b^*, соответствующие d_*, можно найти по следующим формулам:

$$a_* = \sqrt{\frac{1 - d_*}{A}}, \quad f_b^* = n \cdot d_*^{\frac{5}{2}}.$$

В табл. 1 приведены значения функций f_v и f_b для $u = 2$, $k = 1$, $E = 11 \cdot 10^1 0$, $\rho = 8920$, $\nu = 0.35$.

Таблица 1. **Некоторые значения функций f_v и f_b**

n_s	f_v	f_b
3	3.133	3.078
5	3.968	4.157
7	4.590	5.108
9	5.090	5.963

6. Задача о колебаниях пластины

Как можно видеть из результатов, приведенных в предыдущем разделе, с увеличением высоты шпангоутов растет и первая частота колебаний оболочки. Но при увеличении высоты шпангоута его собственная частота колебаний уменьшается и в итоге начинает уменьшаться и первая частота колебаний всей системы. Оптимально использование таких параметров шпангоутов, при которых их первая частота колебаний будет совпадать с первой частотой колебаний оболочки.

В большинстве статей для решения задачи о колебании шпангоутов используется модель кольцевого стержня. Но при большом отношении высоты шпангоута (b) к его ширине (a) для получения более точных результатов вместо модели кольцевого стержня необходимо использовать модель кольцевой пластины.

Исследуем шпангоуты нашей оболочки методом, описанным в работе [7].

Поскольку с уменьшением высоты шпангоутов увеличивается их первая частота, будем рассматривать самый большой шпангоут. В нашем случае высоты шпангоутов распределяются симметрично относительно середины оболочки, поэтому самым высоким шпангоутом будет средний.

Возьмем за единицу длины радиус цилиндрической оболочки R, тогда безразмерные уравнения колебаний кольцевой пластинки принимают вид

$$\Delta^2 w_p = \gamma^4 \cdot w_p, \quad \Delta w_p = \frac{1}{s_p}\frac{d}{ds_p}\left(s_p \frac{dw_p}{s_p}\right), \quad \gamma^4 = \frac{12\lambda}{a^2}, \qquad (13)$$

где s_p — радиальная координата, а w_p — смещение. Полагая, что край пластины ($s_p = 1+b$) свободен, можно записать краевые условия:

$$M_p = Q_p = 0 \quad \text{при } s_p = 1 + b, \qquad (14)$$

где

$$M_p = \frac{d^2 w_p}{ds_p^2} + \frac{\nu}{s_p}\frac{dw_p}{ds_p}, \quad Q_p = \frac{d^3 w_p}{ds_p^3} + \frac{1}{s_p}\frac{d^2 w_p}{ds_p^2} - \frac{1}{s_p^2}\frac{dw_p}{ds_p}.$$

На краю $s = l, s_p = 1$ должны выполняться краевые условия

$$w_p = -u, \quad \frac{dw_p}{ds_p} = \frac{dw}{ds}.$$

Для нахождения граничных условий для уравнений (13) следует сначала решить задачу о колебании цилиндрической оболочки.

В общем виде решение этой системы представляется через функции Бесселя. Но при $1 \gg b \gg a$ выражение для λ_1 — безразмерного параметра первой частоты, может быть представлено в виде (см. [7])

$$\lambda_1 = 1.03\frac{a^2}{b^4}.$$

Воспользуемся данной формулой для решения задачи о выборе оптимальных коэфициентов функции распределения.

7. Результаты

Ниже приведены некоторые результаты для медной ($E = 11 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 8920$ кг/м^3, $\nu = 0.35$) оболочки $l = 4$ и шпангоутов.

В табл. 2 приведены результаты для случая

$$f(i) = (\kappa(i) - 1)(u - 1) + 1, \qquad \kappa(i) = \begin{cases} rli, & i < \frac{n}{2} \\ n - i, & i \geqslant \frac{n}{2} \end{cases},$$

соответствующего линейному распределению высот шпангоутов.

Таблица 2. **Распределение высот шпангоутов по прямой**

n_s	u	a	f_v	f_b
5	10.945	0.017	4.939	5.32
6	11.185	0.0155	5.411	6.039
7	7.25	0.0177	5.688	6.596
8	7.485	0.016	6.047	7.255
9	5.656	0.0171	6.215	7.703

Результаты для распределения высот шпангоутов по параболе при

$$f(i) = 1 - u(\kappa(i) - 1)(\kappa(i) - n + 1)$$

приведены в табл. 3.

Таблица 3. **Распределение высот шпангоутов по параболе**

n_s	u	a	f_v	f_b
5	5.322	0.0149	4.933	5.314
6	3.499	0.0147	5.381	6.012
7	2.262	0.0151	5.703	6.613
8	1.701	0.0146	6.014	7.219
9	1.2685	0.0145	6.248	7.744

В табл. 4 приведены результаты для распределения высот по экспоненте, когда

$$f(i) = 1 + u(e^{\kappa(i)} - e).$$

Таблица 4. **Распределение высот шпангоутов по экспоненте**

n_s	u	a	f_v	f_b
5	1.0795	0.0188	5.019	5.389
6	1.1266	0.0166	5.495	6.116
7	0.31755	0.0223	5.854	6.764
8	0.341	0.0188	6.242	7.461
9	0.10555	0.0241	6.466	8.001

8. Заключение

Методы, использованные в данной работе для решения систем дифференциальных уравнений, описывающих колебания оболочки и колебания шпангоутов, дают приближенные результаты [8]. В этом минус аналитического решения.

Но многократное вычисление частот колебаний оболочки и шпангоутов численными методами требует больших затрат машинных ресурсов, в то время как аналитическое решение, пусть и с некоторой погрешностью, помогает подобрать как оптимальную функцию распределения высот для того или иного числа шпангоутов, так и оптимальные параметры распределения для нее.

Так, например, из результатов, приведенных выше, легко заметить, что распределение высот по экспоненте дает большее увеличение первой частот колебаний системы, чем линейное распределение или распределение по параболе, а распределение по параболе, при некотором числе шпангоутов, дает бóльшую первую частоту, чем линейное распределение.

Результаты, полученные методом, приведенным в данной работе, можно использовать для подсчета точных частот колебаний численными методами.

Литература

1. *Tian J., Wang C.M., and Swaddiwudhipohg S.* Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shell under general pressure loading via Ritz method // Thin walled structures. Vol. 35. 1999, pp. 1–24.
2. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., 1979. 384 с.

3. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. Изд. 2-е, доп. и перераб. Л.: Стройиздат, Ленингр. отд-ние, 1975. 256 с.
4. *Филиппов С.Б.* Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. Изд-во СПбГУ, 1999, 196 с.
5. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
6. *Шарыпов Д.В.* Низкочастотные колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами// Вестник С.-Петерб. Ун-та, 1997. Вып. 3. С.102-108.
7. *Filippov S.B.* Asymptotic analysis of ring-stiffened shells vibrations// ENOC 2011, 24–29 July 2011, Rome, Italy.
8. *Filippov S. B.* Buckling, vibrations and optimal design of ring-stiffened thin cylindrical shells. Advances in Mechanics of Solids. World Scientific Publishing Co Ltd.: pp.17 – 48.

МЕТОДЫ И БИОТЕХНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОЦЕНКИ СТРУКТУР ГЛАЗА

Д. А. Рубашова

В статье разработан алгоритм, позволяющий учитывать влияние механических свойств и геометрических параметров глаза и соединительнотканных образований глазницы на напряженно-деформированное состояние корнеосклеральной оболочки глаза при давлении тонометра на роговицу. Полученные зависимости истинного тонометрического внутриглазного давления от геометрических параметров и механических свойств структур глаза положены в основу разработанного автоматизированного способа определения истинного тонометрического давления глаза при измерении по методу Маклакова.

1. Введение

Внутриглазное давление (ВГД) является одной из важнейших характеристик глаза. Нарушения ВГД являются причиной снижения зрения и стойкой инвалидизации пациентов. Например, высокое ВГД при глаукоме приводит к специфической атрофии зрительного нерва и необратимой слепоте.

До настоящего времени не теряют своей актуальности вопросы стандартизации измерений ВГД, определения нормальных и патологических показателей ВГД и изучения влияния различных параметров глазного яблока на величину ВГД. Существующие апланационные методы при измерении внутриглазного давления не учитывают индивидуальные особенности свойств структур глаза пациента: толщины роговицы и склеры, их кривизны и механических свойств. В то же время параметры глаза оказывают существенное влияние на результаты аппланационных методов тонометрии [1–4]. Это искажает результаты измерений, приводя к запоздалой диагностике различных заболеваний и к недостаточно обоснованной терапии.

Доклад на семинаре 12 марта 2013 г.

В России для измерения тонометрического ВГД наибольшее распространение получил метод Маклакова. Аппланационная нагрузка при измерении по методу Маклакова 5 г, 10 г и 15 г (нагрузка, под действием которой уплощается поверхность глазного яблока контактной поверхностью тонометра до некоторого диаметра кружка сплющивания). Метод построен на качественных экспертных оценках. По величине кружка сплющивания по линейке Поляка определяют величину тонометрического ВГД.

Анализ моделей глазного яблока, построенных, например, в программных пакетах SolidWorks и CosmosWorks, позволяет оценить влияние геометрических параметров и механических свойств на состояние его структур. Это, в свою очередь, расширяет сферу применения диагностических методов и является предпосылкой для создания автоматизированных средств диагностики.

2. Постановка задачи

В работах [5–10] рассмотрены математические и компьютерные модели глаза и проведено исследование влияния его геометрических параметров и механических свойств на результаты аппланационных методов измерения ВГД. В работе [9] роговица рассмотрена по схеме оболочки (все работы на Западе касаются в основном тонометрии по методу Гольдмана, у которого зона контакта маленькая, поэтому обычно рассматривают только роговицу), а в работах [5–8, 10] роговица и склера — по схемам двух оболочек с разными диаметрами и разными упругими свойствами. В этих работах исследовано влияние толщины и кривизны роговицы и анизотропных свойств роговицы и склеры [6–10], а также многослойности роговицы [7] на результаты аппланационных методов измерения ВГД. В работе [6] модель глазного яблока представлена двумя сферическими сегментами. Введено предположение о том, что модуль упругости роговицы много меньше модуля упругости склеры и что роговица – мягкая оболочка. В работе [8] рассмотрены две модели глаза: аналитическая, состоящая из двух соединенных сегментов эллипсоидов вращения, и конечно-элементная, состоящая из двух соединенных сферических оболочек. В прикладной программе ANSYS граничные условия заданы по схеме скользящей заделки [8] и жесткого защемления [7, 10]. Проведено исследование влияния формы глаза на результаты тонометрии. Современные возможности клинических и лабораторных исследований механических свойств структур глазного яблока приведены в работах [10–13].

Целью данного исследования является разработка автоматизированного способа определения истинного тонометрического давления, включенного в биотехническую систему медицинского назначения (БТС). БТС — это особый класс больших систем, представляющих собой совокупность биологических и технических элементов, связанных между собой в едином контуре управления [14]. Для этого необходимо: 1) разработать алгоритм исследования истинного тонометрического давления при измерении ВГД по методу Маклакова; 2) построить параметрические модели глазного яблока; 3) иметь возможность проводить исследования истинного тонометрического ВГД глаза в норме и при наиболее распространенных патологиях глаза: кератоконусе, миопии, гиперметропии (при кератоконусе у роговицы изменяются радиус кривизны и толщина центральной зоны. В конечном итоге она истончается и принимает конусовидную форму. При миопии искривлена склера и удлинена передне-задняя ось (ПЗО) глаза. При гиперметропии укорочена ПЗО либо увеличена фронтальная ось (ФО) глаза); 4) реализовать в апробированных и доступных в инженерной и клинической практике пакетах прикладных программ построенные параметрические модели.

3. Моделирование глазного яблока

Рассмотрены три модели: модель роговицы, модель корнеосклеральной оболочки и модель глаза с учетом соединительнотканных образований [15]. По всем моделям проведены исследования влияния толщины роговицы, ее кривизны и кератоконуса на результаты тонометрии по методу Маклакова. В модели роговицы учтены анизотропные свойства ее структур, введено жесткое защемление по наружному контуру. В модели корнеосклеральной оболочки, в дополнение к модели роговицы, учтено влияние геометрии и механических свойств склеры и лимба. Модель жестко защемлена в твердой мозговой оболочке. Третья модель учитывает соединительнотканные образования глазницы, теноновую капсулу, эписклеральное пространство, стяжи и кость глазницы. И позволяет наиболее адекватно отразить крепление глаза в глазнице. При этом, введение стяжей определяет неосесимметричную форму модели. Ниже приведены результаты исследований по третьей модели.

На рис. 1 приведены модель глаза и модель, построенная в пакете прикладных программ SolidWorks. Модель позволяет рассчитывать истинное тонометрическое ВГД при: 1) роговице в норме; 2) различных стадиях развития кератоконуса; 3) изменениях формы глаза (миопия, гиперметропия).

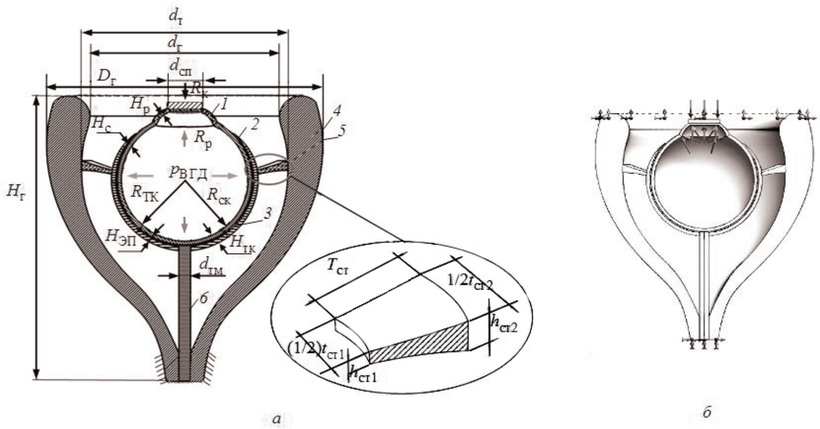

Рис. 1. Схема (а) и геометрическая компьютерная модель (б) соединительнотканных образований глазницы.

При построении модели введены следующие допущения (см. рис. 1): I. Материал роговицы (*1*) однородный, сплошной, анизотропный с нормальными модулями упругости; материал склеры (*2*), твердой мозговой оболочки (*6*), стяжей (*5*), эписклерального пространства, теноновой капсулы (*3*) и кости глазницы (*4*) однородные, сплошные, изотропные, с нормальными модулями упругости. II. Модель жестко закреплена на внешней стороне кости глазницы.

Предполагается отсутствие перемещения в зоне контакта тонометр–роговица глаза. После определения деформации корнеосклеральной оболочки под действием груза-тонометра используется метод итераций. Поскольку водянистая влага несжимаема, мы, пошагово повышая внутриглазное давление, увеличиваем объем глаза до первоначального значения.

4. Анализ результатов

Пример 1. Зависимости разницы между значением тонометрического внутриглазного давления, определенного по методу Маклакова в соответствии с линейкой Б.Л. Поляка, и истинного тонометрического внутриглазного давления, рассчитанного по модели (см. рис. 1), от диаметра кружка сплющивания.

Для структур глаза заданы следующие геометрические параметры и механические свойства: 1) радиус кривизны роговицы $R_{\text{кр}}$ $= 7{,}8$ мм, толщина центральной зоны $h_{\text{рц}} = 0{,}52$ мм, толщина роговицы на периферии $h_{\text{рп}} = 0{,}6$ мм; 2) толщина и радиус кривизны склеры $H_{\text{с}} = 0{,}7$ мм, $R_{\text{кс}} = 12$ мм; диаметр твердой мозговой оболочки $D_{\text{тмо}} = 2{,}1$ мм; 3) эписклеральному пространству, стяжам, кости глазницы и теноновой капсуле задаются нормальные модули упругости равные соответственно $E_{\text{э}} = 30$ кПа; $E_{\text{ст}} = 20$ МПа; $E_{\text{к}}$ $= 2{,}5$ ГПа; $E_{\text{тк}} = 200$ МПа; толщина и радиус кривизны эписклеры $H_{\text{э}} = 0{,}26$ мм, $R_{\text{э}} = 12{,}26$ мм; 4) размеры стяжей $T_{\text{ст}} = 5$ мм, $t_{\text{ст1}}$ $= 11{,}25$ мм, $t_{\text{ст2}} = 16$ мм, $h_{\text{ст1}} = 0{,}7$ мм, $h_{\text{ст2}} = 1{,}76$ мм, внешний диаметр стяжей $D_{\text{ст}} = 36{,}7$ мм; 5) высота глазницы $H_{\text{г}} = 52{,}5$ мм; внешний диаметр глазницы $D_{\text{г}} = 49$ мм; внутренний диаметр глазницы $d_{\text{г}} = 33$ мм; 6) толщина и радиус кривизны теноновой капсулы $H_{\text{тк}} = 0{,}74$ мм, $R_{\text{тк}} = 13$ мм; 7) модуль упругости роговицы в меридиональном и окружном направлениях $E_{\text{р}1,2}$ изменялся от 0,362 до 2 МПа, в радиальном направлении $E_{\text{р}3}$ изменялся от 3,6 кПа до 20 кПа, 8) нормальные модули упругости склеры и твердой мозговой оболочки равны соответственно $E_{\text{с}} = 6$ МПа; $E_{\text{тмо}} = 150$ МПа; 9) модуль упругости контактной части тонометра $E_{\text{т}} = 210$ ГПа.

При вычислениях количество введенных конечных элементов до 70 тысяч существенно влияет на результаты (рис. 2). Дальнейшее увеличение числа конечных элементов на результатах вычислений сказывается незначительно (не более 5%). Поэтому для достижения необходимой точности, при минимальных затратах времени на вычисления целесообразно задавать разбиение на 70 тысяч линейных тетраэдальных конечных элементов.

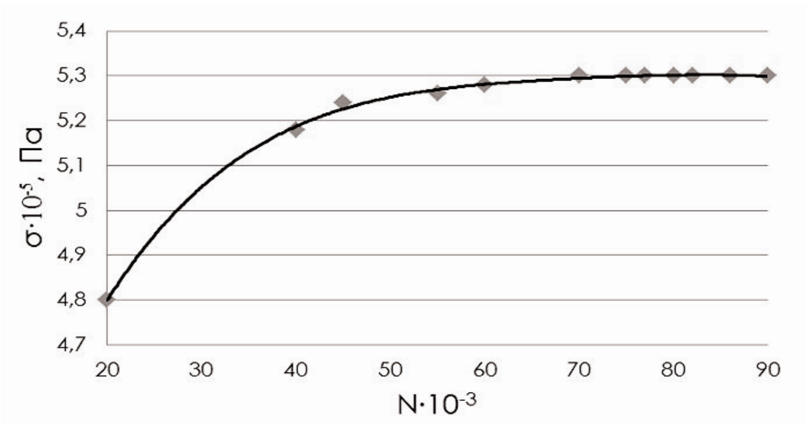

Рис. 2. Зависимость экстремальных значений напряжений в модели глаза с учетом соединительнотканных образований глазницы от числа конечных элементов.

На рис. 3–5 приведены зависимости значений тонометрического внутриглазного давления, определенного по методу Маклакова в соответствии с линейкой Б.Л. Поляка, и истинного тонометрического внутриглазного давления, рассчитанного по модели, от диаметра кружка сплющивания: 1) на рис. 3 (кривая $n = 0$) – разница между значениями измеренного и рассчитанного тонометрического давления; 2) на рис. 4 – значения измеренного ВГД (горизонтальная линия) и истинного тонометрического ВГД (кривая $n = 0$) при кружке сплющивания 3 мм в зависимости от модуля упругости роговицы; 3) на рис. 5 – значения измеренного ВГД (горизонтальная линия) и истинного тонометрического ВГД (кривая $n = 0$) при кружке сплющивания 7 мм в зависимости от модуля упругости роговицы.

Пример 2. Зависимости разницы между значением тонометрического внутриглазного давления, определенного по методу Маклакова в соответствии с линейкой Б.Л. Поляка, и истинного тонометрического внутриглазного давления при различных стадиях развития кератоконуса, рассчитанного по модели, от диаметра кружка сплющивания.

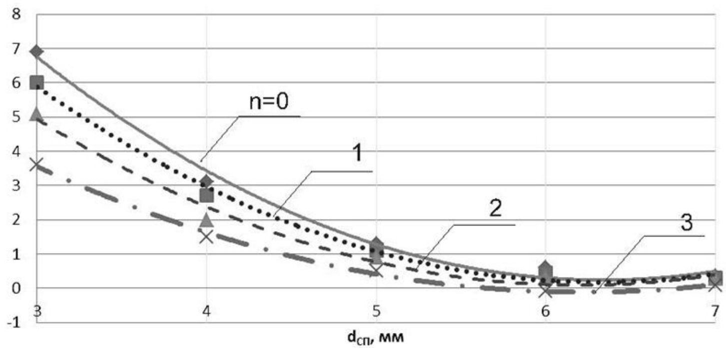

Рис. 3. Зависимости разницы между значением тонометрического внутриглазного давления, определенного по методу Маклакова в соответствии с линейкой Б.Л. Поляка, и истинного тонометрического внутриглазного давления при различных стадиях развития кератоконуса (n = 1, 2, 3) от диаметра кружка сплющивания.

Выделяют три стадии развития кератоконуса.

При первой стадии кератоконуса отмечается снижение остроты зрения, радиус кривизны роговицы уменьшается до 7,5–7,2 мм, толщина центральной зоны роговицы – до 0,48 мм.

При второй стадии заболевания прогрессирует деформация роговицы, уменьшается ее радиус кривизны до 7,1–6,75 мм, толщина центральной зоны роговицы – до 0,44 мм.

При третьей стадии роговица еще больше истончается, ее радиус уменьшается до 6,7–6,0 мм, толщина центральной зоны роговицы – до 0,40 мм.

В дополнение к геометрическим параметрам и механическим свойствам для глазного яблока, приведенным в примере 1, введены следующие: 1) кривизна роговицы в соответствии со стадией развития кератоконуса (n = 1, 2, 3) $R_{\text{кр}}$ = 7,2 мм (n = 1); 6,8 мм (n = 2) и 6,2 мм (n = 3) 2) толщина центральной зоны соответственно $h_{\text{рц}}$ = 0,48 мм; 0,44 мм и 0,4 мм; 3) толщина роговицы на периферии принимается постоянной во всех стадиях кератоконуса $h_{\text{рп}}$ = 0,6 мм.

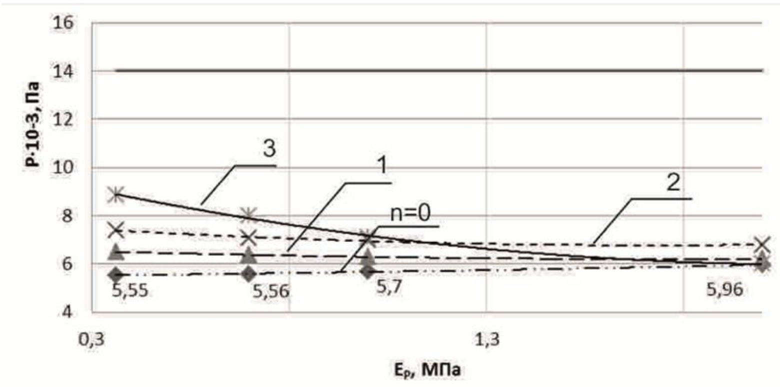

Рис. 4. Зависимости значений тонометрического внутриглазного давления, определенного по методу Маклакова в соответствии с линейкой Б.Л. Поляка, и истинного тонометрического внутриглазного давления, рассчитанного по модели, от модуля упругости роговицы при диаметре кружка сплющивания 3 мм.

Пример 3. Зависимости разницы между значением тонометрического внутриглазного давления, определенного по методу Маклакова в соответствии с линейкой Б.Л. Поляка, и истинного тонометрического внутриглазного давления при миопии, рассчитанного по модели, от диаметра кружка сплющивания. В дополнение к геометрическим параметрам и механическим свойствам для глазного яблока, приведенным в примере 1, введено изменение длины передне-задней оси глаза $H_{\text{пзо}}$ от 22 мм до 30 мм (рис. 5, (а) на вклейке).

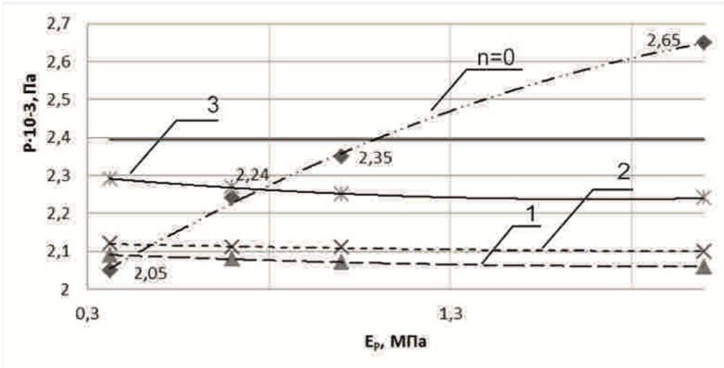

Рис. 5. Зависимости значений тонометрического внутриглазного давления, определенного по методу Маклакова в соответствии с линейкой Б.Л. Поляка, и истинного тонометрического внутриглазного давления, рассчитанного по модели, от модуля упругости роговицы при диаметре кружка сплющивания 7 мм.

Пример 4. Зависимости разницы между значением тонометрического внутриглазного давления, определенного по методу Маклакова в соответствии с линейкой Б.Л. Поляка, и истинного тонометрического внутриглазного давления при гиперметропии, рассчитанного по модели, от диаметра кружка сплющивания.

В дополнение к геометрическим параметрам и механическим свойствам для глазного яблока, приведенным в примере 1, введено изменение длины фронтальной оси глаза $H_{\Phi O}$ от 22 мм до 30 мм (рис. 5, (б) на вклейке).

По результатам вычисления изменение модуля упругости роговицы приводит к максимальному изменению определяемого ВГД на 32,3%. При этом рассчитанное ВГД по второй и третьей моделям увеличивается с увеличением модуля упругости роговицы.

Рассчитанное ВГД увеличивается в нормальной роговице от 7 до 22,6% с увеличением модуля упругости роговицы и уменьшается от 5 до 32,3% с увеличением степени развития кератоконуса.

При всех кружках сплющивания значения ВГД меньше табличных значений, что говорит о том, что в таблице Маклакова значения могут быть завышены по сравнению с реальными.

По результатам вычислений построены зависимости расхождения значений истинного тонометрического ВГД со значениями тонометрического ВГД, измеренного по методу Маклакова и определенного по линейке Поляка, от геометрических параметров и механических свойств глаза.

5. Заключение

По дискретным точкам (от 5 до 10), представляющим собой значения истинного тонометрического внутриглазного давления при различных геометрических параметрах и механических свойствах структур глаза, построены полиномиальные кривые второго порядка в программе Exel. Например, для кривой 3 на рис. 5 уравнение имеет следующий вид: $y = 0,92x^2 - 3,94x + 10,2$. Эти уравнения положены в основу разработанного программного обеспечения биотехнической системы. При определении величины истинного тонометрического внутриглазного давления для коррекции результатов инструментального измерения ВГД врач должен ввести в эту автоматизированную систему следующее: 1) геометрические параметры роговицы и склеры пациента; 2) возраст пациента; 3) возможные патологии глазного яблока пациента; 4) результаты тонометрии по методу Маклакова грузом 10 г.

Литература

1. *Douthy M.J., Zaman M.L.* Human corneal thickness and its impact on intraocular pressure: A review and meta-analysis approach // Surv. Ophthalmol. 2000. Vol. 44. P. 367–408.
2. *Ehlers N., Bramsen T., and Sperling S.* Applanation tonometry and central corneal thickness // Acta Ophtalmol. (Copenh.). 1975. Vol. 53. P. 34–43.
3. *Tonnu P. A., Ho T., and Newson T.* The influence of central corneal thickness and age on intraocular pressure measured by pneumotonometry, non-contact tonometry, the Tono-Pen XL, and Goldmann applanation tonometry // British Journal of Ophthalmolog. 2005. Vol. 89. P. 851–854
4. *Аветисов С.Э.* Исследование влияния биомеханических свойств роговицы на показатели тонометрии / С.Э. Аветисов, И.А. Бубнова, А.А. Антонов // Биомеханика глаза. Сборник научных трудов. М., 2009. С. 72–75.

5. *Бауэр С.М., Качанов А.Б., Семенов Б.Н., Слесорайтите Е.* О влиянии толщины роговицы на показатели внутриглазного давления при измерении ВГД аппланационными методами // Биомеханика глаза. М., 2007. С. 119–124
6. *Бауэр С.М., Любимов Г.А., Товстик П.Е.* Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления// Известия РАН «Механика Жидкости и Газа», 2005. №1. С. 24–39.
7. *Карамшина Л.А.* Модели многослойных оболочек в задачах офтальмологии. Дис. канд. физ-мат. наук. СПб., 2011. 101 с.
8. *Типясев А.С.* Модели теории оболочек в задачах измерения внутриглазного давления. Дис. канд. физ-мат. наук. СПб., 2009. 91 с.
9. *Ljubimova D.* Biomechanics of the Human Eye and Intraocular Pressure Measurements. Technical reports from Royal Institute of Technology Department of Mechanics. Stockholm, Sweden, August 2009. 200 c.
10. *Srodka W.* Biomechanical model of human eyeball and its applications // Optica Applicata. 2009. Vol. 39. No. 2. P. 401–413.
11. *Аветисов С.Э., Бубнова И.А.* Современные возможности прижизненной оценки биомеханических свойств роговицы // Современные методы диагностики и лечения заболеваний роговицы и склеры. Сборник научных статей под ред. С.Э. Аветисова и Я.О. Груши. М. 2007. С. 236–240.
12. *Иомдина Е.Н.* Биомеханика склеральной оболочки глаза при миопии: диагностика нарушений и их экспериментальная коррекция: дис... докт. биол. наук. М., 2000. 319 с.
13. *Иомдина Е.Н.* Механические свойства тканей глаза человека // Современные проблемы биомеханики. Вып.11. 2006. Изд-во МГУ. С. 183–200.
14. *Ахутин В.М., Попечителев Е.Г. и др.* Биотехнические системы: Теория и проектирование: учеб. пособие под ред. В.М. Ахутина. Л.: ЛГУ, 1981. 220 с.
15. *Рубашова Д.А.*, Исследование влияния механических свойств и геометрических параметров роговицы на результаты тонометрии// Известия СПбГЭТУ (ЛЭТИ). 2013. №2. С. 106–113.

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ШПАНГОУТАМИ С П-ОБРАЗНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

И.А. Кулаковский

В работе рассматривается цилиндрическая оболочка, шарнирно закрепленная по краям и подкрепленная круговыми стержнями (шпангоутами). Исследовано преимущество использования шпангоутов с П-образным поперечным сечением над шпангоутами с прямоугольным поперечным сечением. Рассмотрены задача об оптимизации параметров подкрепленной оболочки с целью максимального увеличения первой частоты и задача об оптимизации параметров подкрепленной оболочки с целью максимального увеличения критического давления.

1. Введение

Наименьшая собственная частота колебаний — важнейшая характеристика для тонкостенных оболочек. Самый простой способ увеличения данной характеристики, увеличить толщину оболочки, однако при этом сильно растет ее масса, что не всегда приемлемо.

На сегодняшний день наряду с гладкими оболочками активно используются оболочки, подкрепленные шпангоутами или ребристые оболочки. Это обусловлено тем, что при удачном выборе соотношения размеров оболочки и шпангоутов (ребер) подкрепленная оболочка той же массы имеет значительно большее значение первой собственной частоты колебаний. Это уменьшает вероятность возникновения резонанса. Так же подкрепленная оболочка способна без потери устойчивости выдержать более сильное внешнее давление, чем гладкая.

В работах [1, 2] получены приближенные уравнения, описывающие малые колебания гладких и подкрепленных оболочек. В

Доклад на семинаре 26 марта 2013 г.

большинстве работ предполагается, что ребра имеют прямоугольное поперечное сечение. Особенностью данной статьи является исследование оболочки, подкрепленной шпангоутами с П-образным поперечным сечением. Некоторые результаты использования данных шпангоутов представлены в работе [3].

2. Постановка задачи

После разделения переменных безразмерная система уравнений, описывающая малые свободные колебания цилиндрической оболочки, имеет вид

$$\mu^4\Delta^2 w - \sigma\Delta_k\Phi - \lambda w = 0, \quad \Delta^2\Phi + \Delta_k w = 0, \tag{1}$$

где

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - m^2 w, \quad \Delta_k w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \sigma = 1 - \nu.$$

Здесь s — координата, направленная по образующей, Φ — функция усилий, w — проекция перемещения на направление нормали, m — число волн по параллели, ν — коэффициент Пуассона, $\lambda = \sigma\rho\omega^2 R^2 E^-1$, где $\mu^4 = h^2/12$ — малый параметр, h — толщина оболочки, $\lambda = \sigma\rho\omega^2 R^2 E^-1$, ρ — плотность материала, E — модуль Юнга, ω — частота собственных колебаний. За единицу длины выбран радиус R основания цилиндра.

Ограничимся определением низших частот колебаний. Предположим, что граничные условия не допускают изгиба срединной поверхности оболочки, тогда наименьшим частотам соответствуют: $\lambda \sim \mu^2$, $m \sim \mu^{-1/2}$. Исключая из системы Φ и считая, что $\Delta \sim m^2$, получим уравнение

$$w_0^{IV} - \alpha^4 w_0 = 0, \quad \alpha^4 = (m^4\lambda_0 - \mu^4 m^8)/\sigma, \tag{2}$$

где w_0 — приближенное решение системы (1), λ_0 — приближенное значение λ, $w^{'} = dw/ds$ [1]. В дальнейшем рассматривается только приближенное решение и вместо w_0 и λ_0 используются обозначения w и λ.

Граничные условия для уравнения (2) в случае шарнирного опирания краев оболочки имеют вид

$$w(0) = w^{''}(0) = w(l) = w^{''}(l) = 0, \tag{3}$$

где l — безразмерная длина оболочки.

Если оболочка подкреплена по параллелям с координатами $s = s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ одинаковыми круговыми стержнями (шпангоутами), то $w = w^{(i)}$ при $s \in [s_{i-1}, s_i]$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$, причем $s_0 = 0$, $s_n = l$ (рис. 1).

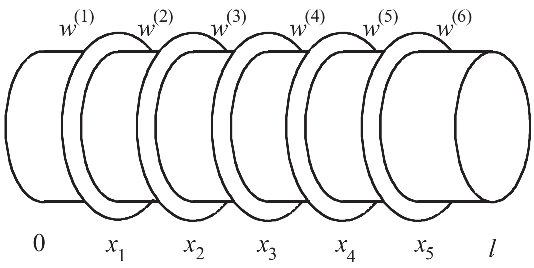

Рис. 1. Подкрепленная цилиндрическая оболочка.

Приближенные уравнения, описывающие колебания подкрепленной оболочки, имеют вид

$$w^{(i)^{IV}} - \alpha^4 w^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Предположим, что характерный размер шпангоута $a \ll \mu$. Тогда на параллелях, подкрепленных шпангоутами, выполняются условия сопряжения (см.[2]):

$$\begin{gathered} w^{(i)} = w^{(i+1)}, \quad w^{(i)^{'}} = w^{(i+1)^{'}}, \\ w^{(i)^{''}} = w^{(i+1)^{''}}, \quad w^{(i)^{'''}} - w^{(i+1)^{'''}} = -c w^{(i+1)}, \\ s = s_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$c = \frac{m^8 \mu^4 l \eta}{\sigma n}, \quad \eta = \frac{12 \sigma n E_c I}{h^3 E l}.$$

Здесь E_c — модуль Юнга материала шпангоута, I — момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно образующей цилиндра.

Приближенное значение параметра частоты подкрепленной оболочки определяется по формуле

$$\lambda = \sigma\alpha^4(c)/m^4 + \mu^4 m^4,$$

где $\alpha(c)$ — собственное значение краевой задачи (4), (5) с граничными условиями (3).

3. Приближенная формула для наименьшего параметра частоты

В случае шарнирного опирания, как показано в работе [4], оптимальное расположение шпангоутов близко к равномерному.

Приближенное решение задачи (3), (4) о колебаниях балки, подкрепленной пружинами, в случае шарнирного опирания концов и равномерного распределения пружин получено в работе [2] методом осреднения упругих характеристик. Формула для оценки первого собственного значения α_1 имеет вид

$$\alpha_1^4 = \pi^4/l^4 + cn/l.$$

Соответствующее $\alpha_1(\eta, m)$ наименьшее значение параметра частоты можно найти по приближенной формуле

$$\lambda_1^*(\eta) = \min\left[\frac{\sigma\alpha_1^4(\eta, m)}{m^4} + \mu^4 m^4\right] \simeq \lambda_1^* 0)(1+\eta)^{1/2},$$

где

$$\lambda_1^*(0) \simeq \frac{2\mu^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\sigma}$$

является наименьшим параметром частоты для неподкрепленной оболочки. Однако $\lambda_1^*(\eta)$ может не быть наименьшим параметром частоты для подкрепленной оболочки. Дело в том, что $\lambda_1^*(\eta)$ возрастает с увеличением η, а краевая задача (3)–(5) имеет собственные значения, которые не зависят от η. Наименьшему из этих собственных значений $\alpha_n = n\alpha_1$ соответствует форма колебаний $w_n = \sin(n\alpha_1 s)$ и параметр частоты $\lambda_n^*(0) = n^2\lambda_1^*(0)$. При достаточно больших значениях η наименьшим параметром частоты λ_1 для подкрепленной оболочки будет $\lambda_n^*(0)$. Корень $\eta_* = n^4 - 1$ уравнения

$$\lambda_1^*(\eta) = \lambda_n^*(0)$$

называется эффективной жесткостью. Следовательно,

$$\frac{\lambda_1(\eta)}{\lambda_1(0)} \simeq \begin{cases} \sqrt{1+\eta}, & 0 \leqslant \eta \leqslant n^4 - 1, \\ n^2, & \eta > n^4 - 1. \end{cases} \tag{6}$$

4. П-образное поперечное сечение

На рис. 2 изображено П-образное поперечное сечение шпангоута.

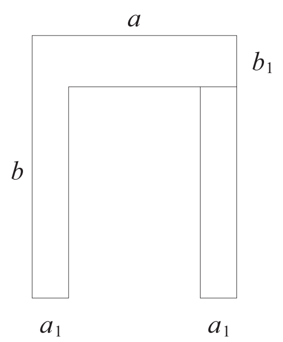

Рис. 2. П-образное поперечное сечение шпангоута.

Введем обозначения:

$$k_a = 2a_1/a, \quad k_b = b_1/b.$$

Решения задач о колебаниях и устойчивости подкрепленной оболочки зависят от площади поперечного сечения шпангоута и его момента инерции относительно образующей цилиндра. Отношения площадей S_* и моментов инерции I_* для П-образного и прямоугольного поперечных сечений выражаются через коэффициенты k_a и k_b по формулам

$$S_* = 1 - (1 - k_a)(1 - k_b), \quad I_* = (1 - k_a)(1 - k_b)^3. \tag{7}$$

Легко видеть, что $S_* = I_* = 1$ при $k_a = 1$ и (или) $k_b = 1$, соответствующих прямоугольному поперечному сечению.

5. Оптимизация параметров подкрепленной оболочки с целью максимального увеличения первой частоты

Данная задача рассматривается в случае шарнирного опирания краев оболочки. Пусть масса подкрепленной оболочки фиксирована. Рассмотрим задачу об оптимальном распределении массы между шпангоутами и оболочкой, которому соответствует наибольшее значение первой частоты. Наименьшую частоту колебаний ω_0 цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми краями, имеющей безразмерную длину l и толщину h_0, можно определить с помощью приближенной формулы

$$\omega_0^2 = \frac{E\lambda_1(0)}{\rho R^2 \sigma}.$$

Предположим, что за счет уменьшения толщины оболочки до величины h на ней установлен $n - 1$ шпангоут с размерами поперечного сечения a, $b = ka$, а также введенными в (7) коэффициентами, причем масса подкрепленной оболочки $M_s = M(h) + M_r$, где $M(h) = 2\pi R^3 \rho h l$ — масса обшивки, $M_r = 2\pi R^3 \rho (n-1) a^2 k S_*$ — масса шпангоутов, совпадает с массой гладкой оболочки $M_0 = M(h_0)$.

Пусть шпангоуты установлены равномерно на расстоянии l/n друг от друга и от краев оболочки. Для определения первой частоты подкрепленной оболочки воспользуемся формулой (6). Получаем

$$f_{vu}^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \simeq \begin{cases} d(1+\eta)^{1/2}, & 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_*, \\ dn, & \eta > \eta_*, \end{cases}$$

где

$$d = \frac{h}{h_0}, \quad \eta = \frac{BI_* a^4}{d^3}, \quad B = \frac{4\sigma n k^3}{h_0^3 l}, \quad \eta_* = n^4 - 1.$$

Из условия $M_s = M_0$ следует, что

$$d = 1 - Aa^2 S_*, \quad A = \frac{(n-1)k}{h_0 l}.$$

В итоге

$$f_{vu}^2(d) = \begin{cases} dn^2, & 0 \leqslant d \leqslant d_*, \\ d\sqrt{(1 + Q\gamma(d-1)^2)/d^3}, & d_* \leqslant d \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{B}{A^2}, \quad Q = \frac{I_*}{S_*^2},$$

а $d_* \in [0, 1]$ — корень кубического уравнения

$$d^3 - Qq(d-1)^2 = 0, \quad q = \gamma/\eta_*. \tag{8}$$

Функция $f_{vu}^2(d)$ имеет максимум $f_{vu}^* = n\sqrt{d_*}$ при $d = d_*$. Для прямоугольного поперечного сечения максимум функции $f_{vu}(d)$ обозначим f_v^*.

6. Оптимизация параметров подкрепленной оболочки с целью максимального увеличения критического давления

Рассмотрим теперь задачу о потере устойчивости подкрепленной шарнирно опертой цилиндрической оболочки под действием внешнего бокового давления. Критическое давление p_0 для гладкой оболочки длиной l и толщиной h_0 можно найти по приближенной формуле Саутуэлла–Папковича:

$$p_0 = \frac{4\pi E h_0^{5/2}}{6^{2/3} l \sigma^{3/4}}.$$

Для оболочки с той же массой, подкрепленной равноотстоящими шпангоутами, критическое давление p_1 определим с помощью формулы (см.[2])

$$f_{bu} = \frac{p_1}{p_0} \simeq \begin{cases} d^{5/2}(1+\eta)^{3/4}, & 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_*, \\ d^{5/2}n, & \eta > \eta_*. \end{cases}$$

Аналогично предыдущей задаче в случае П-образного поперечного сечения получаем

$$f_{bu}(d) = \begin{cases} d^{5/2}n, & 0 \leqslant d \leqslant d_*, \\ d^{5/2}(1+Q\gamma(d-1)^2/d^3)^{3/4}, & d_* \leqslant d \leqslant 1, \end{cases}$$

где d_* — корень кубического уравнения (8), $f^*_{bu} = f_{bu}(d_*)$. Максимум функции $f_{bu}(d)$ при $k_a = 1$ и (или) $k_b = 1$ обозначим f^*_b.

7. Результаты расчетов

В качестве примера рассмотрим подкрепленную оболочку при следующих значениях параметров: $l = 4$, $h_0 = 0.01$, $\nu = 0.3$, $E_c = E$, $k = 1$. Значения $k_a = 1$ и $k_b = 1$ соответствуют прямоугольному поперечному сечению шпангоута. Результаты вычисления величин d_* и

$$r_v = \frac{f^*_v u - f^*_v}{f^*_v} \cdot 100\%, \quad r_b = \frac{f^*_b u - f^*_b}{f^*_b} \cdot 100\%,$$

характеризующих увеличение первой частоты и критического давления при замене шпангоутов с прямоугольными поперечными сечениями шпангоутами с П-образными сечениями, приведены в табл. 1 и 2.

Из полученных результатов следует, что использование шпангоутов с П-образным поперечным сечением дает относительный выигрыш, достигающий, при 4 шпангоутах, 14.1% в задаче о низкочастотных колебаниях и 3.7% в задаче о потере устойчивости. Еще больший выигрыш можно получить, уменьшив k_a и k_b (см. [3]).

Таблица 1. **Зависимость d_* и относительного выигрыша r_v от n, k_a и k_b в задаче о колебаниях**

n	2	2	2	2	2	3	3
k_a	1	0.8	0.4	0.8	0.2	1	0.8
k_b	1	0.8	0.4	0.2	0.8	1	0.8
d_*	0.935	0.937	0.954	0.942	0.945	0.805	0.810
$r_v\%$	0	0.2	2	0.7	1.1	0	0.6
n	3	3	3	4	4	5	5
k_a	0.4	0.8	0.2	1	0.4	1	0.4
k_b	0.4	0.2	0.8	1	0.4	1	0.4
d_*	0.854	0.821	0.828	0.662	0.731	0.538	0.614
$r_v\%$	6.1	2	2.9	0	10.4	0	14.1

8. Частоты колебаний шпангоута

Результаты вычислений в работе [2] свидетельствуют о том, что чем больше отношение k ширины шпангоута к его толщине, тем больше значение функции f_u в задаче о низкочастотных колебаниях. Однако при достаточно больших k шпангоут с прямоугольным поперечным сечением следует рассматривать как кольцевую пластину, причем наименьшая частота колебаний подкрепленной оболочки становится близка к первой частоте колебаний этой пластины [5].

Шпангоут с П-образным поперечным сечением мы рассматриваем как две кольцевые пластины толщиной a_1, скрепленные по краю кольцом с прямоугольным поперечным сечением шириной a и толщиной b_1 (см. рис. 2). При выводе уравнений колебаний и граничных условий мы используем приближенный подход, заменяя 2 пластины одной пластиной толщиной $2a_1$ и учитывая только кинетическую энергию поступательного движения соединяющего пластины кольца.

В этом случае колебания пластины, изображенной на рис. 3,

Таблица 2. **Зависимость d_* и относительного выигрыша r_b от n, k_a и k_b в задаче об устойчивости**

n	2	2	2	2	2	3	3
k_a	1	0.8	0.4	0.8	0.2	1	0.8
k_b	1	0.8	0.4	0.2	0.8	1	0.8
d_*	0.978	0.979	0.985	0.980	0.981	0.949	0.951
r_b%	0	0.1	0.7	0.2	0.3	0	0.2
n	3	3	3	4	4	5	5
k_a	0.4	0.8	0.2	1	0.4	1	0.4
k_b	0.4	0.2	0.8	1	0.4	1	0.4
d_*	0.964	0.954	0.956	0.920	0.923	0.892	0.922
r_b%	1.6	0.5	0.7	0	0.3	0	3.7

описываются системой безразмерных уравнений:

$$\begin{gathered}(s_pQ)' + \lambda s_p w = 0, \quad s_pQ = (s_pM_1)' - M_2, \quad M_1 = \frac{a_1^2}{4}(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2), \\ M_2 = \frac{a_1^2}{4}(\varkappa_2 + \nu\varkappa_1), \quad \varkappa_1 = \vartheta', \varkappa_2 = \vartheta/r, \vartheta = -w', \quad \lambda = \frac{\sigma\rho r_0^2\omega^2}{E},\end{gathered} \tag{9}$$

где штрихом обозначена производная по переменной s_p, а граничные условия на внешнем крае пластины имеют вид

$$M_1 = 0, \quad Q - \lambda a b_1 w/(2a_1) = 0, \quad s_p = 1 + b. \tag{10}$$

Здесь b — безразмерная ширина пластины. За единицу длины выбран внутренний радиус пластины R, совпадающий с радиусом цилиндрической оболочки.

Проведенный в работе [5] асимптотический анализ показал, что если толщина кольцевой пластины не превосходит толщину оболочки, то при приближенном определении частоты колебаний пластины, близкой к частоте колебаний подкрепленной оболочки, на внутреннем крае пластины следует задать условия жесткой заделки. Предположим, что $2a_1 \leqslant h$. Тогда

$$w = \vartheta = 0, \quad s_p = 1. \tag{11}$$

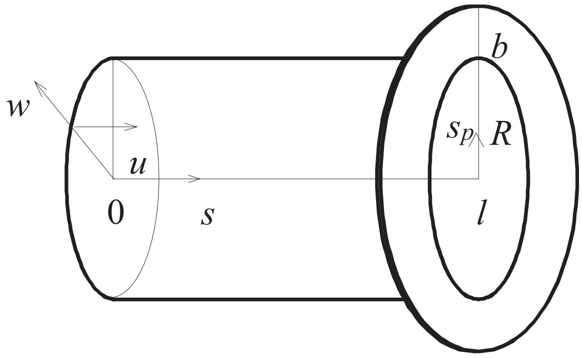

Рис. 3. Цилиндрическая оболочка, подкрепленная пластиной.

Приближенное решение краевой задачи (9)–(11) будем искать при условии $b_1 \ll b \ll 1$, которое обычно выполняется для шпангоутов, используемых в технике.

Замена переменной $s_p = 1+bx$ и отбрасывание малых слагаемых в уравнениях и граничных условиях (9)–(11) приводят к следующей краевой задаче, описывающей также колебания балки с грузом на конце:

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \beta^4 w = 0,$$

$$w = \vartheta = 0, \quad x = 0, \quad w'' = 0, \quad w''' + \beta^4 \frac{m}{m_b} w = 0, \quad x = 1,$$

где $\beta^4 = 3b^4\lambda/a_1^2$, m_b — масса пластин, m — масса соединяющего пластины кольца, причем $m/m_b = k_b/k_a$.

Первой частоте колебаний пластины соответствует наименьший корень уравнения

$$\frac{k_b}{k_a} = \frac{(1+\cos\beta\cosh\beta)}{\beta(\sin\beta\cosh\beta - \cos\beta\sinh\beta)}.$$

Обозначим g_u отношение частоты колебаний пластины, имеющей оптимальную толщину, к частоте колебаний неподкрепленной оболочки:

$$g_u = \frac{k_a \beta^2}{2a_* k^2 \sqrt{3\lambda_1(0)}}, \quad a_* = \sqrt{(1-d_*)/AS_*}.$$

С ростом k функция f_u возрастает, а функция g_u убывает. В точке пересечения графиков этих функций $k = k_u^*$ первая частота колебаний подкрепленной оболочки имеет максимум. Значение $k = k_u^*$ является оптимальным значением k.

В случае прямоугольного поперечного сечения, как показано в работе [6], β определяется из уравнения

$$\sinh\beta\cos\beta + 1 = 0,$$

минимальный положительный корень у которого $\beta = 1.875$, а отношение частоты колебаний пластины к частоте колебаний неподкрепленной оболочки

$$g = \frac{1.01}{a_* k^2 \sqrt{\lambda_1(0)}}, \quad a^* = \sqrt{(1-d_*)/A}.$$

Оптимальное значение k для шпангоута с прямоугольным поперечным сечением обозначим k^*.

В качестве примера рассмотрим подкрепленную оболочку при следующих значениях параметров: $l = 4$, $h_0 = 0.01$, $\nu = 0.3$, $k_a = 0.2$, $k_b = 0.1$.

В табл. 3 приведены значения k^*, k_u^*, $f^* = f(k^*) = g(k^*)$ и $f_u^* = f_u(k^*) = g(k^*)$ для $n = 2, 3, 5$.

Таблица 3. **Значения оптимальных параметров при разном числе шпангоутов**

n	k^*	k_u^*	f^*	f_u^*
2	59.2	8.8	1.991	1.991
3	34.4	5.13	2.935	2.928
5	19.86	3.01	4.498	4.455

Значения функций f^* и f_u^*, соответствующих прямоугольному и П-образному сечениям, мало отличаются друг от друга, однако величина k^* значительно больше, чем k_u^*.

9. Заключение

Использование асимптотических методов при исследовании колебаний и устойчивости оболочек, подкрепленных шпангоутами, позволяет получить простые приближенные формулы для вычисления низших частот колебаний и критического внешнего давления. Основанные на этих формулах алгоритмы определения оптимальных параметров, соответствующих наибольшим значениям первой частоты или критического давления для подкрепленной оболочки с фиксированной массой, сводятся к решению кубического уравнения. В работе показано, что использование шпангоутов с П-образным поперечным сечением вместо шпангоутов с прямоугольным поперечным сечением позволяет увеличить первую частоту и критическое давление, не повышая веса оболочки, если отношение ширины шпангоута к его толщине не слишком велико.

Литература

1. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., 1979. 384 с.
2. *Филиппов С. Б.* Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб.: Изд–во СПбГУ, 1999. 196 с.
3. *Филиппов С. Б., Боярская М. Л., Кулаковский И. А.* Приближенное определение оптимальных параметров в задачах устойчивости и колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек // Шестые Поляховские чтения: Избранные труды Международной научной конференции по механике. СПб., 2012. с. 296–302.
4. *Филиппов С. Б., Лопатухин А. Л.* Низкочастотные колебания и устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // Вестн. С-Петерб. ун–та, Вып. 2, 2001, Сер. 1, с. 84–90.
5. *Filippov S. B.* Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach // Technische Mechanik, Vol. 24, 2004, pp. 221–230.
6. *Filippov S. B.* Asymptotic analysis of ring-stiffened shells vibrations// ENOC 2011, 24–29 July 2011, Rome, Italy.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

И. Д. Евзеров

В статье для трехмерной геометрически нелинейной задачи приведены уравнения равновесия и шагового метода, разностная схема для динамической задачи. Выполнен переход к стержням и пластинам. Предложен новый алгоритм решения геометрически нелинейных задач. После потери устойчивости решается соответствующая динамическая задача при равной нулю правой части, что дает возможность найти устойчивое состояние при той же нагрузке, при которой конструкция потеряла устойчивость. Начальные условия задаются в соответствии с найденной первой формой потери устойчивости. Применяется безусловно устойчивая неявная разностная схема. Предложенный алгоритм реализован в ПК ЛИРА 10. Приведены также тестовые задачи, подтверждающие эффективность алгоритма.

1. Введение

В статье предложен новый алгоритм решения геометрически нелинейных задач. После потери устойчивости решается соответствующая динамическая задача при равной нулю правой части. Начальные условия задаются в соответствии с найденной первой формой потери устойчивости. Применяется безусловно устойчивая неявная разностная схема. Таким методом находим устойчивое состояние при той же нагрузке, при которой конструкция потеряла устойчивость. Предложенный алгоритм реализован в ПК ЛИРА 10. Для трехмерной задачи приведены уравнения равновесия и шагового метода, разностная схема для динамической задачи. Выполнен переход к стержням и пластинам. Приведены также тестовые задачи, подтверждающие эффективность алгоритма.

Доклад на семинаре 23 апреля 2013 г.

2. Статическая задача и шаговый метод

Уравнения равновесия формулируем в виде принципа возможных перемещений:

$$a(U,V) + (f,V) = 0, \tag{1}$$

где $U(x)$ ($V(x)$, $W(x)$) — 3D-перемещения стержня или пластины, причем $U(x) = (U_1(x), U_2(x), U_3(x))$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – координата точки в области Ω, занимаемой конструкцией (вектор независимых переменных), $f = (f_1, f_2, f_3)$ — вектор внешних сил. Возможные работы внутренних и внешних сил определяются соответственно формулами (суммирование производится по повторяющимся индексам)

$$a(U,V) = \int_\Omega \sigma_{ij} d^1\varepsilon_{ij}(U)V dx, \qquad (f,V) = \int_\Omega f_i V_i dx, \qquad i,j = 1,2,3,$$

где первая вариация деформаций вычисляется следующим образом:

$$d^1\varepsilon_{ij}(U)V = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\right),$$

деформации задаются формулами

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right),$$

а напряжения — законом Гука:

$$\sigma_{ij} = E\varepsilon_{ij}.$$

Здесь E — матрица упругих модулей.

Для построения уравнений шагового метода предполагаем, что правая часть (1) линейно зависит от параметра θ ($0 \leqslant \theta \leqslant 1$). Дифференцируя (1) по θ, получим

$$a'(U,U',V) + (f,V) = 0, \tag{2}$$

где

$$a'(U,V,W) = a'_E(U,V,W) + a'_\sigma(U,V,W),$$

$$a'_E(U,V,W) = \int_\Omega E d^1\varepsilon_{ij}(U)V\varepsilon_{ij}(U)W dx,$$

$$a'_\sigma(U,V,W) = \int_\Omega \sigma_{ij}(U) d^2\varepsilon_{ij}(U,W)dx.$$

Здесь вторая вариация деформаций определяется равенством

$$d^2\varepsilon_{ij}(V)W = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\frac{\partial W_k}{\partial x_j} + \frac{\partial W_k}{\partial x_i}\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\right).$$

Заменив в (2) производную U' разностным отношением, получим известные уравнения шагового метода

$$a'\left(U_n, U_{n+1} - U_n, V\right) = \left(\theta_{n+1} - \theta_n\right)(f,V),$$

где

$$U_0 = 0, \quad m = 1,\dots,m_0, \qquad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{m_0} = 1.$$

Используется автоматический выбор шагов $\theta_{n+1} - \theta_n$. Критерием является изменение геометрии.

Функционал $a'_E(U,V,W)$ положительно определён и аналогичен функционалу возможной работы внутренних сил соответствующей линейной задачи. Функционал $a'_\sigma(U,V,W)$ зависит от напряжений и не является положительно определённым, поэтому шаговый метод позволяет исследовать устойчивость деформированной схемы. Наиболее интересными являются геометрически нелинейные задачи для стержней и пластин. Далее получим представление функционала $a'_\sigma(U,V,W)$ для этих задач.

3. Функционал $a'_\sigma(U,V,W)$

Вычислим функционал $a'_\sigma(U,V,W)$ для стержня длины l и сечения A. Используем представление перемещений по сечению (см. [1]):

$$\begin{aligned}
U_1(x) &= u_1 - x_2\alpha_3 + x_3\alpha_2 + \tfrac{1}{2}\left(x_2\alpha_1\alpha_2 + x_3\alpha_1\alpha_3\right),\\
U_2(x) &= u_2 - x_3\alpha_1 - \tfrac{1}{2}x_2\left(\alpha_1^2 + \alpha_3^2\right) + \tfrac{1}{2}x_3\alpha_2\alpha_3,\\
U_3(x) &= u_3 + x_2\alpha_1 - \tfrac{1}{2}x_3\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) + \tfrac{1}{2}x_2\alpha_2\alpha_3.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $u = (u_1,u_2,u_3)$ и $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ — соответственно перемещения и повороты стержня, причем $\alpha_2 = -u'_3$ $\alpha_3 = u'_2$.

Дифференцируя (3), находим вторые вариации деформаций:

$$
\begin{aligned}
&d^2\varepsilon_{11}(U) = \tfrac{1}{2}\left((\alpha_3 - x_3\alpha_1')^2 + (\alpha_2 - x_2\alpha_1')^2 + x_2(\alpha_1\alpha_2)' + x_3(\alpha_1\alpha_3)'\right),\\
&d^2\varepsilon_{12}(U) = \tfrac{1}{2}\left(-x_3(\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_2) - \alpha_1\alpha_2\right),\\
&d^2\varepsilon_{13}(U) = \tfrac{1}{2}\left(x_2(\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_2) - \alpha_1\alpha_3\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Интегрируя по сечению, получим

$$
\begin{aligned}
&a_\sigma'(U,V,V) = \frac{1}{2}\int_l \big(N_1(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) + M_1(\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_2) - 2(M_2\alpha_1)'\alpha_3 +\\
&+(M_3\alpha_1)'\alpha_2 + (M_2\alpha_1\alpha_3)' - (M_3\alpha_1\alpha_2)' +\\
&+(N_1 r^2 + M_2 I_{32} - M_3 I_{23})\alpha_1^2\big)\, dx_1,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&r^2 = (I_2 + I_3)/A, \qquad I_2 = \textstyle\int_A x_3^2 dA, \qquad I_3 = \int_A x_2^2 dA,\\
&I_{32} = \textstyle\int_A x_3\left(x_2^2 + x_3^2\right) dA/I_2, \qquad I_{23} = \int_A x_2\left(x_2^2 + x_3^2\right) dA/I_3.
\end{aligned}
$$

Для тонкостенных стержней полагаем

$$
\alpha_2 = -u_3' + x_2^0\alpha_1', \alpha_3 = -u_2' + x_3^0\alpha_1',
$$

где x_2^0, x_3^0 — координаты центра кручения. В формуле (5) первое слагаемое — изгиб от сжатия, второе — изгиб от кручения, третье–шестое — кручение от изгиба, последнее — кручение от сжатия. Функционал (5) другими методами получен в работах [3,7].

При вычислении функционала $a_\sigma'(U,V,W)$ для пластин толщины δ используется представление перемещений по толщине (см. [1])

$$
\begin{aligned}
&U_1(x) = u_1 + x_3\alpha_2 + \tfrac{1}{2}x_3\alpha_1\alpha_3,\\
&U_1(x) = u_2 - x_3\alpha_2 + \tfrac{1}{2}x_3\alpha_2\alpha_3,\\
&U_1(x) = u_3 - \tfrac{1}{2}x_3\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Здесь $u = (u_1, u_2, u_3)$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — соответственно перемещения и повороты стержня, причем $\alpha_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$, $\alpha_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$.

Дифференцируя (6), находим вторые вариации деформаций:

$$
\begin{aligned}
&d^2\varepsilon_{11}(U) = \left(\left(\tfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - x_3\tfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\right)^2 + \alpha_2^2 + x_3\tfrac{\partial(\alpha_1\alpha_3)}{\partial x_1}\right)/2,\\
&d^2\varepsilon_{22}(U) = \left(\left(\tfrac{\partial u_1}{\partial x_2} - x_3\tfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}\right)^2 + \alpha_1^2 + x_3\tfrac{\partial(\alpha_2\alpha_3)}{\partial x_2}\right)/2,\\
&d^2\varepsilon_{12}(U) = \tfrac{1}{2}\left(\left(\tfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + x_3\tfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}\right)\left(\tfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + x_3\tfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}\right) + \alpha_1\alpha_2 + \right.\\
&\left. + \left(\tfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - x_3\tfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\right)\left(\tfrac{\partial u_2}{\partial x_2} - x_3\tfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) + +x_3\left(\tfrac{\partial(\alpha_1\alpha_3)}{\partial x_2} + \tfrac{\partial(\alpha_2\alpha_3)}{\partial x_1}\right)\right).\\
&d^2\varepsilon_{13}(U) = -\alpha_1\tfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \alpha_1\alpha_3/2,\\
&d^2\varepsilon_{23}(U) = -\alpha_2\tfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \alpha_2\alpha_3/2.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Интегрируя по толщине, получим

$$
\begin{aligned}
&a'_\sigma(U,V,W) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(N_{pq}\frac{\partial u_3}{\partial x_p}\frac{\partial u_3}{\partial x_q} + \right.\\
&+\boxed{N_{11}\left(\tfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + N_{22}\left(\tfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + N_{12}\left(\tfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\tfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \tfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\tfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)}+\\
&\left. +2\frac{\partial\left(M_{1p}\alpha_1\right)}{\partial x_p}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - 2\frac{\partial\left(M_{2p}\alpha_2\right)}{\partial x_p}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\left(M_{pq}\alpha_p\alpha_3\right)}{\partial x_q}\right)dx_1dx_2.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Здесь N_i, M_i, N_{pq}, M_{pq} $(i = 1,2,3,\ p,q = 1,2)$ — соответственно врутренние силы и моменты. Первая сумма в (8) — изгиб от сжатия, три последние — влияние изгиба. Выделенные слагаемые также существенны. Например, задачи устойчивости центрально сжатых стержней с сечениями — "Пи", "двутавр", "Зет" и т.д., можно моделировать и пластинами. Если в (8) не учитывать указанные слагаемые, критическая сила увеличивается на 30–50% При использовании метода разложения по малому параметру (толщине) эти слагаемые приняты малыми.

4. Динамическая задача и разностная схема

При рассмотрении динамических задач в уравнение равновесия (1) добавляется инерционное слагаемое

$$b(U'', V) + a(U,V) + (f,U) = 0 \tag{9}$$

и начальные условия

$$U(0) = U^0, \qquad U'(0) = U^1. \tag{10}$$

Здесь

$$b(U,V) = \int_\Omega \rho U_i V_i dx$$

— возможные работы инерционных сил, ρ — плотность.

Для исследования уравнения и построения разностной схемы запишем (9) в виде (см. [2])

$$b(U'',V) + \textstyle\int_\Omega \sigma_{ij}(U) d^1\varepsilon_{ij}(U) V dx + (f,V) = 0, \tag{11}$$

$$E^{-1}\sigma'_{ij}(U) - d^1\varepsilon_{ij}(U)U' = 0. \tag{12}$$

В (11) положим $V = U'$, (12) умножим на σ_{ij}, проинтегрируем по Ω и сложим с (11). Получим известное уравнение энергетического баланса:

$$\frac{db(U',U')}{dt} + \frac{1}{2}\int_\Omega E^{-1}\sigma_{ij}(U\sigma_{ij}(U))dx + (f,U') = 0.$$

Из леммы Гронуолла методами [4, 6] доказывается существование, а затем и единственность решения. Разностная схема строится из (11)–(12):

$$b(\gamma_n U,V) + \textstyle\int_\Omega \sigma_{ij}(U_{n+1}) d^1\varepsilon_{ij}(U_n) V dx + (f_n,V) = 0, \tag{13}$$

$$E^{-1}(\sigma'_{ij}(U_{n+1}) - \sigma'_{ij}(U_n)) - d^1\varepsilon_{ij}(U_n)(U_{n+1} - U_n) = 0, \tag{14}$$

$$\gamma_n U = (U_{n+1} - 2U_n + U_{n+1})\theta^{-2}, \qquad U_n = U(t_n), \qquad t_n = n\theta.$$

Устойчивость и оценка погрешности доказываются так же, как существование решения.

Схему (13)–(14) можно применить и к статической задаче, задав правую часть в виде

$$f(t) = \begin{cases} \epsilon t f, & 0 < t \leqslant \frac{1}{\epsilon}, \\ f, & \frac{1}{\epsilon} < t \leqslant \frac{2}{\epsilon}. \end{cases}$$

5. Расчетная схема после потери устойчивости

Сначала применяется шаговый метод. Если после некоторого шага установлено, что произошла потеря устойчивости, то для исследования дальнейшего поведения конструкции решается динамическая задача (9)–(10) при равной нулю правой части. Применяется схема (13)–(14). Начальные условия задаются в соответствии с найденной первой формой потери устойчивости. Таким методом находим устойчивое состояние при той же нагрузке, при которой конструкция потеряла устойчивость. Далее снова применяется шаговый метод.

6. Решение тестовых задач

Рассмотрим ряд примеров расчета. Все расчеты выполнены в ПК ЛИРА 10, в котором реализован предложенный алгоритм.

Пример 1

Геометрия шарнирно-стержневой системы задана на рис. 1. Граничные условия: $u_A = v_A = v_B = u_C = 0$.

Аналитическое решение этой задачи получено в работах [5, 8].

Система моделировалась двумя конечными элементами нити (КЭ 310 — нить). Результаты расчета приведены в табл. 1.

Таблица 1. **Результаты расчета для примера 1**

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность,%
	N_1, т	174.34	173.47	0.4
	N_2б т	239.86	239.80	0.05
B	u_Bб м	0.343	0.336	2.0
C	v_Cб м	-24.655	-24.633	0.1

Конструкция дважды теряет устойчивость: при нагрузке $P = 74.88$ т перемещения $u_B = -0.510$ м, $v_C = -4.460$ м. Устойчивое равновесное состояние — при $u_B = -3.616$ м, $v_C = -18.669$ м; при нагрузке $P = 180.0$ т, перемещения $u_B = -2.962$ м, $v_C = -22.223$ м. Устойчивое равновесное состояние — при $u_B = 0.330$ м,

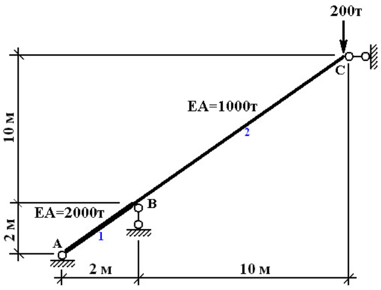

Рис. 1.

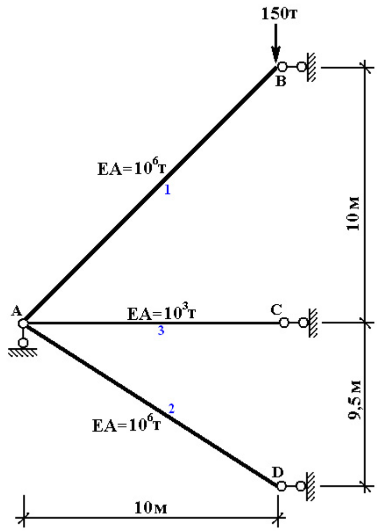

Рис. 2.

$v_C = -24.276$ м. Переместив точку C на 20 м вниз, получаем систему, не теряющую устойчивость при заданной нагрузке, что позволяет легко проверить результаты расчета исходной системы.

Пример 2

Геометрия шарнирно-стержневой системы задана на рис. 2. Граничные условия: $v_A = u_B = u_C = v_C = u_D = 0$.

Аналитическое решение этой задачи получено в работе [5].

Система моделировалась тремя конечными элементами нити (КЭ 310 — нить). Результаты расчета приведены в табл. 2.

Конструкция теряет устойчивость при нагрузке $P = 133.20$ т, перемещения $u_A = -2.602$ м, $v_B = -3.584$ м, $v_D = 3.884$ м. Устойчивое равновесное состояние достигается при $u_A = -3.80$ м, $v_B = -6.937$ м, $v_D = 9.494$ м, нижний стержень горизонтален.

Таблица 2. **Результаты расчета для примера 2**

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность,%
	N_1, т	-700.0	-693.0	1.0
	N_2, т	300.0	296.0	1.0
	N_3, т	380.0	380.16	0.05
D	v_D, м	9.50	9.50 0.	0
B	v_B, м	-6.95	-6.947	0.05
A	u_A, м	-3.80	-3.80	0.0

Пример 3

Геометрия шарнирно-стержневой системы задана на рис. 3. Граничные условия: $u_C = v_A = v_B = v_C = 0$, $u_B = u_D$.

Аналитическое решение этой задачи получено в работе [5].

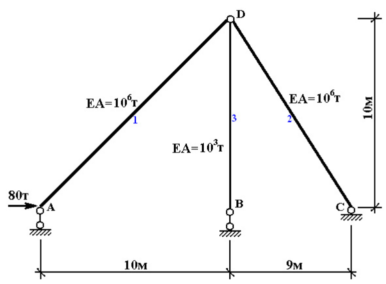

Рис.3.

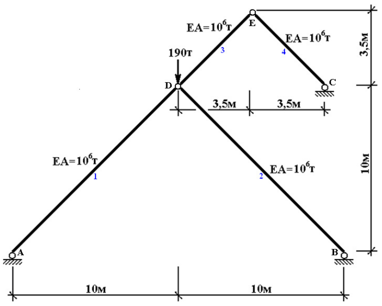

Рис.4.

Система моделировалась тремя конечными элементами нити (КЭ 310 — нить). Результаты расчета приведены в табл. 3

Конструкция теряет устойчивость при нагрузке $P = 57.450$ т, перемещения $u_A = 6.665$ м, $u_B = 3.602$ м, $v_D = 2.324$ м. Устойчивое равновесное состояние достигается при $u_A = 18.013$ м, $u_B = 18.085$ м, $v_D = -0.0663$ м. Переместив точки A, B и D на 18 м вправо, получаем систему, не теряющую устойчивость при заданной нагрузке, что позволяет легко проверить результаты расчета исходной системы.

Таблица 3. **Результаты рачсчета для примера 3**

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность,%
	N_1, т	−112.21	−111.88	0.3
	N_2, т	118.35	118.22	0.1
	N_3, т	−8.0	−8.7	1.0
A	u_A, м	18.024	18.017	0.05
B	u_B, м	18.090	18.118	0.13
D	v_D, м	−0.080	−0.087	1.0

Пример 4

Геометрия шарнирно-стержневой системы задана на рис. 4. Граничные условия: $u_A = u_B = v_A = v_B = u_C = v_C = 0$.

Аналитическое решение этой задачи получено в работе [5].

Система моделировалась четырьмя конечными элементами нити (КЭ 310 — нить).

Результаты расчета таковы (табл. 4)

Таблица 4. **Результаты расчета для примера 4**

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность,%
	N_1, т	−245.0	−245.3	0.1
	N_2, т	319.0	−318.9	0.1
	$N_3 = N_4$, т	116.0	115.89	0.1
D	u_D, м	0.530	0.529	0.01
D	v_D, м	−8.240	−8.241	0.01
E	u_E, м	0.265	0.265	0.0
E	v_E, м	−7.620	−7.624	0.05

Конструкция теряет устойчивость при нагрузке $P = 187.63$ т. В устойчивом равновесном состоянии точка приложения нагрузки смещена вправо, два верхних стержня вытянуты в прямую линию. Точка D опускается ниже линии AB при нагрузке $P = 290$ т.

Пример 5

Рассмотрим большие перемещения и потерю устойчивости защемленной круговой арки, изображенной на рис. 5, с защемленными точками A и B. Материал арки таков, что $EI_y = 1.25 \cdot 10^6$ тм^2.

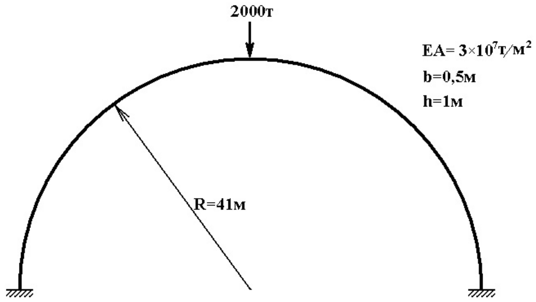

Рис. 5.

При расчете используются стержневые конечные элементы сильного изгиба(КЭ 309). При использовании 180 элементов результаты таковы (табл. 5).

Таблица 5. **Результаты расчета для примера 5**

Точка. Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность,%
w_3, м	66.07	66.09	0.03

Конструкция теряет устойчивость при нагрузке $P = 1950$т, перемещение $w_3 = 19.7$м. Устойчивое равновесное состояние достигается при $w_3 = 65.889$м.

Пример 6

В качестве последнего примера рассмотрим закритический изгиб консоли, изображенной на рис. 6 с защемленной точкой A. Для материала консоли $E = 2 \cdot 10^7$ т/м^2, а действующая нагрузка $F = 1.1$ т.

Аналитическое решение этой задачи содержится в работе [3].

При расчете используются стержневые конечные элементы сильного изгиба (КЭ 309). При использовании 100 элементов результаты таковы (табл. 6).

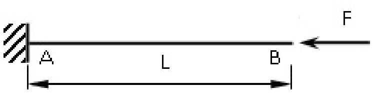

Рис.6.

Таблица 6. **Результаты расчета для примера 6**

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	Результаты расчета (ЛИРА)	Погрешность,%
B	u_B, м	-2.025	-2.024	0.5
B	w_B, м	-5.361	-5.359	0.4

Конструкция теряет устойчивость при нагрузке $P = 0.990$ т. Поскольку вертикальные перемещения отсутствуют, то для продолжения расчета необходимо найти первую форму потери устойчивости. Устойчивое равновесное состояние достигается при $u_B = 0.0616$ м, $v_B = -1.0$ м.

7. Выводы

Рассмотрена вариационная постановка трехмерных геометрически нелинейных задач и соответствующих задач для стержней и пластин. Для решения статических задач рассмотрен шаговый метод, для динамических - разностная схема. Предложен новый алгоритм решения статических геометрически нелинейных задач – после потери устойчивости решается соответствующая динамическая задача при равной нулю правой части. Применяется безусловно устойчивая неявная разностная схема. Начальные условия задаются в соответствии с найденной первой формой потери устойчивости. Таким методом находим устойчивое состояние при той же нагрузке, при которой конструкция потеряла устойчивость. В устойчивом состоянии применяется шаговый метод. Предложенный алгоритм реализован в ПК ЛИРА 10. Приведены тестовые задачи, подтверждающие эффективность алгоритма.

Литература

1. *Городецкий А.С., Евзеров И.Д.* Компьютерные модели конструкций. Киев: Факт, 2007. 394 с.
2. *Евзеров И.Д.* Приближенная схема для задачи о нелинейных колебаниях тонких пластин // Моделирование в механике. 1989. Т.3 (20). №2. С. 54–63.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т.7: Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
5. *Назаров Д.* Обзор современных программ конечно-элементного анализа // САПР и графика. 2000. № 2. С. 52–55.
6. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. М.: Мир, 1989. 492 с.
7. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. М.: СКАД СОФТ, 2007. 653 с.
8. *Данилин А., Зуев Н., Снеговский Д., Шалашилин В.* Об использовании метода конечных элементов при решении геометрически нелинейных задач // САПР и графика. 2000. № 4. С. 26–31.

СВОБОДНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А.Л. Смирнов, Е.С. Помыткина

В статье рассматриваются свободные поперечные колебания прямой упругой балки с прямоугольным поперечным сечением, с параметрами, зависящими от продольной координаты. Целью исследования является получение формул для собственных частот колебаний и собственных форм колебаний. Предполагается, что параметры балки мало отличаются от постоянных, что позволяет использовать в исследовании асимптотический метод. Результаты, полученные асимптотическим методом, сравниваются в результатами численного моделирования.

1. Введение

В статье рассматриваются свободные поперечные колебания прямой упругой балки с прямоугольным поперечным сечением, причем параметры балки как геометрические (ширина, высота, поперечное сечение), так и физические (плотность, модуль Юнга) могут зависеть от продольной координаты (рис. 1).

Целью исследования является получение формул для собственных частот колебаний и собственных форм колебаний. Предполагается, что параметры балки мало отличаются от постоянных, что позволяет использовать в исследовании асимптотический метод. Результаты, полученные асимптотическим методом, сравниваются в результатами численного моделирования.

Исследованиям свободных поперечных колебаний балок с переменными параметрами посвящено множество работ. Как правило, при решении используются численные методы (конечных элементов, граничных элементов и др.). Нахождению приближенных аналитических решений посвящены работы [3–5], содержащие об-

---

Работа частично поддержана грантом РФФИ №13-01-00523.

Доклад на семинаре 3 сентября 2013 г.

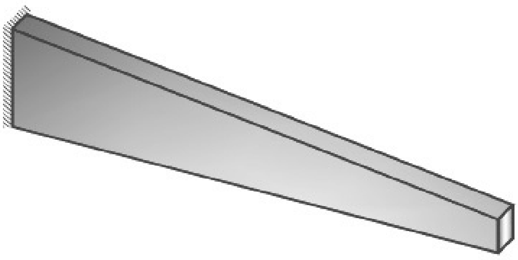

Рис. 1. Балка переменной высоты.

ширную библиографию. Настоящая статья является расширенной и дополненной версией доклада [6].

Задача решается в линейной постановке в рамках гипотез Эйлера–Бернулли, поэтому мы пренебрегаем продольными перемещениями сечений, их поворотами и сдвигами. Действие сил сопротивления игнорируется. Тогда дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний балки имеет вид (см. [1])

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E(x)J(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]+\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=0.$$

где $w(x,t)$ — поперечное перемещение балки, x — продольная координата ($0 \leqslant x \leqslant L$), L — длина балки, t — время, $E(x),\rho(x)$ — соответственно модуль Юнга и линейная плотность материала, $J(x)=b(x)h^3(x)/12$ — момент инерции поперечного сечения, $S(x)=b(x)h(x)$ — площадь поперечного сечения. Здесь $b(x),h(x)$ — соответственно ширина и высота балки,

После разделения переменных в виде $w(x,t)=W(x)\sin(\omega t)$ придем к уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[E(x)J(x)\frac{d^2W(x)}{dx^2}\right]-\omega^2\rho(x)S(x)W(x)=0.$$

Введем безразмерные переменные со знаком “$\tilde{}$” (который в дальнейшем будем опускать) по формулам

$$h(x) = h_0\tilde{h}(x), \qquad b(x) = b_0\tilde{b}(x), \qquad E(x) = E_0\tilde{E}(x),$$

$$\rho(x) = \rho_0\tilde{\rho}(x), \qquad x = \tilde{x}/L, \qquad \Lambda^4 = \omega^2\frac{12\rho_0 l^4}{E_0 h_0^2}$$

и выпишем получившееся уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\alpha(x)\frac{d^2W(x)}{dx^2}\right] - \Lambda^4\beta(x)W(x) = 0. \tag{1}$$

Здесь $\alpha(x) = b(x)h^3(x)/12$, $\beta(x) = b(x)h(x)$.

Далее будут рассматриваться три вида однородных граничных условий:

(I) $W(0) = W(1) = W''(0) = W''(1) = 0$ — шарнирное опирание на обоих концах балки,

(II) $W(0) = W(1) = W'(0) = W'(1) = 0$ — жесткая заделка на обоих концах балки,

(III) $W(0) = W(1) = W''(0) = W'(1) = 0$ — шарнирное опирание на одном конце и жесткая заделка на другом конце балки.

Уравнение (1) и одно из условий (I)–(III) образуют краевую задачу на собственные значения.

2. Метод возмущений

Будем считать, что один или несколько параметров $p(x)$ изменяются по закону $p(x) = 1 + \varepsilon f(x)$, где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, а $f(x)$ — произвольная функция. В табл. 1 выписаны выражения для функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при варьировании разных геометрических и физических параметров.

Процесс построения асимптотического решения описан в работах [1, 2]. Представим в виде ряда по степеням малого параметра ε функции $\alpha(x) = 1 + \sum_{i=1}\varepsilon^i\alpha_i(x)$ и $\beta(x) = 1 + \sum_{i=1}\varepsilon^i\beta_i(x)$, поперечное перемещение $W(x) = W_0(x) + \sum_{i=1}\varepsilon^i W_i(x)$ и частотный параметр $\Lambda^4 = \Lambda_0^4(1 + \sum_{i=1}\varepsilon^i\Lambda_i)$, подставим эти представления в уравнение (1) и приравняем члены при одинаковых степенях ε. Получается следующая последовательность уравнений:

$$-\Lambda_0^4 W_0(x) + {W_0}^{(4)}(x) = 0, \tag{2}$$

Таблица 1. **Значения функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при варьировании параметров**

N	Возмущаемый параметр	$\alpha(x)$	$\beta(x)$
1	$b(x) = b_0(1+\varepsilon f(x))$	$(1+\varepsilon f(x))$	$(1+\varepsilon f(x))$
2	$h(x) = h_0(1+\varepsilon f(x))$	$(1+\varepsilon f(x))^3$	$(1+\varepsilon f(x))$
3	$h(x) = h_0(1+\varepsilon f(x))$ $b(x) = b_0\dfrac{1}{(1+\varepsilon f(x))}$, $S(x) =$const	$(1+\varepsilon f(x))^2$	1
4	$b(x) = b_0(1+\varepsilon f(x))$ $h(x) = h_0\dfrac{1}{(1+\varepsilon f(x))}$, $S(x) =$const	$\dfrac{1}{(1+\varepsilon f(x))^2}$	1
5	$\rho(x) = \rho_0(1+\varepsilon f(x))$	1	$(1+\varepsilon f(x))$
6	$E(x) = E_0(1+\varepsilon f(x))$	$(1+\varepsilon f(x))$	1

$$\begin{aligned}&-\Lambda_0^4 W_1(x) + {W_1}^{(4)}(x) = \Lambda_1\Lambda_0^4 W_0(x) + \Lambda_0^4 W_0(x)(\beta_1(x)-\alpha_1(x))-\\&\quad -{W_0}''(x){\alpha_1}''(x) - 2{\alpha_1}'(x){W_0}^{(3)}(x),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&-\Lambda_0^4 W_2(x) + W_2^{(4)}(x) = \Lambda_2\Lambda_0^4 W_0(x) + \Lambda_1\Lambda_0^4 W_1(x)+\\&\quad +\Lambda_1\Lambda_0^4 W_0(x)\beta_1(x) + \Lambda_0^4 W_1(x)\beta_1(x) + \Lambda_0^4 W_0(x)(\beta_2(x)-\alpha_2(x)))-\\&\quad -{W_1}''(x){\alpha_1}''(x) - {W_0}''(x){\alpha_2}''(x) - 2{\alpha_2}'(x){W_0}^{(3)}(x)-\\&\quad -2{\alpha_1}'(x){W_1}^{(3)}(x) - \alpha_1(x){W_1}^{(4)}(x).\end{aligned} \tag{4}$$

Общее решение уравнения нулевого приближения (2) имеет вид

$$W_0 = W_0(x) = C_1\sin\Lambda_0 x + C_2\cos\Lambda_0 x + C_3\sinh\Lambda_0 x + C_4\cosh\Lambda_0 x. \tag{5}$$

Удовлетворяя граничные условия (I–III), получим частотное уравнение для нахождения частотного параметра $\Lambda_{0,n}$. В общем случае частотное уравнение трансцендентно и его корни находятся численно. Для корней с большими значениями n можно использовать асимптотические формулы.

Уравнение первого приближения (3) имеет решение при условии, что его правая часть ортогональна W_0. Из этого условия получим выражения для первой поправки к частотному параметру:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 = \tfrac{1}{\Lambda_0^4(W_0,W_0)}\Big(&\Lambda_0^4((\alpha_1(x)-\beta_1(x))W_0, W_0)+\\&+({\alpha_1}''(x){W_0}'', W_0) + 2({\alpha_1}'(x){W_0}^{(3)}, W_0)\Big).\end{aligned} \tag{6}$$

Под скалярным произведением здесь понимается $(f,g)=\int_0^1 fg dx$.

Построим теперь общее решение уравнения (3), которое будет содержать 4 произвольные постоянные. Три из них находятся при удовлетворении граничных условий. В силу равенства (6) четвертое граничное условие будет выполнено при любом значении четвертой произвольной постоянной. Положим ее равной 0.

Аналогично уравнение второго приближения (4) имеет решение при условии, что его правая часть ортогональна решению нулевого приближения $W_0(x)$. Из этого условия получим выражения для второй поправки к частотному параметру:

$$\begin{gathered}\Lambda_2=\frac{1}{\Lambda_0^4(W_0,W_0)}\Big(-\Lambda_0^4\Lambda_1(W_1,W_0)-\Lambda_0^4\Lambda_1(\beta_1(x)W_0,W_0)-\\-\Lambda_0^4(\beta_1(x)W_1,W_0)-\Lambda_0^4((\beta_2(x)-\alpha_2(x))W_0,W_0)+\\+(\alpha_1{}''(x)W_1'',W_0)+(\alpha_2{}''(x)W_0'',W_0)-(2\alpha_2{}'(x)W_0^{(3)},W_0)-\\-(2\alpha_1{}'(x)W_1{}^{(3)},W_0)+(\alpha_1(x)W_1{}^{(4)},W_0)\Big).\end{gathered}\tag{7}$$

Процесс уточнения частотного параметра и формы собственных колебаний может быть продолжен. Мы будем ограничиваться нахождением первой ненулевой поправки к частотному параметру и к форме собственных колебаний.

3. Линейная функция возмущений

Начнем рассмотрение со случая, когда один или несколько параметров линейно зависят от координаты x. В этом случае удобно использовать функцию $f(x)=x-1/2$, при этом за невозмущенное значение параметра выбирается значение в центре балки, и при возмущении не происходит изменения массы балки.

Для условий (I) уравнение нулевого приближения имеет аналитическое решение:

$$W_0(x)=\sin(\pi n x),\qquad \Lambda_0=\pi n.$$

Заметим, что для любых симметричных граничных условий функция W_0 будет четна, а ее нечетные производные — нечетны относительно $x=1/2$. Значения первых членов в разложениях $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ приведены в табл. 2.

Таблица 2. **Главные члены в разложениях функций** $\alpha(x)$ **и** $\beta(x)$

N	Возмущаемый параметр	$\alpha_1(x)$	$\beta_1(x)$
1	$b(x)$	$f(x)$	$f(x)$
2	$h(x)$	$3f(x)$	$f(x)$
3	$h(x) = 1/b(x)$ $S(x) =$const	$2f(x)$	0
4	$b(x) = 1/h(x)$ $S(x) =$const	$-2f(x)$	0
5	$\rho(x)$	0	$f(x)$
6	$E(x)$	$f(x)$	0

Поскольку при $f(x) = x - 1/2$ функции $\alpha_1(x), \beta_1(x)$ нечетны относительно $x = 1/2$, то из формулы (6) $\Lambda_1 = 0$. Таким образом, при симметричных граничных условиях влияние на частоту линейного по x возмущения оказывается слабым (отсутствует линейный член в разложении частотного параметра по ε).

В nабл. 3 для разных возмущений при $f(x) = x - 1/2$ для граничных условий вида (I) приведены вторые поправки для частотного параметра и старшие члены их асимптотического разложения при $n \to \infty$

Таблица 3. **Значения** $\Lambda_{2,n}$ **при** $f(x) = x - 1/2$ **для шарнирно опертой балки**

N	$\Lambda_{2,n}$	$\Lambda_{2,n}$ $n \to \infty$
1	$\dfrac{n\pi - 4\coth[n\pi] + 4(-1)^n \mathrm{csch}[n\pi]}{2n^3\pi^3}$	$\frac{1}{2n^2\pi^2}$
2	$\dfrac{19n\pi - n^3\pi^3 - 64\coth[n\pi] + 64(-1)^n \mathrm{csch}[n\pi]}{8n^3\pi^3}$	$-\frac{1}{8} + \frac{19}{8n^2\pi^2}$
3	$\dfrac{7n\pi - n^3\pi^3 - 16\coth[n\pi] + 16(-1)^n \mathrm{csch}[n\pi]}{8n^3\pi^3}$	$-\frac{1}{8} + \frac{7}{8n^2\pi^2}$
4	$\dfrac{-3n\pi + n^3\pi^3 - 48\coth(n\pi) + 48(-1)^n \mathrm{csch}(n\pi)}{24n^3.\pi^3}$	$\frac{1}{24} - \frac{1}{8n^2\pi^2}$
5	$\dfrac{33n\pi - 5n^3\pi^3 - 48\coth[n\pi] + 48(-1)^n \mathrm{csch}[n\pi]}{96n^3\pi^3}$	$-\frac{5}{96} + \frac{11}{32n^2\pi^2}$
6	$\dfrac{-5n\pi + n^3\pi^3 - 16\coth[n\pi] + 16(-1)^n \mathrm{csch}[n\pi]}{32n^3\pi^3}$	$\frac{1}{32} - \frac{5}{32n^2\pi^2}$

Таким образом, в случаях 1, 4, 6, т.е. при возмущении ширины, при возмущении ширины и высоты при сохранении площади поперечного сечения или при возмущении плотности, $\Lambda_{2,1} < 0$, а для $n > 1$ поправка $\Lambda_{2,n} > 0$, причем при $n \to \infty$ в случае (1) $\Lambda_{2,n} \to 0$, а в случаях (4) и (6) поправка стремится к конечной величине.

В остальных случаях для всех значений n поправка $\Lambda_{2,n} < 0$, а при $n \to \infty$ она стремится к конечной величине.

На вклейке на рис. 6 (а) и (б) приведена зависимость первой, третьей и пятой собственных частот балки от параметра ε при возмущении ширины и высоты соответственно. Точками отмечены значения, полученные при численном анализе (серые точки — метод прогонки, черные точки — ANSYS12.0 (3D-элементы BEAM54)).

В случае симметричных граничных условий вида (II) решением уравнения (2) будет

$$W_0(x) = \mathrm{sh}(x\Lambda_0) - \sin(x\Lambda_0) + \frac{(\sin(\Lambda_0) - \mathrm{sh}(\Lambda_0))}{(\cos(\Lambda_0) - \mathrm{ch}(\Lambda_0))}(\cos(x\Lambda_0) - \mathrm{ch}(x\Lambda_0))$$

при

$$-1 + \cos(\Lambda_0)\,\mathrm{ch}(\Lambda_0) = 0. \tag{8}$$

Корни уравнения (8) находятся численно. Для корней с большими номерами справедлива асимптотическая формула (см. [1]) $\Lambda_{0,n} \sim \frac{\pi}{2} + \pi n$. Выражения для $W_1(x)$ и Λ_2 найдены с использованием пакета Mathematica 8.0 и здесь не приводятся из-за их громоздкости. В табл. 4 для разных возмущений при граничных условиях вида (II) приведены значения $\Lambda_{2,n}$ для $n = 1, 2, 3$ и главные члены при $n \to \infty$.

Таблица 4. **Значения $\Lambda_{2,n}$ при $f(x) = x - 1/2$ для балки с жестко заделанными концами**

N	$\Lambda_{2,1}$	$\Lambda_{2,2}$	$\Lambda_{2,3}$	$\Lambda_{2,n}$
1	-0.037	-0.018	-0.010	$-\frac{3}{2n^2\pi^2}$
2	-0.116	-0.120	-0.122	$-\frac{1}{8} + \frac{3}{8\pi^2 n^2}$
3	-0.128	-0.127	-0.126	$-\frac{1}{8} - \frac{1}{8\pi^2 n^2}$
4	0.112	0.076	0.061	$\frac{1}{24} + \frac{23}{8\pi^2 n^2}$
5	-0.062	-0.057	-0.055	$-\frac{5}{96} - \frac{13}{32\pi^2 n^2}$
6	-0.003	0.014	0.021	$\frac{1}{32} - \frac{45}{32\pi^2 n^2}$

Как видно из табл. 3 и 4, главные члены асимптотических разложений $\Lambda_{2,n}$ для балки с шарнирно опертыми концами и с заделанными концам одинаковы.

Граничные условия вида (III) несимметричны и следует ожидать появления ненулевой первой поправки к частотному параметру. Действительно, в нулевом приближении форма колебаний будет такая же, что и для граничных условий (II), а частотное уравнение имеет вид

$$-\operatorname{ch}\Lambda_0\sin\Lambda_0+\cos\Lambda_0\operatorname{sh}\Lambda_0=0.$$

Для его корней с большими номерами справедлива асимптотическая формула (см. [1]) $\Lambda_{0,n}\sim\frac{\pi}{4}+\pi n$.

В табл. 5 для разных возмущений при граничных условиях вида (III) приведены значения $\Lambda_{1,n}$ для $n=1,2,3$ и главные члены при $n\to\infty$.

Таблица 5. **Значения $\Lambda_{1,n}$ при $f(x)=x-1/2$ для балки с граничными условиями вида (III)**

N	$\Lambda_{1,1}$	$\Lambda_{1,2}$	$\Lambda_{1,3}$	$\Lambda_{1,n}$
1	0.137	0.040	0.019	$\frac{2}{n^2\pi^2}$
2	0.274	0.080	0.038	$\frac{4}{n^2\pi^2}$
3	0.137	0.040	0.019	$\frac{2}{n^2\pi^2}$
4	−0.137	−0.040	−0.019	$-\frac{2}{n^2\pi^2}$
5	0.069	0.020	0.010	$\frac{1}{n^2\pi^2}$
6	0.069	0.020	0.010	$\frac{1}{n^2\pi^2}$

Если перераспределение материала происходит таким образом, что жесткость балки у конца с более слабыми граничными условиями увеличивается, то это приводит к повышению частоты, в противном случае (если $b=1/h$) частота уменьшается.

Форма колебаний слабо зависит от изменения параметров. На рис. 2 и 3 приведено сравнение нормализованных форм колебаний $W(x)=w(x)/\sqrt{\int_0^1 w^2(x)ds}$ шарнирно опертой балки при $n=1$ и $n=5$ для нулевого (пунктир) и первого приближения. На рис. 2 возмущается ширина балки, а на рис. 3 — высота балки. Значение $\varepsilon=1$ умышленно взято большим, чтобы была видна тенденция изменения формы. Изменение плотности практически не влияет на форму колебаний, в то время как максимальный эффект имеет изменение высоты балки. Похожее влияние оказывает изменение параметров на форму колебаний балки с жестко заделанными концами.

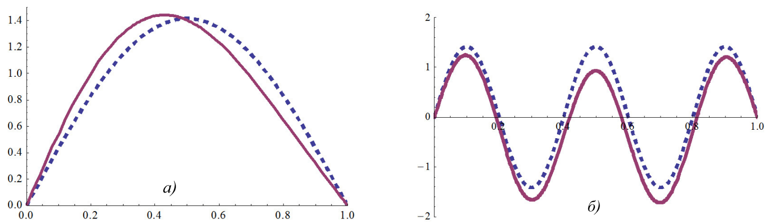

Рис. 2. Формы колебаний шарнирно опертой балки при линейном возмущении ширины при $n = 1$ (а) и $n = 5$ (б).

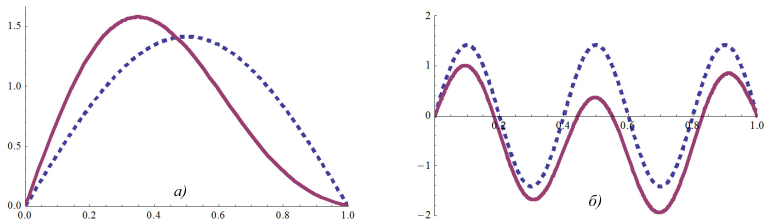

Рис. 3. Формы колебаний шарнирно опертой балки при линейном возмущении высоты при $n = 1$ (а) и $n = 5$ (б).

На рис. 4 изображены нормализованные формы колебаний балки с граничными условиями вида (III) при $n = 1$ для нулевого (пунктир) и первого приближения при $\varepsilon = 1$. На рис. 4 (а) возмущению подвергается ширина балки, а на рис. 4 (б) — высота балки. Изменение высоты оказывает весьма значительный эффект на форму колебаний.

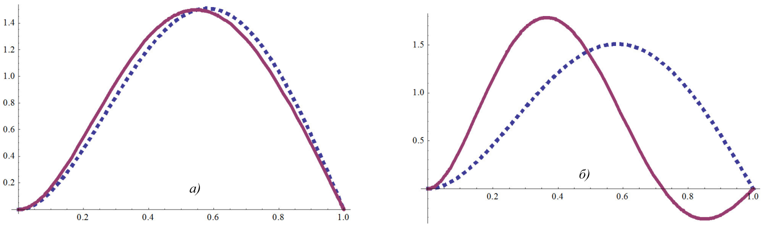

Рис.4. Формы колебаний балки с граничными условиями вида (III) при линейном возмущении ширины (а) и высоты (б).

4. Квадратичная функция возмущений

Пусть функция $f(x) = x^2 + ax + b$, где a, b — постоянные. Нам будет особенно интересен случай, когда масса балки не меняется при возмущении ее ширины, высоты или плотности. При этом $\int_0^1 f(x)dx = 0$, т.е. $a/2 + b + 1/3 = 0$. Выделим два случая: $a = -1$, $b = 1/6$, тогда функция $f(x)$ четна относительно $x = 1/2$, и $a = -2/3$, $b = 0$, тогда $f(0) = 0$.

Применяя метод возмущения к уравнениям колебаний шарнирно опертой балки, получим следующие значения для первой поправки к собственной частоте (табл. 6).

Таблица 6. **Значения $\Lambda_{1,n}$ при $f(x) = x^2 + ax + b$ для балки с шарнирно опертыми концами**

N	Λ_1	Λ_1 при $m =$const
1	0	0
2	$\frac{2}{3} - \frac{1}{n^2\pi^2} + a + 2b$	$-\frac{1}{n^2\pi^2}$
3	$\frac{2}{3} - \frac{1}{n^2\pi^2} + a + 2b$	$-\frac{1}{n^2\pi^2}$
4	$-\frac{2}{3} + \frac{1}{n^2\pi^2} - a - 2b$	$\frac{1}{n^2\pi^2}$
5	$\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2} + \frac{a}{2} + b$	$-\frac{1}{2n^2\pi^2}$
6	$\frac{1}{6}\left(-2 + \frac{3}{n^2\pi^2} - 3a - 6b\right)$	$\frac{1}{2n^2\pi^2}$

В случае, когда выполнено условие сохранения массы балки, поправка Λ_1 стремится к нулю с ростом n, а если масса меняется при возмущении, то к некоторому ненулевому значению. Особый случай — возмущение ширины балки, при котором первая поправка к частоте равна 0 при любых значениях a и b, в чем легко убедиться, подставив в формулу (6) $W_0 = \sin(\pi n x)$, $\alpha_1(x) = \beta_1(x) = x^2 + ax + b$. Вычисление двух главных членов по n для $\Lambda_{2,1}$ при $a = -1$, $b = 1/6$ дает

$$\Lambda_{2,n} \sim -\frac{2}{n^3\pi^3} + \frac{1}{6n^2\pi^2}.$$

Более того, для любом возмущении $f(x)$ ширины шарнирно опертой балки поправка $\Lambda_1 = 0$. Действительно, при таком возмущении $\alpha_1 = \beta_1 = f(x)$ и числитель в формуле (6)

$$\int_0^1 -n^2\pi^2 \sin(n\pi x)\left(2n\pi\cos(n\pi x) f'(x) + \sin(n\pi x) f''(x)\right) dx = \\ = -n^2\pi^2 \sin(n\pi)^2 f'(1) = 0.$$

На вклейке на рис. 7 приведена зависимость первой, третьей и пятой собственных частот балки от параметра ε ширины и высоты для функции возмущения $f(x) = x^2 - x + 1/6$. Точками обозначены значения, полученные при численном анализе методом прогонки, пунктирные линии соответствуют одночленному приближению, а сплошные — двучленному.

Перераспределение массы мало влияет на форму колебаний. Максимальное влияние на форму оказывает изменение жесткости при возмущении h. На рис. 5 изображена форма колебания для такого возмущения при $a = -1$, $b = 1/6$ для $n = 5$ и $\varepsilon = 1$.

С увеличением жесткости граничных условий влияние возмущения на поправку к частоте увеличивается. В частности, для колебаний балки с жестко заделанными концами и с граничными условиями вида (III) влияние возмущения оказывает на частоту большее влияние, чем при шарнирном опирании. В табл. 7 и 8 приведены поправки к трем первым частотам и главные члены асимптотических разложений $\Lambda_{1,n}$ при $f(x) = x^2 - x + 1/6$

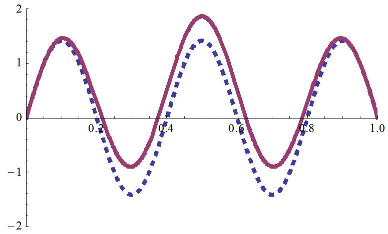

Рис. 5. Форма колебаний шарнирно опертой балки при квадратичном возмущении высоты.

Таблица 7. **Значения $\Lambda_{1,n}$ при $f(x) = x^2 - x + 1/6$ для балки с жестко заделанными концами**

N	$\Lambda_{1,1}$	$\Lambda_{1,2}$	$\Lambda_{1,3}$	$\Lambda_{1,n}$
1	0.098	0.048	0.027	$\frac{4}{n^2\pi^2}$
2	0.172	0.085	0.047	$\frac{7}{n^2\pi^2}$
3	0.074	0.036	0.020	$\frac{3}{n^2\pi^2}$
4	−0.074	−0.036	−0.020	$-\frac{3}{n^2\pi^2}$
5	0.037	0.018	0.010	$\frac{3}{2n^2\pi^2}$
6	0.061	0.030	0.017	$\frac{5}{2n^2\pi^2}$

Таблица 8. **Значения $\Lambda_{1,n}$ при $f(x) = x^2 - x + 1/6$ для балки с граничными условиями вида III**

N	$\Lambda_{1,1}$	$\Lambda_{1,2}$	$\Lambda_{1,3}$	$\Lambda_{1,n}$
1	0.057	0.029	0.015	$\frac{2}{n^2\pi^2}$
2	0.065	0.040	0.022	$\frac{3}{n^2\pi^2}$
3	0.008	0.012	0.007	$\frac{1}{n^2\pi^2}$
4	−0.008	−0.012	−0.007	$-\frac{1}{n^2\pi^2}$
5	0.004	0.006	0.003	$\frac{1}{2n^2\pi^2}$
6	0.052	0.023	0.012	$\frac{3}{2n^2\pi^2}$

5. Заключение

В работе получены асимптотические формулы для частот и форм колебаний балки с параметрами, близкими к постоянным, в то время, когда функции возмущения являются линейными или квадратичными. Особое внимание уделено возмущениям, не изменяющим массу балки. Выявлены факторы, при которых влияние возмущений на частоты является слабым (отсутствует линейный член в асимптотическом ряде для частотного параметра).

Литература

1. *Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б.* Асимптотические методы в механике твердого тела. М.: Ижевск, 2007. 356 с.
2. *Андрианов И.В., Данишевский В.В., Иванков А.О.* Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010. 216 с.
3. *Lee B.K., Lee J.K., Lee T.E., and Kim S.G.* Free vibrations of tapered beams with general boundary condition // KSCF Journal of Civil Engeneering, Vol.6, No.3, September 2002, pp. 283–288.
4. *Bayat M., Pakar I., and Bayat M.* Analytical study on the vibration frequencies of tapered beams. Latin American Journal of Solids and Structures, No. 8, 2011, pp. 149-162.
5. *Coskun S.B., Atay M.T., and Ozturk B.* Transverse Vibration Analysis of Euler–Bernoulli Beams Using Analytical Approximate Techniques in Advances in Vibration Analysis Research, Publisher InTech, 2011, pp. 1–22.
6. *Pomytkina E.S., Smirnov A.L.* Numerical and Asymptotic Modeling of Vibrations of a Beam with Variable Parameters // NAA 12 Fifth Conference on Numerical Analysis and Its Application, Abstracts, University of Rousse, Bulgaria 2012, p. 36.

ДОКЛАДЫ, НЕ ВОШЕДШИЕ В СБОРНИК

Математические модели критериев пластичности анизотропных разнопрочных пластин

Доклад на семинаре 18 сентября 2012 г.

И.В. Ефимов

РЕЗЮМЕ

Доклад посвящен актуальным вопросам обработки экспериментальных исследований. Цель — построение контуров текучести различных конструкционных материалов, имеющих сложную реологию. Задача сводится к нахождению минимума целевой функции коэффициентов контура и является классической задачей регрессионного анализа. Рассматриваются четыре метода построения контура текучести по экспериментальным данным: ручной подбор, метод покоординатного спуска, метод наискорейшего спуска и метод перебора на неравномерной сетке. На их основе предложен способ, позволяющий с наименьшей погрешностью достичь результата. Разработана программа, реализующая данный способ. Теоретические результаты дают удовлетворительное совпадение с экспериментами для различных сплавов сложной структуры.

Импульсные газоструйные системы в технических объектах

Доклад на семинаре 2 октября 2012 г.

М.С. Яковчук

РЕЗЮМЕ

Доклад посвящен моделированию сложных газодинамических процессов, которые протекают при работе импульсных систем в ряде технических объектов. Основное внимание уделяется системам управления вектором тяги, основанным на вдуве газа в сверхзвуковую часть сопла.

Также исследуются процессы в сепараторах, предназначенных для отсечки падающего полезносодержащего продукта струей сжатого воздуха. В докладе также представлены результаты вычислительного и натурного экспериментов.

Численное решение задач гидроаэродинамики на графических процессорах

Доклад на семинаре 30 октября 2012 г.

А.Г. Карпенко

РЕЗЮМЕ

Доклад посвещен особенностям реализации векторного алгоритма расчета течений жидкости и газа на графических процессорах. Рассматривается решение ряда тестовых задач. Произведена модификация для расчета течений с малыми числами Маха, несжимаемых течений и течений со свободной конвекцией.

Изгиб многослойной балки

Доклад на семинаре 9 апреля 2013 г.

Д.Д. Кварацхелия

РЕЗЮМЕ

В докладе рассматривается изгиб в условиях плоского напряженного состояния многослойной балки-полоски с чередующимися слоями в случае, когда слои отличаются по толщине и упругим свойствам.

ХРОНИКА

Четвертая Международная конференция по вычислительным методам в динамике конструкций и сейсмоинженерии

11–14 мая 2013 г. на о. Кос (Греция) состоялась Четвертая Международная конференция по вычислительным методам в динамике конструкций и сейсмоинженерии (COMPDYN2013), которая является одной из тематических конференций Европейского общества по вычислительным методам в прикладных науках (ECCOMAS) и специализированной конференцией Международной ассоциации по вычислительной механике (IACM). Конференция была также поддержана Европейским комитетом по вычислительной механике конструкций и твердых тел (ECCSM). Первая подобная конференция прошла в 2007 г. на о. Крит, вторая — в 2009 г. на о. Родос, а третья — в 2011 г. на о. Корфу. Основным организатором конференции выступает Национальный технический университет Афин, а председателем оргкомитета — проф. М. Пападракакис.

В конференции участвовали представители 51 страны. Российская делегация с 15 участниками была шестой по численности. В числе российских ученых во главе с академиком РАН Н.Ф. Морозовым и директором Института проблем машиноведения чл.-корр. АН РАН Д.А. Индейцевым были активные участники семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды": профессора П.Е. Товстик, С.М. Бауэр, С.Б. Филиппов, доцент А.Л. Смирнов, кандидаты физ.-мат. наук Т.П. Товстик и А.В. Лебедев (рис. 8 на вклейке). Они приняли участие с докладами в работе минисимпозиума "Periodicity effects and periodicity-based methods in vibro-acoustics and structural dynamics" (Морозов Н.Ф.) и секций "Optimum design in structural dynamics and earthquake engineering"

(Филиппов С.Б.), “Desigh nethods under dynamic and seismic actions” (Товстик П.Е., Товстик Т.П.), “Simulayion methods for dynamic promlems” (Товстик П.Е., Товстик Т.П., Бауэр С.М.), “Numerical methods for linear and nonlinear dynamics” (Смирнов А.Л., Лебедев А.В.), “Waves and computation” (Индейцев Д.А.).

Следующую, пятую, конференцию COMPDYN планируется провести в 2015 г.

С.М. Бауэр, А.Л. Смирнов

25-й семинар Северных стран по вычислительной механике

25–26 октября 2012 г. в Лунде (Швеция) прошел 25-й семинар Северных стран по вычислительной механике. Организатором семинара являлась Северная ассоциация вычислительной механики (NoACM, http://www.noacm.org/), представляющая интересы Международной ассоциации вычислительной механики (IACM). Первый подобный ежегодный семинар прошел в 1988 г. в Гётеборге (Швеция). В семинаре традиционно участвуют представители из стран Северной Европы: Дании, Финляндии, Исландии, Норвегии, Швеции и Прибалтики (Эстония, Латвия и Литва). В 2012 г. в семинаре приняли участие представители российской научной школы, постоянные участники семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”: С.М. Бауэр, Л.А. Карамшина, А.В. Лебедев. и А.Л. Смирнов (СПбГУ). Руководителем организационного комитета в 2012 г. был профессор Göran Sandberg из Университета Лунда.

Семинар был посвящен вопросам, связанным с вычислительными методами и их приложениям к широкому классу задач механики. С пленарными докладами выступили Prof. Peter Hansbo (JTH, Sweden), Prof. Jesper Hattel (DTU, Denmark), Prof. Hans Petter Langtangen (CBC and UIO, Norway) и Dr. Ville Vuorinen (Aalto Univ., Finland). Каждая секция состояла либо из основной лекции продолжительностью 30 минут и четырех докладов по 15 минут, либо из шести презентаций по 20 минут. Статьи, написанные на основе докладов, были включены в сборник трудов семинара.

Научный уровень докладов был очень высоким, атмосфера на семинаре — творческой и дружественной, чему способствовали комфортные условия для общения, равноправие участников, отсутствие барьеров для обмена мнениями, обсуждение актуальных задач и перспективы партнерства по итогам конференции.

Следующий, 26-й семинар планируется провести в Осло (Норвегия) 25–26 октября 2013 г.

С.М. Бауэр, А.Л. Смирнов

ОБ АВТОРАХ

Евзеров Исаак Данилович — доктор технических наук, научный руководитель проекта «Программный комплекс ЛИРА 10.0», разработчик теоретических основ программного комплекса, автор библиотеки конечных элементов, расчетного процессора в программных комплексах «ЛИРА 5.01 – 9.6» и расчетно-графических специализированных систем «МОСТ», «Динамика плюс» и «Монтаж плюс». Область научных интересов — метод конечных элементов, численные методы решения нелинейных и нестационарных задач математической физики. E-mail: manager@lira.kiev.ua

Ефимов Иван Владимирович — аспирант кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ. Область научных интересов — изучение прочностных свойств материалов со сложной реологией и построение моделей деформирования таких материалов. Научный руководитель — доц. Г.В. Павилайнен. E-mail: sqr.efimov@gmail.com

Игнатьева Ксения Андреевна — аспирант кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела, теория оболочек, биомеханика. Научный руководитель — канд. физ.-мат. наук Е.Б. Воронкова. E-mail: ksuenator@gmail.com

Карпенко Антон Геннадьевич — аспирант гидроаэромеханики СПбГУ. Область научных интересов — вычислительная гидрогазодинамика, высокопроизводительные вычисления, параллельные алгоритмы, графические процессоры. Автор 9 опубликованных работ. Научный руководитель — проф. С.К. Матвеев. E-mail: aspera.2003.ru@mail.ru

Кварацхелия Даниил Дмитриевич — студент магистратуры математико-механического факультета СПбГУ. Выпускник бакалавриата математико-механического факультета СПбГУ. Научный руководитель – проф. П.Е. Товстик. E-mail: kvardan90@gmail.com

Кулаковский Игорь Андреевич — выпускник бакалавриата и студент магистратуры математико-механического факультета СПбГУ. Область научных интересов — динамика и устойчивость тонкостенных конструкций.Научный руководитель — проф. С.Б. Филиппов. E-mail: igor.kulakovsky@gmail.com

Леонтьев Виктор Анатольевич — выпускник кафедры механики и процессов управления СПбГПУ 1976 г., кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Центрального научно-исследовательского и опытно-конструкторского института робототехники и технической кибернетики (ЦНИИ РТК). Область научных интересов – механика, физика, математическое и компьютерное моделирование динамических систем.E-mail: vleont@mail.ru

Нестерчук Григорий Анатольевич — выпускник бакалавриата и студент магистратуры математико-механического факультета СПбГУ. Научный руководитель — проф. С.Б. Филиппов. Область научных интересов — теоретическая механика, компьютерное моделирование. Научный руководитель — проф. С.Б. Филиппов. E-mail: grigory_ne@mail.ru

Помыткина Евгения Сергеевна — в ыпускница бакалавриата и студентка магистратуры математико-механического факультета СПбГУ. Область научных интересов — теория тонкостенных конструкций, компьютерное моделирование. Автор одной опубликованной работы. Научный руководитель — доц. А.Л. Смирнов. E-mail: luinil@yandex.ru

Рубашова Дарья Александровна — аспирант кафедры прикладной механики и инженерной графики Санкт-Петербургского электротехнического университета "ЛЭТИ". Область интересов — биомеханика глаза, метод конечных элементов, теория оболочек.

Автор 14 опубликованных научных работ. Научный руководитель — проф. П.И. Бегун. E-mail: rubashovad@bk.ru

Смирнов Андрей Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Автор публикаций по вопросам механики тонкостенных конструкций. E-mail: a_l_smirnov@mail.ru

Смольников Борис Александрович — выпускник кафедры механики и процессов управления СПбГПУ 1958 г., кандидат физико-математических наук, в настоящее время — профессор этой кафедры, а также внештатный сотрудник Центрального научно-исследовательского и опытно-конструкторского института робототехники и технической кибернетики (ЦНИИ РТК). Область научных интересов – общая механика, биомеханика и робототехника, движение космических объектов, теория управления. E-mail: smolnikovba@yandex.ru

Трофименко Павел Валерьевич — студент магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — теория оболочек, биомеханика. Автор одной опубликованной работы. Научный руководитель — проф. С.М. Бауэр. E-mail: pasha.trofimenko@inbox.ru

Франус Дмитрий Валерьевич — аспирант кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Область научных интересов — теория оболочек, биомеханика. Научный руководитель — проф. С.М. Бауэр. E-mail: franus@mavis.su

Яковчук Михаил Сергеевич — аспирант кафедры плазмогазодинамики и теплотехники БГТУ “ВОЕНМЕХ”. Область научных интересов — вычислительная гидрогазодинамика, автоматизация процессов подготовки вычислительной сетки, оптимизация параметров технических устройств. Научный руководитель — проф. В.Н. Емельянов. E-mail: mihailyakovchuk@gmail.com

УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА, ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ В 2012–2013 гг.

Баранова Дарья Александровна — канд. техн. наук (ПГУПС), 2012. Научный руководитель — проф. В. В. Карпов.

Ефимов Иван Владимирович — канд. физ.-мат. наук (СПбГУ), 2012. Научный руководитель — доц.. Г. В. Павилайнен.

Maya Kobchenko (Мая Евгеньевна Кобченко) — PhD, (University of Oslo), 2013. Supervisor — Prof. Dag Kristian Dysthe

Карпенко Антон Геннадьевич — канд. физ.-мат. наук (СПбГУ), 2013. Научный руководитель — проф. С. К. Матвеев.

SUMMARIES

I.D. Evzerov **Analysis of geometrically nonlinear postbuckling problems.**

The following algorithm for solution of geometrically nonlinear postbuckling problems is proposed. Firstly, a step-by-step method is used. If after the certain step the structure buckles, then the corresponding dynamical problem with the zero right part is solved. The initial conditions are set due to the first buckling mode. The unconditionally stable implicit difference scheme is used. We find the stable state under the same load, for which the structure losses its stability. Then step-by-step method is applied again. The proposed algorithm is realized in the FEM package PK LYRA10. The analysis of the benchmark problems confirms the effectiveness of the proposed algorithm.

References:

1. *Gorodetsky A.S. and Evzerov I.D.* Computer models of structures. Kiev: Fakt, 2007, P. 394 (in Russian).
2. *Evzerov I.D.* Approximate scheme for analysis of nonlinear vibrations of thin plates, Modelling in Mechanics, Novosibirsk, vol.3 (20), №2, pp. 54–63 (1989) (in Russian)
3. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Theory of Elasticity. A Course of Theoretical Physics (3rd ed.), vol. 7, Butterworth–Heinemann, 1986, P. 195.
4. *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Paris, Dunod, 1969.
5. *Nazarov D.* Review of up-to-date finite element analysis software, SAPR and graphics, №2, pp. 52–55 (2000) (in Russian).
6. *Panagiotopoulos P. D.* Inequality Problems in Mechanics. Convex and Nonconvex Energy Functions, Birkhäuser Verlag, Basel/Boston 1985., P. 412.
7. *Slivker V.I. and Perelmuter A.V.* Stability of Equilibrium of Structures and Related Problems: General Theorems and Individual Members of Mechanical Systems v. 1, World Scientific Publishing Co, P. 1770.
8. *Danilin A., Zuev N., Snegovsky D., and Shalashilin V.* On application of finite element method to solution of geometrically nonlinear problems, SAPR and graphics, №4, pp. 26–31 (2000) (in Russian)

D. V. Franus **On mathematical models of tonography.**

Two existing mathematical models of eye’s tonography are discussed. Tonography is a research method of dynamics of aqueous humor. The main part of the method is the prolonged tonometry (usually 4 minutes) and evaluation of the coefficient of the outflow easiness and the volume of the aqueous humor per minute. The inter-eye pressure during inter-sclera injections and different parameters of anisotropy are estimated together with the typical periods of relaxation of the inter-eye pressure after injection of additional volume of liquid into the vitreous body. In the proposed model we withdraw the main assumption of the classical theory on the constant velocity of the inflow liquid.

References:

1. *Nesterov A.P., Bunin A.Ja., Kacnel’son L.A.* // Intraocular pressure. Physiology and pathology. Moscow : Mir Publishers, 1978. P. 448.
2. *Volkov V.V.* Open-angle glaucoma // Moscow, Meditsinskoe informatsionnoe agentstvo, 2008. pp. 10–13. (in Russian)
3. *Lyubimov G.A., Moiseeva I. N., Stein A. A.* Dynamics of the intraocular fluid: Mathematical model and its main consequences // Fluid Dynamics, Vol. 42, Issue 5, 2007, pp. 684-694.
4. *Lyubimov G.A., Moiseeva I.N., Stein A.A.* Mechanical meaning of tonographical methods of reseach of pressure. // Biomechanics of eye 2007. Collection of conference papers. M.: Moscow Helmholtz Research Institute for Eye Diseases, 2007. pp.127–134. (in Russian)
5. *Lyubimov G.A., Stein A.A., Michurina M.V., Moiseeva I.N.* Mathematical Modeling of Methods Used in Ophthalmology for Measuring the Mechanical Characteristics of the Eye in Problems of Contemporary Mechanics, Moscow: Moscow University Press, Omega-L, 2008. p. 290–306. (in Russian)
6. *Moiseeva I.N., Stein A.A.* Analysis of the pressure-volume relationship for the eyeball loaded by a flat stamp on the basis of a two-segment elastic model // Fluid Dynamics, 2011, Vol. 46, Issue 5, pp 673-683.
7. *Iomdina E.N.* Mechanical properties of the human eye tissues // Modern Problems of Biomechanics. — Moscow: Moscow University Press, 2006. — Vol. 11. — P. 184-201. (in Russian)

K.A. Ignateva **Buckling of axisymmetric equilibrium states of circular plates under normal pressure.**

The stability of axisymmetric equilibrium states of an isotropic non-homogeneous circular and annular plate under uniform pressure is considered. The refined 2D shell theory is employed to obtain governing equations for buckling of a clamped circular shell. The asymmetric part of the solution is sought in terms of products of the harmonics of the angular coordinates. The numerical method is employed to obtain the lowest load value, which leads to the appearance of the waves in the circumferential direction. The effect of the inner radius and the degree of inhomogeneity on the critical load value and buckling mode is studied.

References:

1. *Panov D., Feodos'ev* . Equilibrium and loss of stability of shallow shells with large detections // J. Appl. Math. Mech, vol.12, 1948, pp. 389–406.
2. *Morozov N.F.* The Uniqueness of the Symmetrical Solution in the Problem of the Large Deflection of a Symmetrically Loaded Circular Plate // Soviet Physics Doklady. Vol. 3,1958. pp.1275.
3. *Piechocki W.J.* On the non-linear theory of thin elastic spherical shells // Arch. Mech, 1969. № 21, pp. 81–101.
4. *Huang N. C.* Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells // J. Appl. Mech, 1964. № 31, pp. 447–457.
5. *Cheo L. S, Reiss E. L.* Unsymmetrical wrinkling of circular plates . Quart // Appl. Math, 1971. № 31, pp. 75–91.
6. *Bauer S.M., Voronkova E.B.* Non-classical shell theories for the analysis of transversally isotropic spherical and cylindrical layers under normal pressure // Vestnik of St. Petersburg University, ser. 1, №3, 2011, pp. 85–92.

I.A.Kulakovskii **Vibrations of a cylindrical shell stiffened by rings with the "hat-type"cross-sectional areas**

Nowadays together with the so-called “smooth” shells the ribbed shells and the s hells stiffened by rings are actively used. In the paper the freely supported cylindrical shell stiffened by circular rings with the “hat-type"cross-sectional area is considered. The vibration and buckling problems are analyzed. The parameters for the stiffened shell with the given mass corresponding to the maximum values of the first natural

frequency and the critical external pressure are found by means of asymptotic methods. The advantage of using rings with the "hat-type" cross-sectional areas as compared to rings with the rectangular cross-sections is illustrated.

References

1. *Goldenveizer A. L., Lidskii V. B., Tovstik P. E.* Free vibrations of thin elastic shells. M., 1979. 384 p. (in Russian).
2. *Filippov S. B.* The theory of conjugate and cylindrical shells. SPb University Press, 1999 [in Russian].
3. *Filippov S. B., Boyarskaya M.L., Kulakovskii I. A.* Approximate determination of the optimum parameters in problems stability and vibration stiffened cylindrical shells // Sixth Polyahov's reading: Selected Papers of the International Scientific Mechanics Conference. SPb., 2012, pp. 296–302. (in Russian).
4. *Filippov S. B., Lopatuhin A. L.* The low-frequency vibrations and stability of the ring-stiffened thin cylindrical shell // Vestnik SPbGU, Ser. 1, 2001, №2, pp. 84–90 (in Russia).
5. *Filippov S. B.* Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach // Technische Mechanik, Vol. 24, pp. 221–230, 2004.
6. *Filippov S. B.* Asymptotic analysis of ring-stiffened shell vibrations. ENOC 2011, 7th European Nonlinear Oscillations Conference, 2011, Rome.

Nesterchuk G.A. **Vibrations and buckling of a cylindrical shell stiffened by rings with various stiffnesses.**

The vibrations and buckling of the elastic ring-stiffened freely supported thin cylindrical shell are considered. The shell reinforced by rings of unequal stiffness with zero eccentricity is analyzed. It is assumed that the heights of rings are distributed symmetrically with respect to the shell edges. To find the fundamental vibration frequency and the external critical pressure the asymptotic techniques and the Rayleigh method are applied.

The effect of the distribution of the stiffness's of rings along the generator of the cylindrical thin shell on the value of the fundamental frequency and critical pressure is analyzed. Linear, parabolic and exponential distributions of the heights of rings are considered.

The approximate analytical solutions for the optimization problem for the ribbed shell with given mass maximizing the fundamental frequency or the critical pressure are obtained. The fundamental vibration frequencies and the external critical pressures of the stiffened and non-stiffened shells of the same mass are compared. It is shown that the replacement of a non-stiffened cylindrical shell by the optimal stiffened cylindrical shell with the same mass increases the fundamental frequency and critical pressure more than six times.

References:

1. *Tian J., Wang C.M., and Swaddiwudhipohg S.* Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shell under general pressure loading via Ritz method // Thin walled structures. vol. 35, pp. 1–24. 1999.
2. *Goldenveizer A.L., Lidskii V.B., Tovstik P.E.* Free vibrations of thin elastic shells. M., 1979. 384 p. (in Russian).
3. *Filin A.P.* Elements of Shell Theory, Stroiizdat, Leningrad, 1987 (in Russian).
4. *Filippov S. B.* The theory of joint and reinforced shells. SPb University Press., 1999. (in Russian)
5. *Alfutov N.A.* Stability of elastic structures, Springer, Berlin, London, 2011.
6. *Sharypov D.V.* Low-frequency vibrations of the ring-stiffened thin cylindrical shell, St. Petersburg Univ. Mech. Bulletin, 3, 1997. pp. 29–34.
7. *Filippov S. B.* Asymptotic analysis of ring-stiffened shell vibrations. ENOC 2011, 7th European Nonlinear Oscillations Conference, 2011, Rome, http://w3.uniroma1.it/dsg/enoc2011/proceedings/pdf/Filippov_6pages.pdf
8. *Filippov S.B.* Buckling, vibrations and optimal design of ring-stiffened thin cylindrical shells. Advances in Mechanics of Solids. World Scientific Publishing Co Ltd.: pp. 17–48 .

Rubashova D.A. **Methods and Biotechnical Assessment System of the eye structures**

In the development process of data support of biotechnical systems for biomechanical assessment of the eye structures, an algorithm for evaluation of displacements, stresses and strains in the structures of the eyeball is proposed. This algorithm permits to make computer models taking into account the anisotropy and inhomogeneity of the structures. For geometric modeling was produced by using of the package SolidWorks, VAT calculations and analysis of the number of finite elements were made in the finite element package CosmosWorks. Based on the results of calculations depending on the parameters of the eyes the diagrams of the differences between the values of the actual tonometric IOP and tonometric IOP estimated with Maklakov's method were plotted. Also, the dependencies of the stress-strain state in the structures of lamina cribrosa and optic disk on the gradient of IOP and ICP were found.

References

1. *Doughty M.J., Zaman M.L.* Human corneal thickness and its impact on intraocular pressure measures: a review and meta-analysis approach. Surv. Ophthalmol. 2000. Vol. 44. №5. P. 367–408.
2. *Ehlers N., Bramsen T., Sperling S.* Applanation tonometry and central corneal thickness. Acta Ophtalmol. (Copenh.). 1975. Vol. 53. №1. P. 34–43.
3. *Tonnu P.A., Ho T., Newson T., et al.* The influence of central corneal thickness and age on intraocular pressure measured by pneumotonometry, non-contact tonometry, the Tono-Pen XL, and Goldmann applanation tonometry // British Journal of Ophthalmology. 2005. Vol. 89, pp. 851–854
4. *Avetisov S.E.* Investigation of the influence of corneal biomechanical properties on the tonometry results / S.E. Avetisov, I.A. Bubnova, A.A. Antonov // Ocular biomechanics. Collection of scientific papers. M., 2009. P. 72-75. (in Russian)
5. *Bauer S.M., Kachanov A.B., Semenov B.N., Slesoraytite E.*The effect of corneal thickness on the performance of intraocular pressure applanation methods IOP measurement// Ocular biomechanics. M., 2007. P. 119–124 (in Russian)
6. *Bauer S.M., Lyubimov G.A., Tovstik P.E.* Mathematical modeling of Maklakoff's method for measuring the intraocular pressure. Fluid Dynamics, 2005, vol. 40, №1, p. 20–33.
7. *Karamshina L.A.* Models of multi-layer shells in problems of ophthalmology. Dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences. SPb., 2011. 101 p. (in Russian).
8. *Tipyasev A.S.* Models theory of shells in the problems of measurement of intraocular pressure. Dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences. SPb., 2009. 91 p. (in Russian).
9. *Ljubimova D.* Biomechanics of the Human Eye and Intraocular Pressure Measurements. Technical reports from Royal Institute of Technology Department of Mechanics. Stockholm, Sweden, August 2009. 200 p.
10. *Srodka W.* Biomechanical model of human eyeball and its applications// Optica Applicata. 2009. Vol. 39. №2. P. 401–413.
11. *Avetisov S.E., Bubnova I.A.* Modern possibilities of lifetime assessment of the mechanical properties of the cornea // Modern methods of diagnosis and treatment of cornea and sclera. Collection of articles edited by S. E. Avetisov and J.O. Grusha. M., 2007. p. 236–240 (in Russian).

12. *Iomdina E.N.* Biomechanics of the scleral shell of eye with myopia and diagnosis of their experimental correction. Thesis of Doctor of Biological Sciences, M., 2000, 319 p. (in Russian).
13. *Iomdina E.N.* Mechanical properties of the human eye tissues // Contemporary problems of biomechanics, Issue 11, 2006, Moscow State University Press, P. 183-200. (in Russian)
14. *Akhutin V.M.* Biotechnical Systems: Theory and engineering: study guide/ V.M. Akhutin, E.G. Popechitelev; edited V.M. Akhutin. Leningrad: LSU, 1981. 220 p (in Russian).
15. *Rubashova D.A.* Research of influence mechanical properties and geometrical parameters of the corneal on tonometry results// Izvestiya of ETU (LETI). 2013. №2, pp. 106–113 (in Russian).

Smirnov A.L., Pomytkina E.S. **Free transverse vibrations of a beam with variable parameters.**

Free transverse vibrations of a straight elastic beam with rectangular cross-sectional area with parameters varying in the axial direction are analyzed. The purpose of the study is to derive formulas for natural frequencies and vibration nodes. It is assumed that the beam parameters (width, height, density, Young modulus) are close to constants what permits to use the perturbation method. The results obtained with the asymptotic method are compared with the results of numerical modeling. It appears that the dependence of the natural frequencies on the amplitude of the perturbation may be weak, i.e. not linear, but quadratic, if the boundary conditions and the perturbation function possess some symmetry.

References:

1. *Bauer S.M., Smirnov A.L., Tovstik P.E., Filippov S.B.* Asymptotic methods in mechanics of solids. Moscow–Izhevsk, 2007, P. 356 (in Russian).
2. *Andrianov I.V., Danishevs'kyy V.V., Ivankov A.O.* Asymptotic Methods in the Theory of Beams and Plates Oscillations. Dnipropetrovs'k: PGASA, 2010 P. 216 (in Russian).
3. *Byoung Koo Lee, Jong Kook Lee, Tae Eun Lee, and Sun Gi Kim*, Free vibrations of tapered beams with general boundary condition. KSCF Journal of Civil Engineering, Vol.6, №3, September 2002, pp. 283-288.
4. *Mahmoud Bayat, Iman Pakar, and Mahdi Bayat* Analytical study on the vibration frequencies of tapered beams. Latin American Journal of Solids and Structures, 8(2011), pp. 149-162.

5. *Safa Bozkurt Coskun, Mehmet Tarik Atay, and Baki Ozturk*, Transverse Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beams Using Analytical Approximate Techniques in Advances in Vibration Analysis Research, Publisher InTech, 2011, pp.1–22.

6. *E.S. Pomytkina and A.L. Smirnov*, Numerical and Asymptotic Modeling of Vibrations of a Beam with Variable Parameters, NAA 12 Fifth Conference on Numerical Analysis and Its Application, Abstracts, University of Rousse, Bulgaria 2012, p. 36.

Smolnikov B.A., Leontyev V.A. **Prospects of tethered satellite systems (TSS) and computer simulation of their deployment in orbit.**

For practical development and use of the near-Earth space, there should be created bulky tethered systems with a mesh structure in orbit, to which a variety of modules, devices and mooring-start constructions may be joint. However, in the almost complete absence of gravitational forces the deploying process of such tethered satellite systems (TSS) is a very complex engineering problem. Some methods of solution of this problem are proposed in the paper. Methods of deployment in space the main building element of TSS, the so-called gravitational dipole (GD), by separating the long tether with a thrust module controlled from aboard of satellite carrier are discussed and simulated. For this purpose, a special computer model was developed, which simulates numerically the dynamic behavior of extensible flexible tether with the end module. The optimal ways of thrust control by end module are found, which realizes the emission and stopping of GD without tangling or undesirable oscillations of the tether.

References:

1. *Beletsky V.V. and Levin E.M.* Dynamics of Space Tether Systems, Vol. 83 of Advances in Astronautical Sciences, Univelt, Incorporated, P.O. Box 28130, San Diego, California 92198, 1993.

2. *A.P. Alpatov, V.V. Beletsky, V.I. Dranovsky, A.E. Zakrzhevsky, A.V. Pirozhenko, G. Troger, V.S. Khoroshilov* Dynamics of Space Systems Connected by Hinges and Tethers, Moscow–Izhevsk, Institute of Computer Research., 2007. 558 p. (in Russian).

3. *Ivanov V.A.* Tethered systems in space. // Aviation and cosmonautics, 1984. №5, pp. 43–44. (in Russian).

4. *Ivanov V.A and Sitarsky Y.S.* Flight dynamics of flexibly connected systems of space objects. Moscow.: Mashinostroenie. 1986. 246 p. (in Russian).

5. *Levin E.M.* On the Deployment of a Long Tether System with Two End-Bodies in Orbit. // Cosmic Research, 1983, V. XXI, №1, pp. 121–124 (in Russian).

6. *Polyakov G.G.* Radial system of tethered satellites. // Cosmic Research, 1981, V. IXX, №3, pp. 467–470. (in Russian).

7. *Leontyev V.A.* Direct time integration algorithm with controllable numerical dissipation for structural dynamics: Two-step Lambda method. // Applied Numerical Mathematics, 2010, Vol. 60, №3, pp. 277–292. (Published by Elsevier B.V., Amsterdam).

8. *Leontyev V.A.* Optimal discretization of distributed elasticity in mathematical models of manipulator's links. // Transactions of 1st science conference "Robots and manipulators in extremal conditions" SPb.: SPbDNTP, 1992. pp. 100–106. (in Russian).

9. *Smolnikov B.A, Leontyev V.A.* Dissipative dynamics of tethered satellite systems (TSS). // Transactions of 7th International Conference "Space robotics and terrestrial rovers". SPb., Lenexpo, 2010, pp. 48–49.

10. *Smolnikov B.A., Leontyev V.A.* Evolutionary dynamics of orbital objects. // European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS 2011), St. Petersburg, Russia, 4–8 July 2011. EUCASS CD book of papers 2011, Symposium 4, №24.

Trofimenko P.V. **The dependence of the intraocular pressure on the volume of the eye.**

The ocular rigidity is a very common concept in ophthalmology, but the parameter of the ocular rigidity is always depends on the relation "intraocular pressure –volume of the eye". The mechanical model describing the relation "pressure–volume" for a human eye is considered in the paper. Isotropic shells of revolution of different shapes (modeling the sclera) with equal initial volumes show linear pressure-volume relationship, while proportionality factor (coefficient of the ocular rigidity) is minimal for a spherical shell (emmetropic eye). It was revealed that, if the ratio of the axial length (AL) and the equator diameter of the shell (D) increases (the case of a myopic eye), then the coefficient of ocular rigidity increases up to 5-10 % and, if the ratio AL/D decreases (for hyperopic eye), then the coefficient of ocular rigidity increases up to 100 %.

References

1. *Pallikaris I.G., Dastiridou A.I., Tsilimbaris M.K., Karyotakis N.G., Ginis H.S.* Expert Rev. Ophthalmol. 5(3), Ocular rigidity, 343–351 (2010).
2. *Nesterov A.P., Bunin A.Y., Kantselson L.A.* Intraocular pressure. Physiology and pathology. Nauka (1974) (in Russian).
3. *Timoshenko S.P. and Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells, 2nd Ed. McGraw-Hill Book Company, 1959.
4. *Filin A.P.* Elements of Shell Theory. Stroiizdat, Leningrad, 1987 (in Russian).

СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТЫ

УДК 539

Евзеров И.Д. **Геометрически нелинейные задачи после потери устойчивости** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. С. 89–101.

Рассматриваются геометрически нелинейные задачи в трехмерной вариационной постановке и шаговый метод для их решения. Выполнен переход к соответствующим задачам для стержней и пластин. Рассмотрены также геометрически нелинейные динамические задачи и разностная схема. Предложен следующий алгоритм решения геометрически нелинейных задач после потери устойчивости. Сначала применяется шаговый метод. Если после некоторого шага установлено, что произошла потеря устойчивости, далее решается соответствующая динамическая задача при равной нулю правой части. Начальные условия задаются в соответствии с найденной первой формой потери устойчивости. Применяется безусловно устойчивая неявная разностная схема. Таким методом находим устойчивое состояние при той же нагрузке, при которой конструкция потеряла устойчивость. Далее снова применяется шаговый метод. Приведены тестовые задачи для шарнирно-стержневых систем, круговой арки и центрально сжатой консоли, подтверждающие эффективность алгоритма.

Библиогр. 8 назв. Ил. 6. Табл. 6.

УДК 539.3

Игнатьева К.А. **Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. С. 21–34.

Рассматривается устойчивость осесимметричных форм равновесия неоднородных круглых и кольцевых пластин, загруженных нормальным давлением. Полагается, что несимметричная составляющая решения системы носит периодический характер и численным методом определяется наименьшее значение нагрузки, при которой появляются волны в окружном направлении. Исследовано влияние отверстия в центре пластины, степени неоднородности материала на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости.

Библиогр. 7 назв. Ил. 2. Табл. 5.

УДК 539.3:534.1

Кулаковский И.А. **Колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с П-образным поперечным сечением** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. С. 76–88.

Рассматривается цилиндрическая оболочка, шарнирно закрепленная по краям и подкрепленная круговыми стержнями (шпангоутами). Исследовано преимущество использования шпангоутов с П-образным поперечным сечением над шпангоутами с прямоугольным поперечным сечением. Рассмотрены задача об оптимизации параметров подкрепленной оболочки с целью максимального увеличения первой частоты и задача об оптимизации параметров подкрепленной оболочки с целью максимального увеличения критического давления. Получены сравнительные данные о преимуществе использования шпангоутов с П-образным поперечным сечением.

Библиогр. 6 назв. Ил. 3. Табл. 3.

УДК 539.3:534.1

Нестерчук Г.А. **Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с разной жесткостью** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. С. 53–64.

Исследуется влияние изменения закона распределения жесткостей шпангоутов вдоль образующей тонкой упругой цилиндрической оболочки на значение критической нагрузки и первой частоты колебаний оболочки. Получено приближенное аналитическое решение задач об оптимизации параметров с целью увеличения критической нагрузки и первой частоты колебаний всей системы.

Библиогр. 8 назв. Ил. 2. Табл. 4.

УДК 532.11:539.3

Рубашова Д.А. **Методы и биотехническая система оценки структур глаза** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. С. 65–75.

При разработке информационного обеспечения биотехнической системы для биомеханической оценки состояния структур глаза предложен алгоритм исследования перемещений, напряжений и деформаций в структурах глазного яблока, позволяющий строить для него компьютерные модели, учитывающие анизотропию и неоднородность свойств входящих в них структур. Геометрические построения моделей проведены в пакете прикладных программ SolidWorks, вычисления НДС и анализ числа конечных элементов проведены в конечно-элементном пакете CosmosWorks. По результатам вычислений построены зависимости расхождения значений истинного тонометрического ВГД со значениями ВГД, определенного по методу Маклакова, от параметров глаза.

Библиогр. 15 назв. Ил. 6.

УДК 539.3

Смирнов А.Л., Помыткина Е.С. **Свободные поперечные колебания балки с переменными параметрами** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. С. 102–114.

Рассматриваются свободные поперечные колебания прямой упругой балки с прямоугольным поперечным сечением, с параметрами, зависящими от продольной координаты. Целью исследования является получение формул для собственных частот колебаний и собственных форм колебаний. Предполагается, что параметры балки мало отличаются от постоянных, что позволяет использовать в исследовании асимптотический метод. Результаты, полученные асимптотическим методом, сравниваются с результатами численного моделирования.

Библиогр. 6 назв. Ил. 7. Табл. 8.

УДК 629.786.2.

Смольников Б.А., Леонтьев В.А. **Перспективы развития орбитальных тросовых конструкций и компьютерное моделирование их развертывания** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. С. 7–20.

Для практического освоения и использования околоземного космического пространства предложено создавать на орбите крупногабаритные вантово-тросовые конструкции с сетчатой структурой, на которые могут крепиться самые разнообразные модули, устройства и причально-стартовые конструкции. Однако сам процесс раскрытия подобных орбитальных тросовых конструкций (ОТК) в условиях почти полного отсутствия гравитационных сил представляет собой весьма сложную инженерно-техническую проблему. Решению её и посвящена предлагаемая работа, в которой обсуждаются и моделируются способы раскрытия в космосе основного строительного элемента ОТК – так называемого гравитационного диполя (ГД), посредством выброса с борта спутника-носителя или транспортного грузового корабля длинномерного троса с концевым управляемым модулем. Для решения этой задачи построена специальная компьютерная модель, описывающая путем численного моделирования динамическое поведение модуля с гибким и растяжимым тросом во времени. Найдены оптимальные режимы управления тягой концевого модуля, реализующие выброс и остановку троса без его запутывания или возникновения нежелательных колебаний.

Библиогр. 10 назв. Ил. 7.

УДК 532.11:539.3

Трофименко П.В. **Зависимость внутриглазного объема от внутриглазного давления** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. С. 35–41.

Для сферических изотропных оболочек вращения получены зависимости изменения объема от давления, а для эллипсоидальных изотропных оболочек вращения получены зависимости изменения объема от отношения главных полуосей оболочки по линейной безмоментной теории оболочек.

Сделаны выводы, позволяющие оценить влияние формы оболочки (степень ее отклонения от сферической) на зависимость “объем–давлени”. Зависимость внутриглазного объема от внутриглазного давления (ВГД) в офтальмологии связывают с понятием ригидности глаза, которое лежит в основе клинической тонометрии и тонографии. Кроме того, знание зависимости, связывающей изменение ВГД и внутриглазного объема, позволяет контролировать изменение ВГД при введении внутриглазных инъекций.

Библиогр. 4 назв. Ил. 4. Табл. 1.

УДК 519.62

Филин А.П. **Об одной трактовке метода Бубнова–Галёркина** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. С. 4–6.

Показывается, что метод Бубнова–Галёркина для решения дифференциальных уравнений можно трактовать и как результат непосредственного применения обобщенных рядов Фурье. При этом в определенном смысле облегчается как задача о сходимости метода, так и вопрос о выборе координатных функций.

УДК 532.11:539.3

Франус .Д.В. **О математических моделях тонографии** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2012–2013 гг. С. 42–52.

Тонография — метод исследования динамики водянистой влаги. Сущность метода заключается в продленной тонометрии (обычно 4 мин) и определении коэффициента легкости оттока и минутного объема водянистой влаги. Рассматриваются определение внутриглазного давления при внутресклеральных инъекциях и различных параметрах анизотропии, а также характерные периоды релаксации внутриглазного давления после введения дополнительного объема жидкости в стекловидное тело глаза.

Обсуждаются две существующие математические модели тонографии глаза.

Библиогр. 7 назв. Ил. 3.

Научное издание

ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2012–2013 гг.

Обложка художника *Е. А. Соловьевой*
Корректор *Н. В. Ермолаева*
Компьютерная верстка *А. М. Вейшторт*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

Подписано в печать . . 2013. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл.-печ. л. . Тираж 123 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21.

Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22.
E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:
С.-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11/21, к. 21.
Телефоны: 328-77-63, 325-31-76.
E-mail: post@unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.